水平2関節形フレキシブルロボットアーム位置制御系の 動的有限要素解析*

(有限要素定式化の一手法と台形状速度曲線に基づく経路制御を
適用した場合の数値シミュレーション)

小 島 宏 行^{*1}

Dynamic Finite Element Analysis of the Position Control System of a Horizontal Flexible Robot Arm with Two Links

(A Finite Element Formulation Method and Numerical Simulation in
Applying Path Control Based on Trapezoidal Velocity Curve)

Hiroyuki KOJIMA

In this paper, first, a finite element formulation method for a horizontal flexible robot arm with two links is presented. In the analysis, the kinetic energy of the flexible arm is represented in brief compared with the previous method, and the matrix equation of motion in consideration of the nonlinear forces, such as the Coriolis force, is derived by the finite element method and the variational theorem. Then, the state equation of the mechatronics system consisting of the flexible arm and the position control system is obtained. Second, the numerical simulations in the case of applying the path control based on the trapezoidal velocity curve are carried out by use of the Wilson- θ method, and the effects of the bending rigidity and the shape of the trapezoidal velocity curve on the dynamic characteristics of the mechatronics system are demonstrated.

Key Words: Dynamics of Machinery, Flexible Robot Arm, Position Control, Path Control, Finite Element Method, Trapezoidal Velocity Curve, Numerical Simulation

1. 緒 言

ロボットアームの高速化ならびに高性能化を達成するために、軽量化構造のフレキシブルアームの動力学と制御に関する研究^{(1)~(9)}が行われている。これらの研究の中で、軽量化設計を主眼としたフレキシブルロボットアームの動的有限要素解析に関する研究^{(4)~(9)}もあるが、今後検討すべき事項も多いように思われる。例えば、Usoroらは、アームの動的変形として曲げ振動を考慮した場合の動的解析を行っているが⁽⁶⁾、関節部のトルクは零としてあり、制御系は考慮されていない。一方、実用に供されている産業用ロボットにおいては、台形状の速度曲線に基づく経路制御が適用されている場合が多い。したがって、水平多関節形ロボットアームの軽量化設計において、台形状の速度曲線に基づく指令値を用いたフレキシブルロボットアーム位置制御系の動的応答を、力学系と制御系の相互作用を考慮して調べることは、十分に意義あるものと言えるが、このような研究は、まだ十分にはなされていないように思われる。また著者らは、自由度1のフレキシ

ブルアーム位置制御系の動的応答について、有限要素法を用いて理論的に調べるとともに^{(7)~(9)}、その理論値が実験値と比較的良く一致することを示した⁽⁷⁾⁽⁹⁾。

本研究は、水平2関節形フレキシブルロボットアームの有限要素定式化の一手法を提案するとともに、台形状速度曲線に基づく経路制御を用いた場合の数値シミュレーション結果について述べたものである。理論解析においては、フレキシブルアームの運動エネルギーを、Bernoulli-Eulerのはり理論⁽¹¹⁾に沿って、既報の解析法に比べより簡潔に記述している。この結果を用いて、力学系の運動方程式を、有限要素法ならびに変分原理を用いるとともに、コリオリ力等の非線形力を考慮して導き、数値計算を行う上でより有利と思われる解析法を提示している。また、位置制御系の電流方程式と運動方程式とを連立させることにより、この種メカトロニクス系の状態方程式を求めている。さらに、台形状速度曲線に基づく経路制御を適用した場合の数値シミュレーションをWilsonの θ 法⁽¹²⁾を適用して行い、フレキシブルアームの曲げ剛性や台形状速度曲線の形状が、力学・制御連成系の動的応答に及ぼす影響の一端を、定量的に明らかにしている。

* 平成元年1月25日 第955回講演会において講演、原稿受付 昭和63年6月20日。

*1 正員、群馬大学工学部(〒376 桐生市天神町1-5-1)。

図1 水平2関節形フレキシブルロボットアーム

2. 力学系の運動方程式の有限要素定式化

図1は、水平2関節形フレキシブルロボットアームのモデルを示したものであり、各関節には、図2のサーボ位置制御システム内の直流サーボモータのトルクが作用している。この位置制御システムの指令値は、図3の台形状速度曲線を積分した値に設定されている。また図4は、図1のフレキシブルアームの有限要素分割図を示したものである。

フレキシブルアームの質量マトリックスを有限要素法を用いて定式化するに際して、Usoroらは、各リンクの任意の点のたわみ速度を、図1の場合とは異なり、その方向が関節部における接線軸に垂直でない形で導いている⁽⁶⁾。しかしながら、この方法では、第2リンクの質量マトリックスを解析的に導くことが困難となり、この質量マトリックスは、積分記号を用いて記述されている。一方、Bernoulli-Eulerのはり理論⁽¹¹⁾が成り立つ範囲の微小曲げ変位を考えると、各リンクの任意の点 P_1, P_2 のたわみ速度成分は、図1に示されているように、近似的に r_1, r_2 軸に垂直であるものとして取扱っても、実用上十分な精度が得られる^{(7)~(9)}。したがって、第1リンクの任意の点 P_1 における速度 v_{1i} は、関節部の回転による速度成分とリンクのたわみ速度の和となり

$$v_{1i}^2 = (r_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_1)^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

のように書くことができる。ここに、 r_1 は第1関節部に固定された座標軸上の位置、 θ_1 は第1関節部の回転角、 w_1 は第1リンクの曲げ変位である。また、第1リンクの先端の速度 v_{1i} の絶対値は

$$|v_{1i}| = |l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_1| \quad \dots\dots\dots (2)$$

図2 各関節におけるサーボ位置制御システム

図3 台形状速度曲線

図4 フレキシブルアームの有限要素分割図

のように表すことができる。ただし、 l_1 は第1リンクの長さ、 w_{1i} は $r=l_1$ における第1リンクの曲げ変位である。図1の第2リンク上の任意の点において、第2関節部の回転による速度成分とたわみ速度成分の和の絶対値は

$$|\bar{v}_2| = |r_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) + \dot{w}_2| \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 θ_2 は直流サーボモータの回転に伴う第2関節部の回転角、 ϕ_{1i} は第1リンクの $r=l_1$ におけるたわみ角、 w_2 は第2リンクの曲げ変位を表している。したがって、第2リンク上の任意の点の速度 v_2 は、図1のように、 v_{1i} と $\bar{v}_2$ をベクトル的に加えることにより得られ、次式のように書くことができる。

$$v_2^2 = (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_1)^2 + \{r_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) + \dot{w}_2\}^2 + 2(l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_1)\{r_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) + \dot{w}_2\} \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(1)、(4)を用いると、フレキシブルリンク、関節部、直流サーボモータならびに動力伝達系から構成される図1の力学系のラグランジュアン L は、次式のように表すことができる。

$$L = T - U - D + \bar{W} \dots\dots\dots (5)$$

ここに

$$T = T_{a1} + T_{a2} + T_0, U = U_{a1} + U_{a2}, D = (\dot{C}_{01} \dot{\theta}_1^2 + C_{02} \dot{\theta}_2^2)/2, \bar{W} = T_{m1} \Phi_1 + T_{m2} \Phi_2, \Phi_1 = N_1 \theta_1, \Phi_2 = N_2 \theta_2 \dots\dots\dots (6)$$

$$T_{a1} = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \rho_1 A_1 (r_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_1)^2 dr_1 \dots\dots\dots (7)$$

$$T_{a2} = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 A_2 [(l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1l})^2 + \{ r_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1l}) + \dot{w}_2 \}^2 + 2 (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1l}) \{ r_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1l}) + \dot{w}_2 \} \cos (\theta_2 + \phi_{1l})] dr_2 \dots\dots\dots (8)$$

$$T_0 = \frac{1}{2} (J_{01} \dot{\theta}_1^2 + J_{m1} \dot{\Phi}^2) + \frac{1}{2} (J_{02} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1l})^2 + J_{m2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\Phi}_2 + \dot{\phi}_{1l})^2) + \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1l})^2 + \frac{1}{2} m_2 [(l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1l})^2 + \{ l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1l}) + \dot{w}_{2l} \}^2 + 2 (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1l}) \{ l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1l}) + \dot{w}_{2l} \} \cos (\theta_2 + \phi_{1l})] \dots\dots\dots (9)$$

$$U_{a1} = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} E_1 I_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial r_1^2} dr_1, U_{a2} = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} E_2 I_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r_2^2} dr_2 \dots\dots\dots (10)$$

であり、 T は運動エネルギー、 U はポテンシャルエネルギー、 D は損失エネルギー、 $\bar{W}$ はモータのトルク T_{m1} 、 T_{m2} によるポテンシャルエネルギーであり、 T_{a1} 、 T_{a2} はリンクによる運動エネルギー、 T_0 は関節部の運動エネルギー、 U_{a1} 、 U_{a2} はリンクの弾性エネルギーをそれぞれ表している。また、 Φ_1 、 Φ_2 はモータの電機子の回転角、 N_1 、 N_2 は減速比、 ρ_1 、 ρ_2 はリンクの密度、 A_1 、 A_2 は横断面積、 I_1 、 I_2 は断面 2 次モーメント、 E_1 、 E_2 は縦弾性係数、 l_2 は第 2 リンクの長さ、 w_{2l} は第 2 リンク先端の曲げ変位、 J_{01} 、 J_{02} は関節部の慣性モーメント、 J_{m1} 、 J_{m2} はモータ電機子の慣性モーメント、 m_1 は第 2 関節部の質量、 m_2 は第 2 リンク先端の質量、 C_{01} 、 C_{02} は関節部の減衰力係数を示している。

次に、リンク 1、2 を図 4 のように n 、 $\bar{n}$ 個のはり要素に分割し、形状関数を N 、 $\bar{N}$ と置く

$$w_1 = N \phi_{1i}, w_2 = \bar{N} \phi_{2i} \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} N &= \{N'_1, N'_2, N'_3, N'_4\}, \bar{N} = \{\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4\}, \phi_{1i} = \{w_{1i}, \phi_{1i}, w_{1, i+1}, \phi_{1, i+1}\} \\ \phi_{2i} &= \{w_{2i}, \phi_{2i}, w_{2, i+1}, \phi_{2, i+1}\}, N'_1 = 1 - 3\nu_1^2 + 2\nu_1^3, N'_2 = (\nu_1 - 2\nu_1^2 + \nu_1^3)l_{e1} \\ N'_3 &= 3\nu_1^2 - 2\nu_1^3, N'_4 = (-\nu_1^2 + \nu_1^3)l_{e1}, \bar{N}_1 = 1 - 3\nu_2^2 + 2\nu_2^3, \bar{N}_2 = (\nu_2 - 2\nu_2^2 + \nu_2^3)l_{e2} \\ \bar{N}_3 &= 3\nu_2^2 - 2\nu_2^3, \bar{N}_4 = (-\nu_2^2 + \nu_2^3)l_{e2}, \nu_1 = \zeta_1/l_{e1}, \nu_2 = \zeta_2/l_{e2}, l_{e1} = l_1/n, l_{e2} = l_2/\bar{n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

であり、 ϕ_{1i} 、 ϕ_{2i} は節点変位ベクトル、 ϕ はリンクのたわみ角、 l_{e1} 、 l_{e2} ははり要素の長さ、 ζ_1 、 ζ_2 は各要素内に中立軸に沿って左端を原点として取った座標軸を表している。

式(11)を式(7)～(10)に代入するとともに、式(5)にハミルトンの原理

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \dots\dots\dots (13)$$

ならびに変分原理を適用すると、次の変分方程式が導かれる。

$$f_0 = \sum_{i=1}^n \delta \phi_{1i}^T (f_{1i} - b_{1i}) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \delta \phi_{2i}^T (f_{2i} - b_{2i}) + (f_3 - b_3) \delta \theta_1 + (f_4 - b_4) \delta \theta_2 + (f_5 - b_5) \delta w_{1l} + (f_6 - b_6) \delta \phi_{1l} + (f_7 - b_7) \delta w_{2l} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここに

$$f_{1i} = M_{2i} \ddot{\theta}_1 + M_{1i} \ddot{\phi}_{1i} \dots\dots\dots (15)$$

$$f_{2i} = \{ \bar{M}_{2i} + l_1 \cos (\theta_2 + \phi_{1l}) \bar{M}_{3i} \} \ddot{\theta}_1 + \bar{M}_{2i} \ddot{\theta}_2 + \{ \cos (\theta_2 + \phi_{1l}) \bar{M}_{3i} \} \ddot{w}_{1l} + \bar{M}_{2i} \ddot{\phi}_{1l} + M_{1i} \ddot{\phi}_{2i} \dots\dots\dots (16)$$

$$f_3 = \sum_{i=1}^n \bar{M}_{2i}^T \ddot{\phi}_{1i} + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \{ \bar{M}_{2i}^T + l_1 \cos (\theta_2 + \phi_{1l}) \bar{M}_{3i} \} \ddot{\phi}_{2i} + \left\{ J_1 + \left(m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} \rho_1 A_1 l_1^3 \right) + (m_2 l_1^2 + \rho_2 A_2 l_1^2 l_2) + \left(m_2 l_2^2 + \frac{1}{3} \rho_2 A_2 l_2^3 \right) + (2 m_2 l_1 l_2 + \rho_2 A_2 l_1 l_2^2) \cos (\theta_2 + \phi_{1l}) \right\} \ddot{\theta}_1 + [J_{12} + \{ m_2 l_2^2 + (\rho_2 A_2 l_2^3)/3 \} + \{ m_2 l_1 l_2 + (\rho_2 A_2 l_1 l_2^2)/2 \} \cos (\theta_2 + \phi_{1l})] \ddot{\theta}_2 + \{ (m_1 + m_2) l_1 + \rho_2 A_2 l_1 l_2 + \{ m_2 l_2 + (\rho_2 A_2 l_2^2)/2 \} \cos (\theta_2 + \phi_{1l}) \} \ddot{w}_{1l} + [J_{13} + m_2 l_2^2 + (\rho_2 A_2 l_2^3)/3 + \{ (\rho_2 A_2 l_1 l_2^2)/2 + m_2 l_1 l_2 \} \cos (\theta_2 + \phi_{1l})] \ddot{\phi}_{1l} + \{ m_2 l_2 + m_2 l_1 \cos (\theta_2 + \phi_{1l}) \} \ddot{w}_{2l} \dots\dots\dots (17)$$

$$f_4 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{M}}_{2i}^T \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{2i} + \left\{ J_{12} + \left(m_2 l_2^2 + \frac{1}{3} \rho_2 A_2 l_2^3 \right) + \left(m_2 l_1 l_2 + \frac{1}{2} \rho_2 A_2 l_1 l_2^2 \right) \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \right\} \ddot{\theta}_1 \\ + \left(J_2 + m_2 l_2^2 + \frac{1}{3} \rho_2 A_2 l_2^3 \right) \ddot{\theta}_2 + \{ m_2 l_2 + (\rho_2 A_2 l_2^2)/2 \} \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \ddot{w}_{1i} \\ + \{ J_{12} + (\rho_2 A_2 l_2^3)/3 + m_2 l_2^2 \} \ddot{\phi}_{1i} + m_2 l_2 \ddot{w}_{2i} \dots \dots \dots (18)$$

$$f_5 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \bar{\mathbf{M}}_{43i}^T \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{2i} + \left\{ (m_1 + m_2) + \rho_2 A_2 l_1 l_2 + \left(m_2 l_2 + \frac{1}{2} \rho_2 A_2 l_2^2 \right) \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \right\} \ddot{\theta}_1 \\ + (m_1 + m_2 + \rho_2 A_2 l_2) \ddot{w}_{1i} + \{ m_2 l_2 + (\rho_2 A_2 l_2^2)/2 \} \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \ddot{\theta}_2 \\ + \{ [m_2 l_2 + (\rho_2 A_2 l_2^2)/2] \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \} \ddot{\phi}_{1i} + \{ m_2 \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \} \ddot{w}_{2i} \dots \dots \dots (19)$$

$$f_6 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \bar{\mathbf{M}}_{2i}^T \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{2i} + \left\{ J_{13} + \left(m_2 l_2^3 + \frac{1}{3} \rho_2 A_2 l_2^3 \right) + \left(m_2 l_1 l_2 + \frac{1}{2} \rho_2 A_2 l_1 l_2^2 \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \right) \right\} \ddot{\theta}_1 \\ + \left(J_{12} + m_2 l_2^2 + \frac{1}{3} \rho_2 A_2 l_2^3 \right) \ddot{\theta}_2 + \{ [m_2 l_2 + (\rho_2 A_2 l_2^2)/2] \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \} \ddot{w}_{1i} + \{ J_{13} + m_2 l_2^2 \\ + (\rho_2 A_2 l_2^3)/3 \} \ddot{\phi}_{1i} + m_2 l_2 \ddot{w}_{2i} \dots \dots \dots (20)$$

$$f_7 = \{ m_2 l_2 + m_2 l_1 \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \} \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + \{ m_2 \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \} \ddot{w}_{1i} + m_2 l_2 \ddot{\phi}_{1i} + m_2 \ddot{w}_{2i} \dots \dots \dots (21)$$

$$\mathbf{b}_{1i} = -\mathbf{K}_{1i} \boldsymbol{\phi}_{1i} \dots \dots \dots (22)$$

$$\mathbf{b}_{2i} = -\bar{\mathbf{K}}_{1i} \boldsymbol{\phi}_{2i} + (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1i})(\dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) \sin(\theta_2 + \phi_{1i}) \bar{\mathbf{M}}_{3i} \dots \dots \dots (23)$$

$$b_3 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \{ l_1 (\dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) \sin(\theta_2 + \phi_{1i}) \bar{\mathbf{M}}_{3i}^T \dot{\boldsymbol{\phi}}_{2i} \} - C_{01} \dot{\theta}_1 + N_1 T_{m1} + \left\{ \left(m_2 l_1 l_2^2 + \frac{1}{2} \rho_2 A_2 l_1 l_2^2 \right) (2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) \right. \\ \left. + m_2 l_1 \dot{w}_{2i} + m_2 l_2 \dot{w}_{1i} + (\rho_2 A_2 l_2^2 \dot{w}_{1i})/2 \right\} (\dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) \sin(\theta_2 + \phi_{1i}) \dots \dots \dots (24)$$

$$b_4 = -\sum_{i=1}^{\bar{n}} (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1i}) \sin(\theta_2 + \phi_{1i}) \bar{\mathbf{M}}_{3i}^T \dot{\boldsymbol{\phi}}_{2i} - C_{02} \dot{\theta}_2 + N_2 T_{m2} - \left\{ \left(m_2 l_2 + \frac{1}{2} \rho_2 A_2 l_2^2 \right) \dot{\theta}_1 + m_2 \dot{w}_{2i} \right\} \\ (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1i}) \sin(\theta_2 + \phi_{1i}) \dots \dots \dots (25)$$

$$b_5 = \sum_{i=1}^{\bar{n}} (\dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) \sin(\theta_2 + \phi_{1i}) \bar{\mathbf{M}}_{3i}^T \dot{\boldsymbol{\phi}}_{2i} + \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho_2 A_2 l_2^2 + m_2 l_2 \right) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) + m_2 \dot{w}_{2i} \right\} \\ (\dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) \sin(\theta_2 + \phi_{1i}) \dots \dots \dots (26)$$

$$b_6 = -\sum_{i=1}^{\bar{n}} (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1i}) \sin(\theta_2 + \phi_{1i}) \bar{\mathbf{M}}_{3i}^T \dot{\boldsymbol{\phi}}_{2i} - (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1i}) \left\{ \left(m_2 l_2 + \frac{1}{2} \rho_2 A_2 l_2^2 \right) \dot{\theta}_1 + m_2 \dot{w}_{2i} \right\} \\ \sin(\theta_2 + \phi_{1i}) \dots \dots \dots (27)$$

$$b_7 = m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 + \dot{w}_{1i})(\dot{\theta}_2 + \dot{\phi}_{1i}) \sin(\theta_2 + \phi_{1i}) \dots \dots \dots (28)$$

ただし、式(15)～(27)中の質量マトリックス $\mathbf{M}_{1i}$ 、質量ベクトル $\mathbf{M}_{2i}$ 、 $\bar{\mathbf{M}}_{3i}$ ならびに剛性マトリックス $\mathbf{K}_{1i}$ 等の諸記号は、次のように定義されている。

$$\mathbf{M}_{1i} = \frac{\rho_1 A_1 l_{e1}}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_{e1} & 54 & -13l_{e1} \\ & 4l_{e1}^2 & 13l_{e1} & -3l_{e1}^2 \\ \text{sym.} & & 156 & -22l_{e1} \\ & & & 4l_{e1}^2 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{1i} = \frac{E_1 I_1}{l_{e1}^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_{e1} & -12 & 6l_{e1} \\ & 4l_{e1}^2 & -6l_{e1} & 2l_{e1}^2 \\ \text{sym.} & & 12 & -6l_{e1} \\ & & & 4l_{e1}^2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (29)$$

$$\mathbf{M}_{2i} = \frac{\rho_1 A_1 l_{e1}^2}{420} \begin{bmatrix} 210R_{1,j} + 63 \\ (35R_{1,i} + 14)l_{e1} \\ 210R_{1,i} + 147 \\ (-35R_{1,i} - 21)l_{e1} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{M}}_{3i} = \frac{\rho_2 A_2 l_{e2}}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ l_{e2} \\ 6 \\ -l_{e2} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (30)$$

$$J_1 = J_{01} + N_1^2 J_{m1} + J_{02} + J_{m2}, J_2 = J_{02} + N_2^2 J_{m2}, J_{12} = J_{02} + N_2 J_{m2}, J_{13} = J_{02} + J_{m2}, R_{1,i} = r_{1,i}/l_{e1} \dots \dots \dots (31)$$

ここに、 $r_{1,i}$ は第 1 リンクの要素 i の r_1 座標の値である。なお、式(15)～(27)中の $\bar{\mathbf{M}}_{1i}$ 、 $\bar{\mathbf{M}}_{2i}$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_{1i}$ は、 $\mathbf{M}_{1i}$ 、 $\mathbf{M}_{2i}$ 、 $\mathbf{K}_{1i}$ において ρ_1 、 A_1 、 l_{e1} 、 $R_{1,i}$ を ρ_2 、 A_2 、 l_{e2} 、 $R_{2,i}(=r_{2,i}/l_{e2})$ に置き換えたものを示している。ただし、 $r_{2,i}$ は第 2 リンクの要素 i の左端の r_2 座標の値である。

3. 力学・制御連成系の状態方程式

図 2 のような電流フィードバックを適用したサーボ位置制御系においては、モータのインダクタンスによる時定数 T_{ei} を実用上無視し得ることができるので、直流サーボモータのトルク定数を G_i と置くと、トルク T_{mi} は次式のように書くことができる。

$$T_{mi} = \frac{1}{N_i} \{ K_{fi} (\theta_{ci} - \theta_i) - C_{fi} \dot{\theta}_i \}, i=1, 2 \quad \dots (32)$$

ここに

$$K_{fi} = \frac{G_i F_{ki} N_i^2}{R_{mi} + F_{ui}}, C_{fi} = \frac{G_i N_i^2 (F_{ci} + F_{mi})}{R_{mi} + F_{ui}} \quad \dots (33)$$

であり, u_i はモータの電流, θ_{ci} は関節部回転角の指

令値, R_{mi} はモータの電機子の抵抗, F_{ki} , F_{ci} は回転角ならびに回転速度のフィードバック係数, F_{ui} は電流フィードバック係数, F_{mi} はモータの逆起電力係数, K_{fi} はサーボ剛性, C_{fi} はサーボ減衰をそれぞれ示している。

式(14)を加速度項とそれ以外の項に分離し, 式(32)

図 5 台形状速度曲線の立ち上がり早く, アームの曲げ剛性が小さい場合の力学・制御連成系の動的応答 ($t_{f1}=0.1$ s, $t_{f2}=0.566$ s, $I_i=3.8 \times 10^{-8}$ m⁴, $i=1, 2$)

を考慮すると、次式が得られる。

$$f_0 = \delta \bar{y}^T \bar{M} \ddot{\bar{y}} - \delta \bar{y}^T \bar{B} = 0 \quad (34)$$

ここに

$$\begin{aligned} \delta \bar{y}^T \bar{M} \ddot{\bar{y}} = & \sum_{i=1}^n \delta \phi_{1i}^T f_{1i} + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \delta \phi_{2i}^T f_{2i} + f_3 \delta \theta_1 \\ & + f_4 \delta \theta_2 + f_5 \delta w_{1i} + f_6 \delta \phi_{1i} + f_7 \delta w_{2i} \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \bar{y}^T \bar{B} = & \sum_{i=1}^n \delta \phi_{1i}^T b_{1i} + \sum_{i=1}^{\bar{n}} \delta \phi_{2i}^T b_{2i} + b_3 \delta \theta_1 \\ & + b_4 \delta \theta_2 + b_5 \delta w_{1i} + b_6 \delta \phi_{1i} + b_7 \delta w_{2i} \quad (36) \end{aligned}$$

$$\bar{y} = \{w_{1,1}, \phi_{1,1}, \dots, w_{1,n+1}, \phi_{1,n+1}, w_{2,1}, \phi_{2,1}, \dots, w_{2,\bar{n}+1}, \phi_{2,\bar{n}+1}, \theta_1, \theta_2\}^T \quad (37)$$

一方、図 1 のフレキシブルアームの境界条件は、

$$w_{1,1} = \phi_{1,1} = w_{2,1} = \phi_{2,1} = 0 \quad (38)$$

のように表すことができる。式(38)の境界条件を式

(34)に代入すると、次式が得られる。

$$\delta y^T M \ddot{y} - \delta y^T B = 0 \quad (39)$$

ここに

$$y = \{w_{1,2}, \phi_{1,2}, \dots, \phi_{1,n+1}, w_{2,2}, \phi_{2,2}, \dots, w_{2,\bar{n}+1}, \phi_{2,\bar{n}+1}, \theta_1, \theta_2\}^T \quad (40)$$

であり、 M, B は、境界条件式(38)に対応する行と列を削除した場合の $\bar{M}, \bar{B}$ を表している。式(39)より、図 1 の水平 2 関節形フレキシブルロボットアーム位置制御系の力学・制御連成系の状態方程式は

$$M \ddot{y} = B \quad (41)$$

なお、質量マトリックス M は、式(15)～(21)より、次のように書くことができる。

$$M = M_0 + M_c \cos(\theta_2 + \phi_{1i}) \quad (42)$$

図 6 台形状速度曲線の立ち上がりが早く、アームの曲げ剛性が大きい場合の力学・制御連成系の動的応答 ($t_{1i}=0.1$ s, $t_{2i}=0.566$ s, $I_i=10.9 \times 10^{-8}$ m⁴, $i=1, 2$)

図 7 台形状速度曲線の立ち上がりが早く、アームを剛体とみなした場合の力学・制御連成系の動的応答 ($t_{1i}=0.1$ s, $t_{2i}=0.566$ s, $i=1, 2$)

4. アームを剛体とみなした場合の 力学・制御連成系の状態方程式

図 1 のフレキシブルアームの曲げ変位を

$$\phi_{1i} = \phi_{2i} = 0, w_{1i} = \phi_{1i} = w_{2i} = 0 \quad \dots\dots\dots (43)$$

のように零と置き、これを式(41)に代入すると、アームを剛体とみなした場合の力学・制御連成系の状態方程式が、次式のように得られる。

$$M^* \ddot{y}^* = B^* \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここに

$$y^* = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, B^* = \begin{Bmatrix} B_1^* \\ B_2^* \end{Bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_{11}^* & M_{12}^* \\ M_{21}^* & M_{22}^* \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (45)$$

式(45)中の記号は、次のように定義されている。

$$M_{11}^* = J_1 + \{m_1 l_1^2 + (\rho_1 A_1 l_1^3)/3\} + (m_2 l_1^2 + \rho_2 A_2 l_1^2 l_2) + \{m_2 l_2^2 + (\rho_2 A_2 l_2^3)/3\} + (2m_2 l_1 l_2 + \rho_2 A_2 l_1 l_2^2) \cos \theta_2 \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$M_{12}^* = M_{21}^* = J_{12} + \{m_2 l_2^2 + (\rho_2 A_2 l_2^3)/3\} + \{m_2 l_1 l_2 + (\rho_2 A_2 l_1 l_2^2)/2\} \cos \theta_2 \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$M_{22}^* = J_2 + \{m_2 l_2^2 + (\rho_2 A_2 l_2^3)/3\} \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$B_1^* = K_{f1}(\theta_{c1} - \theta_1) - (C_{01} + C_{f1})\dot{\theta}_1 + \{m_2 l_1 l_2 + (\rho_2 A_2 l_1 l_2^2)/2\}(2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \sin \theta_2 \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$B_2^* = K_{f2}(\theta_{c2} - \theta_2) - (C_{02} + C_{f2})\dot{\theta}_2 - \{m_2 l_1 l_2 + (\rho_2 A_2 l_1 l_2^2)/2\}\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \quad \dots\dots\dots (50)$$

5. 数値シミュレーション結果と考察

有限要素法を用いた動的現象の数値計算においては、時間のきざみ幅の大小に起因する不安定現象を避けるために、しばしば Wilson の θ 法が用いられている⁽¹²⁾。本研究では、この Wilson の θ 法を適用し、 $\theta = 1.4$, $\Delta t = 10^{-4}$ s として数値計算を行っている。数値シミュレーションに用いたフレキシブルアームは、鋼材を想定しており、その諸元は、 $E_1 = E_2 = 200$ GPa, $\rho_1 = \rho_2 = 7700$ kg/m³ のとおりである。また、リンクの横断面は中空円形断面とし、断面積は一定値 $A_1 = A_2 = 6.49 \times 10^{-4}$ m² で、内外径比は 0.25 および 0.75 としてあり、この場合の断面 2 次モーメントは、それぞれ $I_1 = I_2 = 3.8 \times 10^{-8}$ m⁴ ならびに $I_1 = I_2 = 10.9 \times 10^{-8}$ m⁴ となる。上記以外の系の諸元は、 $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 2$ kg, $J_1 = 14.11$ kg·m², $J_2 = 2.76$ kg·m², $J_{12} = 0.065$ kg·m², $J_{13} = 0.0111$ kg·m², $K_{f1} = 3 \times 10^4$ N·m, $K_{f2} = 1.4 \times 10^4$ N·m, $C_{f1} + C_{01} = 500$ N·m·s, $C_{f2} + C_{02} = 233$ N·m·s のとおりである。図 5, 6 は、台形状速度曲線の立ち上がり早い場合のフレキシブルアーム位置制御系の動的応答の数値シミュレーション結果を示したものであり、図 7 は、アームを剛体とみなしたときの結果で

図 8 台形状速度曲線の立ち上がりが遅く、アームの曲げ剛性が大きい場合のフレキシブルアーム系の動的応答と、アームを剛体とみなした場合の動的応答との比較 ($t_{1i} = 1/3$ s, $t_{2i} = 1/3$ s, $i = 1, 2$)

ある。これらの図から、アームの曲げ剛性が小さい場合には、アームの曲げ振動に起因する速度むらや残留振動の影響が、回転角 θ_1 、回転速度 $\dot{\theta}_1$ 、アーム先端の座標 x_H, y_H ならびに直流サーボモータの電流すなわちトルクにおいて顕著に見受けられる。また、一定時間間隔毎に描いたアームの軌跡図ならびに曲げ変位 w_{1i}, w_{2i} からは、第1リンクにおける曲げ変位のほうがかなり大きいことや、アームが速度むらを伴い運動している様子等が、視覚的に理解できる。さらに、曲げ剛性を大きくした場合のリンクの断面2次モーメント I_i に対して、経路制御に従い運動しているアームの速度むらや残留振動がどの程度緩和されたかが、定量的に示されている。なお、リンクの曲げ剛性を大きくするほど、フレキシブルアーム系の動的応答とアームを剛体とみなした場合の応答との差異は、小さくなる傾向にあることがわかる。また、速度曲線の立ち上がりが遅く、アームの剛性が大きい場合の結果を示した図8においては、フレキシブルアーム系の残留振動のほうが、アームを剛体とみなした場合のそれよりもわずかに大きい。両者の形状の差は極めて小さい。したがって、図8のようなアームの諸元は、経路制御に基づく運動パターンに対応する軽量化設計の一つの目安を与えることになる。

6. 結 言

本研究は、水平2関節形フレキシブルロボットアームに対する有限要素定式化の一手法を提案するとともに、台形状の速度曲線に基づく経路制御を用いた場合

の系の動的応答の数値シミュレーション結果について述べたものである。得られた結果を要約すると

(1) アームの運動エネルギーを、Bernoulli-Eulerのはり理論に沿って簡潔に記述するとともに、有限要素法と変分原理を適用し、力学系の運動方程式を導いた。ここで導いた解析式は、既報のものよりかなり簡略化されており、数値計算上有利と思われる。

(2) 力学・制御連成系の状態方程式にWilsonの θ 法を適用することにより、系の動的応答の数値シミュレーションを行い、経路制御に従い運動しているフレキシブルアームの速度むらや残留振動の値が、リンクの曲げ剛性や台形状速度曲線の形状に応じて変化する様子的一端を、定量的に明らかにした。

文 献

- (1) Book, W. J., ほか2名, *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Control*, **97**-4(1975), 424.
- (2) 福田, 機論, **51**-468, C(昭60), 2140.
- (3) 坂和・松野, 計測と制御, **25**-1(昭61), 64.
- (4) 遠山, 精密工学会誌, **53**-8(昭62), 1177.
- (5) Tompson, B. S. and Sung, C. K., *Trans. ASME, J. Mech. Transm. Auto. Des.*, **106**-2(1984), 183.
- (6) Usoro, P. B., ほか2名, *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Control*, **108**-3(1986), 198.
- (7) 小島・ほか3名, 計測自動制御学会論文集, **23**-12(昭62), 1283.
- (8) 小島, 機論, **54**-499, C(昭63), 529.
- (9) 小島・ほか3名, 精密工学会誌, **54**-4(昭63), 737.
- (10) 例えば, 秋山・大輪, ロボットの設計と製作, (昭61), 49.
- (11) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (前沢・吉峯共訳), 材料力学本論, (昭50), 183, コロナ社.
- (12) 戸川, 有限要素法による振動解析, (昭50), 44, サイエンス社.