ねじれた変厚片持板の自由振動*

築地 恒夫^{*1}, 池田 昌則, 金子 孝之^{*2}

Free Vibrations of Twisted and Tapered Cantilever Plates

Tsuneo TSUIJI, Masanori IKEDA, and Takayuki KANEKO

A numerical method, based on the Rayleigh-Ritz approach, for the analysis of the free vibration behavior of twisted and tapered cantilever plates is presented in this paper, together with some numerical results. Displacement functions in the analysis are assumed by algebraic polynomials. Numerical results obtained are compared with those available in the literature and a good agreement is found between them. Nondimensional frequency parameters and modes of vibration are computed for typical twisted and tapered cantilever plates and the effects of pretwist angles and rates of variable thickness on them are discussed.

Key Words: Natural Frequency, Free Vibration, Couple Vibration, Twisted Cantilever Plate, Variable Thickness, Rayleigh-Ritz method

1. はじめに

ねじれた等厚片持板の自由振動は、翼長の短い軸流回転機翼の振動特性解明の基礎として重要であるため多くの研究がある⁽¹⁾。しかし、実際の翼は翼長方向に翼幅も翼厚も複雑に変化しており、したがって、幅および厚さが一定でないねじれた片持板の振動特性を解明する必要がある。そこで、先にねじれた台形板の自由振動⁽²⁾について報告したが、今回は、板の厚さが長さ方向に変化しているねじれた片持板の自由振動について報告する。ねじれた変厚片持板の振動は、有限要素法による Sreenivasamurthy ら⁽³⁾の解析結果が報告されている程度で、まだ系統だった研究はほとんど行われていない。

本報告では、まず、レイリー・リッツ法によるねじれた変厚片持板の自由振動解析法を示す。次に、既存の実験および解析結果と、ここで提案した解析法を用いて得られた結果を比較し、本法の有効性を明らかにする。最後に、代表的なねじれた変厚片持板の自由振動を解析して、振動特性に及ぼすねじれ角および変厚の

影響を検討する。

2. 解析法

ねじれた変厚片持板の座標軸を図1に示す。板は x 軸まわりに一定のねじれ率 k でねじれ、長さ a 、幅 b 、固定辺の板厚 t_0 、先端の板厚 t_1 である。

ねじれた板の自由振動に関する仮想仕事の原理は次のようである⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} & \iint_A \left[\sqrt{g} \left\{ \Omega_x \delta \Omega_x + \Omega_y \delta \Omega_y + \nu (\Omega_x \delta \Omega_y + \Omega_y \delta \Omega_x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1-\nu}{2} \Omega_{xy} \delta \Omega_{xy} \right\} \right. \\ & \quad \left. + D \sqrt{g} \left\{ \Gamma_x \delta \Gamma_x - \Phi_x \delta \Omega_x - \Omega_x \delta \Phi_x \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Gamma_y \delta \Gamma_y - \Phi_y \delta \Omega_y - \Omega_y \delta \Phi_y \right\} \right] \end{aligned}$$

図1 ねじれた変厚片持板

* 昭和63年7月15日 第30回構造強度に関する講演会において講演、原稿受付 昭和63年9月28日。

^{*1} 正員、長崎大学工学部 (〒852 長崎市文教町1-14)。

^{*2} 長崎大学大学院。

$$\begin{aligned}
& + \nu(\Gamma_x \delta \Gamma_y + \Gamma_y \delta \Gamma_x - \Phi_x \delta \Omega_y - \Omega_y \delta \Phi_x - \Phi_y \delta \Omega_x - \Omega_x \delta \Phi_y) + \frac{1-\nu}{2} \\
& \times (\Gamma_{xy} \delta \Gamma_{xy} - \Phi_{xy} \delta \Omega_{xy} - \Omega_{xy} \delta \Phi_{xy}) \Big] dx dy - \iint_A \gamma \omega^2 t \sqrt{g} (gu \delta u + v \delta v + w \delta w) dx dy = 0
\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $H=Et/(1-\nu^2)$, $D=Et^3/\{12(1-\nu^2)\}$, E はヤング率, t は板厚, ν はポアソン比, $g=1+k^2y^2$, γ は密度, ω は角振動数, u, v は板中央面内の点の x, y 方向変位, w は中央面に垂直方向の変位である。また、同式中の関数, $\Omega_x, \Omega_y, \dots, \Phi_{xy}$, はそれぞれ次式のように表される。

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} v, \quad \Omega_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Omega_{xy} = \sqrt{g} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2k}{g} w \\
\Gamma_x &= \frac{1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{k}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k^2 y}{g} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{k^2}{g^2} w, \\
\Gamma_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{k}{\sqrt{g}} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{k}{g\sqrt{g}} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k^2}{g^2} w \\
\Gamma_{xy} &= 2 \left(\frac{1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{2k^3 y}{g^2} v - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \Phi_x = \frac{k}{g} \left(\frac{k}{g} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\Phi_y &= \frac{k}{g} \left(\frac{k}{g} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{k^3 y}{g^2} v + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{k^2 y}{g\sqrt{g}} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \Phi_{xy} = \frac{k}{g} \left(\frac{1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{k^2 y}{g} \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、変位 u, v, w を固定辺での幾何学的境界条件を満たす、無次元化座標 $X=x/a, Y=y/a$ のべき級数で仮定する。

$$\begin{aligned}
U &= \frac{u}{a} = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=0}^{n_j} a_{ij} X^i Y^j = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=0}^{n_j} a_{ij} u_{ij}, \quad V = \frac{v}{a} = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=0}^{n_q} b_{pq} X^p Y^q = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=0}^{n_q} b_{pq} v_{pq} \\
W &= \frac{w}{a} = \sum_{r=2}^{n_r} \sum_{s=0}^{n_s} c_{rs} X^r Y^s = \sum_{r=2}^{n_r} \sum_{s=0}^{n_s} c_{rs} w_{rs} \quad \dots\dots\dots (3)
\end{aligned}$$

ただし、 a_{ij}, b_{pq}, c_{rs} は未知係数, $u_{ij} = X^i Y^j, v_{pq} = X^p Y^q, w_{rs} = X^r Y^s, i, p=1, \dots, 10, j, q=0, \dots, 9, r=2, \dots, 11, s=0, \dots, 9$, である。

仮定変位, 式(3), を無次元表示した仮想仕事の原理に代入すると、次の振動数方程式が導かれる。

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda^2 B_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12}^T & A_{22} - \lambda^2 B_{22} & A_{23} \\ A_{13}^T & A_{23}^T & A_{33} - \lambda^2 B_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、式中の λ は無次元振動数パラメータで次のように定義する。

$$\lambda^2 = \frac{\gamma a^4 t_0 \omega^2}{D_0} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $D_0 = Et^3/\{12(1-\nu^2)\}$ である。なお、式(4)のマトリックスの各要素は付録に示した式から計算されるが、同式中の二重積分は以下に示す近似式によって計算する。

式中の二重積分は一般に次のように表される。

$$\begin{aligned}
& \iint_{\bar{A}} F(X, Y) \frac{\partial^{m+n} e_{ij}}{\partial X^m \partial Y^n} \frac{\partial^{M+N} e_{IJ}}{\partial X^M \partial Y^N} dX dY = \iint_{\bar{A}} F(X, Y) \frac{\partial^m X^i}{\partial X^m} \frac{\partial^n Y^j}{\partial Y^n} \frac{\partial^M X^I}{\partial X^M} \frac{\partial^N Y^J}{\partial Y^N} dX dY \\
& = \frac{i!}{(i-m)!} \frac{j!}{(j-n)!} \frac{I!}{(I-M)!} \frac{J!}{(J-N)!} \iint_{\bar{A}} F(X, Y) X^{i+m-M} Y^{j+n-N} dX dY \quad \dots\dots\dots (6)
\end{aligned}$$

ここに、 $F(X, Y)$ は被積分関数のうち変位以外の部分を示し X, Y の関数, e_{ij} は変位 (u_{ij} など) を表す。

図2に示すように板を三角形に分割すると、式(6)の積分は、各分割三角形について積分し、その総和を求めればよい。さらに、 $F(X, Y)$ を三角形の図心 (X_r, Y_r) での値 $F_r(X_r, Y_r)$ で代表させると、式(6)の積分は

$$\iint_{\bar{A}} F(X, Y) X^p Y^q dX dY = \sum_{r=1}^{N_s} \iint_{\bar{A}_r} F(X, Y) X^p Y^q dX dY \approx \sum_{r=1}^{N_s} F_r(X_r, Y_r) \iint_{\bar{A}_r} X^p Y^q dX dY \quad \dots\dots\dots (7)$$

と表される。ここに、 $P=i+I-m-M, Q=j+J-n-N, N_s(2, \dots, 128)$ は分割三角形の総数で、積分は分割三角形について行う。

式(7)の積分を部分積分して、各分割三角形の周辺を一周する線積分に変形する。

図2 板の三角形分割(4分割)

$$\iint_{\bar{A}_r} X^p Y^q dX dY = \iint_{\bar{A}_r} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{X^{p+1}}{p+1} \right) Y^q dX dY = \oint_r \frac{l_r}{p+1} X^{p+1} Y^q ds \quad (8)$$

ここに、 l_r は r 番めの分割三角形 (r 三角形) の周辺に外向きの法線と X 軸とのなす角の余弦であり、 $\oint_r$ は r 三角形の周辺を一周する線積分を表す。式(8)の積分を図2に示す相隣る $r, r+1$ 三角形に適用すると、両三角形の共通辺 AB では積分方向が逆になることから、この辺に沿う積分は変位の線積分に両三角形に関係した関数 $F(X, Y)$ の差、 $F_r(X_r, Y_r) - F_{r+1}(X_{r+1}, Y_{r+1})$ を乗じた値になる。この関係を用いると、式(7)は各三角形の辺に沿う線積分の総和で、次のように表すことができる。

$$\iint_{\bar{A}} F(X, Y) X^p Y^q dX dY = \sum_{r=1}^{M_g} (F_r - F_{r+1}) \int_0^{L_r} \frac{l_r}{p+1} X^{p+1} Y^q d\bar{s} \quad (9)$$

ここに、 $M_g(5, \dots, 208)$ は辺の総数、 $\bar{s}$ は r 番めの辺 (r 辺) の点 A より同辺上の任意点 (X, Y) までの距離、 $L_r = l_r/a$ は同辺の無次元長さである。辺上の点の座標 (X, Y) は $\bar{s}$ の関数として、近似的に次のように表すことができる⁽²⁾。

$$X = X_{r1} - \frac{\bar{m}_r}{\sqrt{g_r}} \bar{s}, \quad Y = Y_{r1} + \bar{l}_r \bar{s} \quad (10)$$

ただし、 $\bar{l}_r, \bar{m}_r$ は r 辺の中間点 $[(X_{r1} + X_{r2})/2, (Y_{r1} + Y_{r2})/2]$ において同辺に外向の法線の方法余弦、 g_r は中間点での g の値である。

式(10)を式(9)に代入し、 l_r の代わりに $\bar{l}_r$ を用いると、式(9)は

$$\boxed{\text{式(9)}} = \sum_{r=1}^{M_g} \frac{(F_r - F_{r+1}) \bar{l}_r}{p+1} \int_0^{L_r} \left(X_{r1} - \frac{\bar{m}_r}{\sqrt{g_r}} \bar{s} \right)^{p+1} (Y_{r1} + \bar{l}_r \bar{s}) d\bar{s} \quad (11)$$

となり、この式は二項定理を用い $\bar{s}$ について展開し積分する。

式(11)を円い式(6)より振動数方程式の各要素が求まれば、ねじれた変厚片持板の無次元振動数パラメータおよび振動モードは、通常の固有値問題として計算される。

3. 解析結果

板厚は x 軸方向にのみ直線的に変化しているものとし、変厚の程度をパラメータ $\alpha = 1 - t_1/t_0$ で表す。また、 $\nu = 0.3$ とする。なお、板は X 軸に關し対称のため、曲げ振動とねじれ振動を別々に解析する。

3.1 分割数 板を三角形に分割する近似解析法を用いているため、分割数による無次元振動数パラメータ λ の収束状態を調べる必要がある。そこで、板の長さとお幅の比 $a/b = 1$ 、幅と最大厚さの比 $b/t_0 = 20$ 、板先端のねじれ角 $\theta = 60^\circ$ 、 $\alpha = 0.8$ の変厚板について、分割数を変えて λ を解析した。分割数は X, Y 軸上の分割点の数によって表す(図2)。また、変位 U, V, W は

それぞれ30項近似である⁽²⁾。表1に解析結果を示す。

十次までの λ は5分割でほぼ収束している。したがって、以後の解析では5分割による積分方法を用いることとする。

3.2 仮定変位の近似項数 3.1節のねじれた板について、 U, V, W をそれぞれ20, 25, 30項で近似して求めた λ を表2に示す。

変位 U, V, W とも25項で近似することにより十次までの λ はほぼ収束している。以後の解析においても、 U, V, W を25項で近似することとする。

3.3 既存の結果との比較 まず、 $b/a = 1, b/t_0 = 40, \alpha = 0.6$ のねじれない ($\theta = 0^\circ$) 変厚片持板の λ を解析し、既存の実験結果⁽⁵⁾と比較して表3に示す。また、図3は振動モードを比較したもので、破線が実験によって得られた節線、実線は解析による節線である。 λ および振動モードともほぼ一致している。

次に、 $b/a = 0.5, t_0/a = 0.12, \alpha = 0, 0.5, \theta = 0, 45^\circ$ のねじれた変厚片持板について、本解析法によって得られた λ を、Sreenivasamurthy らの解析結果⁽³⁾(図より読

取り)とともに表4に示す。表4において B は曲げ振動, T はねじれ振動を, 符号の前の数字は振動の次数を表す。1 T 振動で最大5%の差が生じているが, 両解析結果はほぼ一致している。

以上の2例題より, 本解析法はねじれた変厚片持板の振動解析に有効であることが確認された。

3.4 ねじれた変厚片持板の振動特性 $b/a=1$, $b/t_0=20$, $\alpha=0.2, 0.8$, $\theta=0\sim60^\circ$ の変厚片持板について振動解析を行い, 無次元振動数パラメータ λ のねじれ角度 θ による変化を表5および図4に, 振動モードを図5に示す。図4において実線は曲げ振動 B , 破線は

ねじれ振動 T を表す。

曲げ振動の λ - θ 曲線とねじれ振動の λ - θ 曲線は交差するが, 曲げ振動曲線どうしが交わることはない。一次の曲げ振動1 B の無次元振動数パラメータ λ は, 変厚の程度に関係なく板の初期ねじれ角 θ の増加とともにわずかに減少する。一方, ねじれ振動 T の λ は θ が増加するに従って大きくなるが, この傾向は低次振動(1 T , 2 T)で, しかも変厚の程度が大きい板($\alpha=0.8$)で顕著である。

図5はねじれ角 $\theta=0, 60^\circ$ の板の振動モードで, $W=0$ の位置(節線)を示す。変厚の程度が増すに従い, 節線の位置が板の先端方向に移動することがわかる。なお, $\theta=0^\circ$, $\alpha=0.2$ の板の振動は, X - Y 面内振動であるため, 節線は生じない。

4. む す び

ねじれた変厚片持板の自由振動解析を行った。まず, 仮想仕事の原理に基づくレイリー・リッツ法による, ねじれた変厚片持板の自由振動解析法を提案した。また, 提案した解析法による結果を, 既存の解析および

表1 分割数による λ の収束状況

No.	Divi. Mode			
		2	5	8
1	1B	4.361	3.975	3.966
2	2B	10.65	11.69	11.83
3	1T	22.42	22.31	22.36
4	3B	24.53	24.35	24.38
5	4B	30.80	29.37	29.79
6	2T	32.92	30.15	30.41
7	3T	38.22	39.12	39.13
8	5B	42.36	41.15	41.39
9	4T	48.94	47.40	47.49
10	6B	52.86	51.17	50.88

B: Bending mode, T: Torsional mode

表2 仮定変位の近似項数による λ の収束状況

No.	Terms Mode	20-20-20	25-25-25	30-30-30
1	1B	3.979	3.977	3.975
2	2B	11.70	11.69	11.69
3	1T	22.41	22.33	22.31
4	3B	24.50	24.37	24.35
5	4B	29.46	29.42	29.37
6	2T	30.31	30.20	30.15
7	3T	39.62	39.26	39.12
8	5B	42.00	41.43	41.15
9	4T	47.70	47.56	47.40
10	6B	53.87	51.79	51.17

表3 λ の既存の実験値との比較

No.	Mode	Hanawa (5)	Present method
1	1B	3.7	3.84
2	1T	6.9	7.24
3	2B	15.4	16.4
4	3B	17.0	18.4
5	2T	21.0	21.7
6	4B	33.0	36.0

図3 既存の実験による振動モードとの比較

表4 既存の解析値との比較

θ°	0				45			
	1.0		0.5		1.0		0.5	
	S.R. ⁽³⁾	Present method	S.R. ⁽³⁾	Present method	S.R. ⁽³⁾	Present method	S.R. ⁽³⁾	Present method
1B	3.43	3.443	3.74	3.700	3.35	3.421	3.64	3.683
2B	13.1	13.42	15.6	16.03	11.5	11.91	12.4	12.64
1T	15.0	14.81	13.3	13.19	15.6	15.13	14.6	14.00
3B	21.7	21.45	17.8	17.68	22.9	23.39	21.0	21.62
2T	49.4	48.21	35.8	35.27	48.5	48.16	36.6	36.27

表 5 ねじれた変厚片持板の λ

θ° Mode	0.2			0.8		
	0	30	60	0	30	60
1B	3.552	3.487	3.419	4.163	4.093	3.977
1T	8.094	14.55	22.17	6.907	15.46	22.33
2B	19.80	17.75	13.75	14.05	14.06	11.69
3B	24.26	24.78	26.52	15.60	18.96	24.35
2T	27.98	32.32	38.90	18.37	23.86	30.20
4B	45.90	46.35	42.92	29.07	33.63	29.42
5B	48.44	51.29	52.90	35.60	33.99	41.43
6B	55.60	57.29	65.72	45.91	48.30	51.18
3T	55.64	55.80	56.36	27.36	31.19	39.26
4T	63.70	64.16	64.20	38.92	42.28	47.56

(a) $\alpha=0.2$ (b) $\alpha=0.8$ 図 4 ねじれた変厚片持板の λ の変化 (a-1) $\theta=0^\circ$ (a-2) $\theta=60^\circ$ (b-1) $\theta=0^\circ$ (b-2) $\theta=60^\circ$ (a) $\alpha=0.2$ (b) $\alpha=0.8$

図 5 ねじれた変厚片持板の振動モード

実験結果と比較し、本解析法の有効性を確認した。次に、代表的なねじれた変厚片持板について、無次元振動数パラメータ、および振動モードを解析し、ねじれ

角、板の変厚の程度がこれらに及ぼす影響を明らかにした。特に、変厚の程度の大きい板のねじれ振動に対し、初期ねじれの影響が顕著であることがわかった。

付 録

振動数方程式、式(4)、のマトリックスの要素は次式より計算される。ただし、 $\bar{H}=H/D_0$ 、 $\bar{D}=D/D_0$ 、 $\bar{t}=t/t_0$ 、 $K=ka$ である。

A_{11} の要素：

$$A_{lm} = \iint_A \left[\left(\sqrt{g} \bar{H} - \frac{2\nu K^2}{g\sqrt{g}} \bar{D} \right) \frac{\partial u_{lj}}{\partial X} \frac{\partial u_{lj}}{\partial X} + \frac{1-\nu}{2} \left(g\sqrt{g} \bar{H} + \frac{4K^2}{\sqrt{g}} \bar{D} \right) \frac{\partial u_{lj}}{\partial Y} \frac{\partial u_{lj}}{\partial Y} \right] dXdY$$

$$(i, l=1, \dots, n_i, \quad j, J=0, \dots, n_j)$$

A_{12} の要素：

$$A_{lm} = \iint_A \left[\frac{K^2 Y}{\sqrt{g}} \bar{H} v_{pq} \frac{\partial u_{lj}}{\partial X} + \left(\nu \sqrt{g} \bar{H} - \frac{2K^2}{g\sqrt{g}} \bar{D} \right) \frac{\partial v_{pq}}{\partial Y} \frac{\partial u_{lj}}{\partial X} \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\sqrt{g} \bar{H} - \frac{4K^2}{g\sqrt{g}} \bar{D} \right) \frac{\partial v_{pq}}{\partial X} \frac{\partial u_{lj}}{\partial Y} \right] dXdY$$

$$(I=1, \dots, n_i, \quad J=0, \dots, n_j, \quad p=1, \dots, n_p, \quad q=0, \dots, n_q)$$

A_{13} の要素：

$$A_{lm} = \iint_A K \left[-(1-\nu) \bar{H} w_{rs} \frac{\partial u_{lj}}{\partial Y} - \bar{D} \left\{ \frac{3(1-\nu)}{2} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} \frac{\partial u_{lj}}{\partial Y} + K^2 Y \frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} \frac{\partial u_{lj}}{\partial Y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (1+\nu) \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial u_{lj}}{\partial X} - \frac{K^2 Y}{g} \frac{\partial w_{rs}}{\partial X} \frac{\partial u_{lj}}{\partial X} \right) - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} \frac{\partial u_{lj}}{\partial Y} \right\} \right] dXdY$$

$$(I=1, \dots, n_i, \quad J=0, \dots, n_j, \quad r=2, \dots, n_r, \quad s=0, \dots, n_s)$$

A_{22} の要素:

$$A_{lm} = \iint_A \left[\frac{K^4 Y^2}{g \sqrt{g}} \left\{ \bar{H} + 2(4-3\nu) \bar{D} \frac{K^2}{g^2} \right\} v_{pq} v_{pq} + \left(\sqrt{g} \bar{H} - \frac{2\nu K^2}{g \sqrt{g}} \bar{D} \right) \frac{\partial v_{pq}}{\partial Y} \frac{\partial v_{pq}}{\partial Y} \right. \\ \left. + \nu \frac{K^2 Y}{\sqrt{g}} \bar{H} \left(v_{pq} \frac{\partial v_{pq}}{\partial Y} + \frac{\partial v_{pq}}{\partial Y} v_{pq} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\bar{H} + \frac{4K^2}{g^2} \bar{D} \right) \frac{\partial v_{pq}}{\partial X} \frac{\partial v_{pq}}{\partial X} \right] dXdY \\ (p, P=1, \dots, n_p, \quad q, Q=0, \dots, n_q)$$

A_{23} の要素:

$$A_{lm} = \iint_A \frac{K}{g} \left[-(1-\nu) \bar{H} w_{rs} \frac{\partial v_{pq}}{\partial X} + \bar{D} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} \frac{\partial v_{pq}}{\partial X} + K^2 Y \frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} \frac{\partial v_{pq}}{\partial X} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - (5-3\nu) \frac{K^2 Y}{g} \left(\frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X \partial Y} v_{pq} - \frac{K^2 Y}{g} \frac{\partial w_{rs}}{\partial X} v_{pq} \right) - \frac{3(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} \frac{\partial v_{pq}}{\partial X} \right. \right. \\ \left. \left. - (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial v_{pq}}{\partial Y} - \frac{K^2 Y}{g} \frac{\partial w_{rs}}{\partial X} \frac{\partial v_{pq}}{\partial Y} \right) \right\} \right] dXdY \\ (r=2, \dots, n_r, \quad s=0, \dots, n_s, \quad P=1, \dots, n_p, \quad Q=0, \dots, n_q)$$

A_{33} の要素:

$$A_{lm} = \iint_A \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{2K^2}{g} \left\{ (1-\nu) \bar{H} + (1+\nu) \frac{K^2}{g^2} \bar{D} \right\} w_{rs} w_{rs} + \bar{D} \left\{ \frac{1}{g} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} + \frac{K^4 Y^2}{g} \frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} \frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{K^2 Y}{g} \left(\frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} \frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} \right) + \frac{2K^2}{g} \left(w_{rs} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} w_{rs} \right) + g \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2K^4 Y}{g^2} \left(w_{rs} \frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} + \frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} w_{rs} \right) + \frac{2K^2}{g^2} \left(w_{rs} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} w_{rs} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \nu \left(\frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X^2} \right) + \nu K^2 Y \left(\frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial Y^2} \frac{\partial w_{rs}}{\partial Y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X \partial Y} + \frac{K^4 Y^2}{g^2} \frac{\partial w_{rs}}{\partial X} \frac{\partial w_{rs}}{\partial X} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - 2(1-\nu) \frac{K^2 Y}{g} \left(\frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X \partial Y} \frac{\partial w_{rs}}{\partial X} + \frac{\partial w_{rs}}{\partial X} \frac{\partial^2 w_{rs}}{\partial X \partial Y} \right) \right\} \right] dXdY \\ (r, R=2, \dots, n_r, \quad s, S=0, \dots, n_s)$$

B_{11} の要素:

$$B_{lm} = \iint_A g \sqrt{g} \bar{t} u_{ij} u_{ij} dXdY \quad (i, I=1, \dots, n_i, \quad j, J=0, \dots, n_j)$$

B_{22} の要素:

$$B_{lm} = \iint_A \sqrt{g} \bar{t} v_{pq} v_{pq} dXdY \quad (p, P=1, \dots, n_p, \quad q, Q=0, \dots, n_q)$$

B_{33} の要素:

$$B_{lm} = \iint_A \sqrt{g} \bar{t} w_{rs} w_{rs} dXdY \quad (r, R=2, \dots, n_r, \quad s, S=0, \dots, n_s)$$

文 献

- (1) Leissa, A. W., *Appl. Mech. Rev.*, **34-5** (1981), 623.
- (2) 築地・山下, 機論, **54-502**, C (1988), 1159.
- (3) Sreenivasamurthy, S. and Ramamurti, V., *J. Sound Vib.*, **76-3** (1981), 331.
- (4) 築地・末岡, 機論, **52-484**, C (1986), 3042.
- (5) 堀・ほか3名, 航空宇宙技研報告, TR-60 (1964), 1.