スター形遊星歯車装置の荷重等配*

(分担荷重の計算法と測定法)

矢 鍋 重 夫^{*1}, 永 山 義 勝^{*2}
岡 田 彰^{*3}, 山 岸 信 雄^{*3}

Share Loads in a Star Type Epicyclic Gear Train

(New Calculation and Measurement Method)

Shigeo YANABE, Yoshikatsu NAGAYAMA,
Akira OKADA, and Nobuo YAMAGISHI

New methods for both calculation and measurement of share loads in a star-type epicyclic gear train are proposed. The gear system is modelled as pulleys and connecting springs, and a new set of equations concerning transmission forces between engaging teeth and gear rotational angles is derived, considering the equilibrium of forces and moments. The equations are theoretically solved for some simple cases, and influences of gear position errors and various spring stiffnesses on the share loads are investigated. Further more, a new method for measuring both magnitude and position of a load acting on a planet shaft is proposed. Here, two strain gauges are used to detect bending strains at two different axial positions in a plane of the planet shaft.

Key Words: Machine Element, Gear, Epicyclic Gear Train, Share Load, Position Error, Shaft Stiffness, Mating Gear Stiffness

1. 緒 論

遊星歯車装置の荷重等配について、これまで等配機構の開発、分担荷重の計算および測定などに関する多くの研究がなされてきており、これらの経緯は文献(1)に詳しい。

分担荷重の計算法に関しては、位置誤差などをもつ歯車間の接触条件に着目するものと力の釣合いに着目するものがある。前者については、林ら⁽²⁾が、等価歯車面誤差をもつ歯車系の接触条件から、荷重分担率を計算する一般的な方法を提案しているが、多くの因子を考慮しているため計算が複雑であり、個々の因子の影響、例えば、位置誤差の存在箇所や各種ばね定数の変化が分担荷重に及ぼす影響などは論じていない。後者については、Seager⁽³⁾による遊星歯車の数が荷重等配に及ぼす影響を論じた研究があるが、方程式中に不明な点があり、明確な基礎式の導出が急務である。これは、本方程式に慣性力を加えれば振動特性の解析が可能になるためである。

分担荷重の測定に関してはこれまで有効な方法が見いだされていなかったが、最近、林⁽⁴⁾は遊星歯車軸のせん断ひずみを測定して作用荷重の大きさを求める方法を提案した。しかし、この方法では荷重の作用位置を求めるのは困難である。

以上の考察より本研究では、遊星歯車を弾性的に支持する方式のスター形遊星歯車装置について、まず、装置の各種ばね定数および位置誤差を考慮した力学モデルを定め、力とモーメントの釣合いに着目して、入力トルク、ギヤかみあい点における伝達力(遊星軸の分担荷重に比例)および変位に関する基礎方程式を導いた。さらに、各種ばね定数および位置誤差が単純な条件で与えられる場合について、トルクによるかみあい伝達力の変化過程を示して、これら因子の影響を明瞭にしている。次に、2枚のひずみゲージを用いて遊星軸に加わる荷重の作用位置および大きさを同時に測定する方法を提案し、実験によりその有用性を確認したので、以下に報告する。

2. 理 論 解 析

2.1 力学モデル 本研究で扱うスター形遊星歯車装置の概略を図1に、その力学モデルを側面および正面からみた模式図を図2, 3にそれぞれ示す。解析に

* 平成元年3月10日 東海支部第38期総会講演会において講演、原稿受付 昭和63年8月24日。

^{*1} 正員、長岡技術科学大学(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)。

^{*2} 長岡技術科学大学大学院。

^{*3} 新潟コンバータ(株)(〒151 東京都渋谷区千駄ヶ谷5-27-9)。

あたり以下の仮定をおく。

(1) 装置を、各歯車の基礎円直径をもつ円板とこれらを結合するかみあいばねでモデル化する。

(2) 遊星軸および太陽軸の曲げ剛性を考慮する。

(3) 歯車中心の位置誤差および変位によるかみあい線方向の変化は無視する。

(4) 歯形誤差、ピッチ誤差、かみあい歯対のばね定数の変化など、装置運転中の軸平均荷重に影響しない因子は無視する。

(5) バックラッシュの影響は考えない。

本解析で用いる主な記号を列記する。サフィックス s, p, i は太陽、遊星、内歯車に関する量を、サフィックス j は j 番目の遊星に関する量をそれぞれ表す。

$(x, y), (\varepsilon_x, \varepsilon_y)$: 太陽歯車の変位と位置誤差

$(\varepsilon_j, \eta_j), (\varepsilon_{\xi j}, \varepsilon_{\eta j})$: 遊星歯車の変位と位置誤差

$\theta_s, \theta_{pj}, \theta_i$: 太陽、遊星、内歯車の回転角

r_s, r_{pj}, r_i : 太陽、遊星、内歯車の基礎円半径

k_s, k_{pj} : 太陽、遊星歯車軸のばね定数

k_{spj}, k_{ipj} : かみあい歯対の平均ばね定数

K_j : かみあい等価ばね定数〔式(6)〕

α : かみあい圧力角 ($=20^\circ$)

α_j^* : 太陽から遊星へ向かうかみあい線が y 軸となす角〔式(7)〕

ν : 荷重不等配率〔式(12)〕

2.2 基礎方程式 内歯車の中心を座標原点とし、静止座標系 $O-xy$ および $O-\xi_j\eta_j$ ($j=1-3$) を図3のように定める。ここで、太陽軸の回転を固定し内歯車にトルク T_i を加えて各歯車を矢印の方向(正方向)に回転させる場合を考える。各歯車の回転、変位、位置誤差によるかみあいばね縮み量に着目すれば、内歯車および太陽歯車から遊星歯車1に作用するかみあい伝達力は次のように書ける。

$$\begin{aligned} f_{ip1} &= k_{ip1} \{ r_i \theta_i - r_{p1} \theta_{p1} + (\xi_1 + \varepsilon_{\xi 1}) \sin \alpha \\ &\quad - (\eta_1 + \varepsilon_{\eta 1}) \cos \alpha \} \\ f_{sp1} &= k_{sp1} \{ r_{p1} \theta_{p1} - r_s \theta_s - (\xi_1 + \varepsilon_{\xi 1}) \sin \alpha \\ &\quad - (\eta_1 + \varepsilon_{\eta 1}) \cos \alpha + (x + \varepsilon_x) \sin \alpha \\ &\quad + (y + \varepsilon_y) \cos \alpha \} \end{aligned} \quad (1)$$

また、遊星歯車1のモーメントの釣り合いより、

$$f_{ip1} = f_{sp1} (=F_1) \quad (2)$$

式(1)、(2)より $r_{p1} \theta_{p1}$ を消去すると、

$$\begin{aligned} F_1 &= K_1 \{ r_i \theta_i - r_s \theta_s - 2(\eta_1 + \varepsilon_{\eta 1}) \cos \alpha \\ &\quad + (x + \varepsilon_x) \sin \alpha + (y + \varepsilon_y) \cos \alpha \} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、

$$k_1 = k_{sp1} k_{ip1} / (k_{sp1} + k_{ip1}) \quad (4)$$

式(3)より、遊星歯車の半径方向の位置誤差 $\varepsilon_{\xi 1}$ および変位 ξ_1 は、かみあい伝達力 F_1 に影響しないことが

わかる。これは、こうした変位や位置誤差によるかみあいばねの伸縮が遊星歯車の回転で完全に打ち消せるためである。式(3)、(4)を他の遊星歯車にも適用できるように拡張すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} F_j &= K_j \{ r_i \theta_i - r_s \theta_s - 2(\eta_j + \varepsilon_{\eta j}) \cos \alpha \\ &\quad - (x + \varepsilon_x) \sin \alpha_j^* + (y + \varepsilon_y) \cos \alpha_j^* \} \end{aligned} \quad (5)$$

図1 スター形遊星歯車装置概略図

図2 力学モデル(側面よりみた図)

図3 力学モデル(正面よりみた図)

ここで,

$$K_j = k_{spj} k_{ipj} / (p_{spj} + k_{ipj}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\alpha_j^* = \begin{cases} -\alpha & j=1 \\ 120^\circ - \alpha & j=2 \\ -120^\circ - \alpha & j=3 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(5)でかみあい伝達力が $F_j < 0$ となる場合, 歯面が分離したことになるので, $F_j = 0$ とおく.

j 番めの遊星歯車に作用する荷重の合力 P_j は, η_j 方向 (周方向) 成分だけになり

$$P_j = 2F_j \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (8)$$

したがって, 遊星歯車中心の周方向の変位は

$$\eta_j = p_j / k_{pj} = 2F_j \cos \alpha / k_{pj} \quad \dots\dots\dots (9)$$

一方, 太陽歯車中心の変位は

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^3 F_j \sin \alpha_j^* / k_s \\ y &= -\sum_{j=1}^3 F_j \cos \alpha_j^* / k_s \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

入力トルク T_i は

$$T_i = r_i \sum_{j=1}^3 F_j \quad \dots\dots\dots (11)$$

本論文では, 荷重不等配率 ν を次式で定義する.

$$\nu = ([F]_{\max} - \bar{F}) / \bar{F} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで, $[F]_{\max}$: $F_j (j=1-3)$ の最大値

$\bar{F}$: $F_j (j=1-3)$ の平均値

ν が小さいほど, 分担荷重が等配に近いことを意味する. 式(9), (10)を式(5)に代入して若干の計算を行うと, F_j に関して次式が得られる. ただし, 太陽歯車の回転を固定 ($r_s \theta_s = 0$) している.

$$\begin{bmatrix} C_1 & b & b \\ b & C_2 & b \\ b & b & C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_i \theta_i + E_1 \\ r_i \theta_i + E_2 \\ r_i \theta_i + E_3 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで,

$$\begin{aligned} C_j &= (1/k_j) + (4 \cos^2 \alpha / k_{pj}) + (1/k_s), \\ b &= -1/(2k_s) \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$E_j = -2\varepsilon_{\eta j} \cos \alpha - \varepsilon_x \sin \alpha_j^* + \varepsilon_y \cos \alpha_j^* \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(13)~(15)は, 系のばね定数および位置誤差が与えられれば, C_j, b, E_j が計算でき, 内歯車の回転 $r_i \theta_i$ (T_i に対応) に対する F_j の変化が求まることを示している. 各遊星の分担荷重 P_j および変位 η_j は式(8), (9)より, 入力トルク T_i は式(12)よりそれぞれ計算できる.

3. 単純な場合の理論解析結果

等価かみあいばね定数 K_j および遊星軸のばね定数 k_{pj} が均一な次のような場合について考える.

$$k_j = k, \quad k_{pj} = k_p \quad \text{for } j=1-3 \quad \dots\dots\dots (16)$$

このとき式(14)より $C_j = C$ となり, 式(13)を解くと次式が得られる.

$$F_j = \beta \left\{ r_i \theta_i + \left(nE_j + \sum_{j=1}^3 E_j / 3 \right) / (1+n) \right\} \quad (j=1-3) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで,

$$\begin{aligned} 1/\beta &= (1/K) + (4 \cos^2 \alpha / k_p), \\ n &= 2k_s / (3\beta) \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

式(17), (18)より次のことがわかる. かみあい伝達力 F_j は内歯車の回転角相当量 $r_i \theta_i$ に比例して増加し, その比例定数 β は太陽軸のばね定数 k_s によらず, 遊星軸およびかみあいばね定数がこわいほど大きくなる. 式(17)で $n = \infty, n = 0$ とおけば, 太陽軸が剛な場合および極めてたわみやすい場合の解析ができる. また, 式(16)が成立しない場合でも, 太陽軸が剛であれば式(13), (14)で $b = 0$ となり, 次のように F_j が簡単に求まる.

$$F_j = (r_i \theta_i + E_j) / C_j \quad (j=1-3) \quad \dots\dots\dots (17)'$$

以下では, まず遊星軸の弾性のみを考慮した ($k_s = \infty$ かつ $K_j = \infty$) の場合について, 各種の位置誤差がかみあい伝達力に及ぼす影響を検討する.

3.1 遊星歯車 1 に位置誤差がある場合 この場合の位置誤差を $\varepsilon_{\eta 1} = \mp \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 > 0$) とおくと, 式(15)より $E_1 = \pm 1.88 \varepsilon_0, E_2 = E_3 = 0$ となり, 式(17)は次のように書ける.

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 0.283 k_p (r_i \theta_i \pm 1.88 \varepsilon_0) \\ F_2 &= F_3 = 0.283 k_p r_i \theta_i \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$\varepsilon_{\eta 1} = -\varepsilon_0, +\varepsilon_0$ とした場合の式(18), (9)の結果を図 4 (a), (b) にそれぞれ示す. 図 4 の横軸は入力トルク T_i 相当量である $\sum F_j$ を基本量としてとり, 内歯車の回転角相当量である $r_i \theta_i$ も参考として示した. 図 4 (a) では, 式(19)の+符号の式より, $r_i \theta_i = 0$ で $F_1 = 0.532 k_p \cdot \varepsilon_0 (= F_0), F_2 = F_3 = 0$ となり, 図 5 (a) に示すように遊星歯車 1 は自身の位置誤差 $-\varepsilon_0$ のため初期かみあい伝達力 F_0 を有することになる. $F_j (j=1-3)$ は $r_i \theta_i$ に比例して増加するが, $F_2 = F_3, F_1 = F_2 + F_0$ の関係を常に保つ. したがって, この場合の荷重不等配率は式(12)より,

$$\nu = (F_1 / \bar{F}) - 1 = 2F_0 / (3\bar{F}) = 1.06 k_p \varepsilon_0 / \sum F_j \quad \dots\dots\dots (20)$$

となり, トルクの増加 ($\sum F_j$ の増大) とともに $\nu = 0$ にちかづき, 等配率がよくなることがわかる.

図 4 (b) では式(19)の-符号の式より, $r_i \theta_i = 0$ で $F_1 = -F_0 < 0$ となり, 図 5 (b) に示すように遊星歯車 1 は自身の位置誤差 $+\varepsilon_0$ で歯面分離を生ずる. $r_i \theta_i$ の増加とともに伝達力 F_2, F_3 およびたわみ η_2, η_3 は増加

し、 $r_i\theta_i=1.88\varepsilon_0$ ($F_2=F_3=F_0$, $\eta_2=\eta_3=\varepsilon_0$) となったとき、遊星 1 が荷重を分担するようになる。これ以降の不等配率は

$$\nu=F_0/(3\bar{F})=0.532k_p\varepsilon_0/\sum F_j \quad \cdots\cdots(21)$$

となり、前の場合より荷重等配がよくなっている。

以上より、遊星歯車の位置誤差の方向によって、各遊星のかみあい伝達力（したがって分担荷重）が顕著に変化することがわかる。

3.2 太陽歯車に位置誤差がある場合 太陽歯車に x 方向の位置誤差だけがあるとし、これを $\varepsilon_x(>0)$ とすれば、式(15)より $E_1=0.342\varepsilon_x$, $E_2=-0.985\varepsilon_x$, $E_3=0.643\varepsilon_x$ となり、式(17)は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 0.283k_p(r_i\theta_i + 0.342\varepsilon_x) \\ F_2 &= 0.283k_p(r_i\theta_i - 0.985\varepsilon_x) \\ F_3 &= 0.283k_p(r_i\theta_i + 0.643\varepsilon_x) \end{aligned} \right\} \quad \cdots\cdots(22)$$

この場合の計算結果を図 6 に示す。 $r_i\theta_i < 0.985\varepsilon_x$ の範囲では遊星歯車 2 は歯面分離の状態にあり $F_2=0$ である。三つの遊星が荷重を分担する場合の不等配率は次のようになる。

$$\nu=(F_3/\bar{F})-1=0.546k_p\varepsilon_x/\sum F_j \quad \cdots\cdots(23)$$

3.1 節の場合(図 4)と比較すると、太陽歯車に位置誤差がある場合、三つの遊星の分担荷重は一般には異なる。これは太陽歯車の位置誤差の各かみあい線方向成

図 4 トルクによるかみあい伝達力と遊星軸変位の変化(遊星 1 に位置誤差がある場合)

図 5 遊星歯車の位置誤差 ε_0 によるかみあい状況の変化

分が図 7 に示すように異なるためである。

3.3 各種ばね定数の影響 ここでまず、太陽軸のばね定数 k_s の影響について述べる。図 4(a) の計算条件のうち、 $k_s=\infty$ を $k_s=2\text{ kN/mm}$ に変更した場合の結果を図 8 に示す。図 8 では、遊星軸 1 の位置誤差が太陽軸の変位 x, y を引きおこし、 $r_i\theta_i=0$ のとき他の遊星も荷重を分担する。また、 $\sum F_j=100\text{ N}$ に対する荷重不等配率は図 4(a) では $\nu=0.53$ 、図 8 では $\nu=0.26$ となり、太陽軸の曲げのばね定数の低下は荷重等配により影響を及ぼすことがわかる。

次に、図 4(a) の計算条件のうち、遊星軸 2 のばね定数を $k_{p2}=50\text{ kN/mm}$ と他よりも 10 倍こわくした場合の結果を図 9 に示す。図 9 より、 $r_i\theta_i$ に対する F_2 の増加割合は F_1, F_3 の 10 倍になっていることがわかる。同様な結果が等価かみあいばね定数 K_j についても得られており、荷重等配の面からは k_{pj} や K_j は j によらずほぼ一定であることが望ましいといえる。

4. 分担荷重の測定法

4.1 測定法の概略 図 10 に本研究で用いた遊星

図 6 トルクによるかみあい伝達力と遊星軸変位の変化(太陽に位置誤差がある場合)

図 7 太陽歯車の位置誤差 ε_x によるかみあい状況の変化

歯車の弾性支持機構を示す。歯車軸は弾性ピンと剛性スリーブとからなり、スリーブの太線部分に針状ころ軸受を介して歯車が取付けられる。歯車に作用する荷重の大きさを P 、その作用位置を x とする。荷重作用面内の弾性ピン上の 2 箇所 (距離 l_1, l_2) にひずみゲージをはりつけ曲げひずみ量 ε_1 および ε_2 を測定する。弾性ピンの曲げ剛性を EI 、スリーブおよび各接合部は剛であるとすると、次式が得られる。

$$\varepsilon_n = pd|x - l_n| / (2EI) \quad n=1, 2 \dots \dots \dots (24)$$

荷重の作用点は歯車の歯幅範囲内にあること ($b_1 < x < b_2$) を考慮して、式 (24) より ε_n-x 線図を求めると図 11 の太線のようになる。式 (24) からわかるとおり、同時測定した二つのひずみ量の比 $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ は x のみの関数で、 P によらない。したがって、あらかじめある荷重に対して図 11 のような ε_n-x 線図を実験的に得ておけば、未知の荷重に対する二つのひずみ量を測り、そ

の比を図と対比して、まず荷重作用位置 x を定めることができる。荷重の大きさは x における既知の荷重とひずみの関係から比例計算で求めることができる。すなわち荷重の大きさと作用位置という 2 個の変数の関数であるひずみの測定からこれを定めるには、2 個のひずみを測定する必要があるわけで、従来はこれを 1 個のひずみ測定より得ようとしていたようである。

4.2 遊星軸荷重測定実験 4.1 節の荷重測定法の妥当性を検証するため、図 1 の装置から 2 個の遊星歯車を取り除いた系を用いて実験をおこなった。弾性ピンに 2 枚のひずみゲージをはり、細いワイヤを介して遊星歯車に 100 N の静荷重を加えたときのひずみ量を測定し、 ε_n-x 線図 (図 12) を得た。図 12 より、荷重位置のわずかな違いでひずみ量が顕著に変化することがわかる。

上記のように校正した遊星歯車軸 (1 本だけ) を図 1 の装置に組み込み、太陽軸の回転を固定して内歯車軸に静トルク $T_i = 0-20 \text{ N}\cdot\text{m}$ を加えた。このときの二つのひずみ量を測定し、図 12 を用いて 4.1 節の方法で遊星軸に作用する荷重の大きさと作用位置を求めた。得られた結果を図 13 に示す。

本実験の場合の入力トルク T_i と遊星軸 1 に作用する荷重 P_1 との関係は、 $F_2 = F_3 = 0$ なので式 (8), (11) より

$$T_i = r_i \sum_{j=1}^3 F_j = r_i F_1 = r_i P_1$$

$$/(2 \cos \alpha) = 0.0665 P_1 \text{ (N}\cdot\text{m)} \dots \dots \dots (25)$$

なお、 $r_i/\cos \alpha$ は内歯車のピッチ円半径 0.133 m であ

図 8 太陽軸のばね定数の影響

図 9 遊星軸のばね定数の影響

図 10 遊星歯車軸の構造

図 11 ひずみ-荷重作用位置線図 ($\varepsilon-x$ 線図)

図 12 ε - x 線図 (測定値)

る。上式の結果を図 13 に直線で示した。図 13 より遊星軸に作用する荷重の実測値は計算値とよく一致しており (最大 2.8 % のずれ), 本測定法の有用性が確認されたといえる。なお, 図 13 よりトルクが大きくなるにつれて, 荷重作用位置が歯幅中央に近づくのがわかる。

5. 結 論

スター形遊星歯車装置における遊星歯車軸の分担荷重 (かみあい伝達力に比例) の計算法および測定法について以下の結論を得た。

(1) 歯車のかみあいのばね定数, 歯車軸の曲げのばね定数および位置誤差を考慮して, 入力トルクに対するかみあい伝達力, 分担荷重および軸変位の変化を計算するための力学モデルを提示するとともに, 基礎方程式を導いた。いくつかの単純な場合について, 入力トルク増大にともなうかみあい伝達力および軸変位の変化過程を示した。

(2) 位置誤差の存在箇所およびその方向は各遊星のかみあい伝達力に極めて大きな影響を及ぼすが, 遊星歯車の装置半径方向への位置誤差成分はかみあい伝

図 13 遊星軸にかかる荷重の大きさと荷重作用位置 (測定値)

達力に全く影響しない。

(3) かみあい伝達力 (分担荷重に比例) は入力トルクとともに増加し, その比例係数は各種のばね定数がこわいほど大きい。ただし, かみあいばね定数および歯車軸のばね定数が三つの遊星で等しい場合, 太陽軸のばね定数は比例定数に影響しない。

(4) 荷重等配の面からは, 各種のばね定数は三つの遊星で均一で, その値は小さいほうが望ましい。

(5) 2 枚のひずみゲージを用いて遊星軸に作用する荷重の大きさと作用位置を同時に測定する方法を提案し, その有用性を実験によって確認した。

(6) 荷重作用位置のわずかな違いでひずみ量は顕著に変化する。伝達トルクの増加とともに荷重作用位置は歯幅中央へ移動する。

文 献

- (1) 仙波, 歯車, 10 (昭 42), 3993, 日刊工業新聞社.
- (2) 林・ほか 2 名, 機論, 36-288 (昭 45), 1394.
- (3) Seager, D. L., SAE paper, No. 700178.
- (4) 林・ほか 4 名, 機論, 51-471, C (昭 60), 2910.