多入力線形定常離散時間系のデッドビート原理*

近 藤 英 二^{*1}, 清 田 高 徳^{*1}
菊 池 直 晴^{*2}, 須 永 照 雄^{*1}The Deadbeat Principle for Multi-input Linear Time-invariant,
Discrete-time SystemsEiji KONDO, Takanori KIYOTA,
Naoharu KIKUCHI, and Teruo SUNAGA

This paper discusses the state deadbeat control problem for a multi-input linear time-invariant, discrete-time system. The deadbeat principle which is satisfied by general deadbeat inputs is obtained. The deadbeat inputs are not limited to a constant gain state feedback. The general deadbeat inputs are made up of three phases; inputs are arbitrary in the first phase, linear combinations of the special constant gain state feedback and arbitrary components in the second phase, and the special constant gain state feedback in the third phase. When the controllability indices of the system equal each other, the second phase does not exist.

Key Words: Control Theory, Discrete-time System, Deadbeat Control, Multi-input, General Deadbeat Input

1. ま え が き

制御系は安定であることが必要であるが、それだけでは良い制御系とはいえない。良い制御系が満足すべき性質は種々あるが、主な性質として次のようなものがある。

(性質 1) 定常偏差が零となり整定時間は短い。

(性質 2) 過渡特性や入力特性が優れている。

このような性質を有する制御系を設計するには、指定された終端時刻で終端状態を固定し(性質 1)、ある種の評価関数を最小化しなければならない(性質 2)。このような問題は、終端状態固定問題として古くから研究されている。しかし、連続時間系においては線形定常系に対しても、終端状態固定条件を満足する入力、制御対象の初期状態に陽に依存する。そのため、制御対象の初期状態が変化すると制御則も変えなければならない。このため、終端状態固定問題を工学上の種々の問題に応用するうえでの障害となっている⁽¹⁾。

これに対し、離散時間系で定式化されるデジタル制御系では終端状態固定条件を満足する入力が、初期

状態に依存しない一定ゲインの状態フィードバックにより実現できる⁽²⁾。この性質は、連続時間系で表現されるアナログ制御系にはない大きな利点であり、状態デッドビート制御(有限時間整定制御)と呼ばれる。また、終端状態固定条件は、状態デッドビート条件と呼ばれる。著者らは、一定ゲインの状態フィードバックに限定したときのデッドビート入力の一般形を求めている⁽²⁾。さらに、このような限定をしない真の意味でのデッドビート入力の一般形を、一入力系に対して求めている⁽³⁾。この一般形は、ある時刻を境にして、それ以前は任意入力、それ以後は一意的に定まる一定ゲインの状態フィードバックで等価的に表現される。しかし、多入力系に対して真の意味でのデッドビート入力の一般形は求まっていない。この一般形が求まれば、終端状態固定問題に対する強力な手段となり得ることは、一入力系の場合より明らかである⁽³⁾。

本論文では、多入力線形定常離散時間系に対し、状態デッドビート条件(終端状態固定条件)を満足するデッドビート入力の一般形を求める。なお、デッドビート入力は一定ゲインの状態フィードバックに限定しない。まず、入力を一定ゲインの状態フィードバックと新しい入力の代数和として表し、この新しい入力が満足すべき条件を求めることによりデッドビート入力

* 平成元年 3 月 17 日 九州支部第 42 期総会講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 4 月 20 日。

^{*1} 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

^{*2} 学生員、九州大学大学院。

の一般形を求める。一入力系と異なり、一般形の表現には種々のものが存在するが、設計の自由度は本質的に変わらない。

2. 問題の設定

制御対象として、次の可制御な線形定常離散時間系を考える。

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}$ は $n \times 1$ 状態ベクトル、 $\mathbf{u}$ は $m \times 1$ 入力ベクトル、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ はそれぞれ $n \times n$ と $n \times m$ の定数行列とし、 t は零または正の整数とする。なお、 $\mathbf{B}$ は最大階数 m をもつと仮定するが、 $\mathbf{A}$ の正則性は仮定しない。

式(1)において、任意の初期状態 $\mathbf{x}(0)$ に対し、終端時刻(整定時間) τ において、状態デッドビート条件(終端状態固定条件)

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{0} \quad (2)$$

を満足するデッドビート入力の一般形を求める問題を考える。なお、入力は一定ゲインの状態フィードバックに限定しない。

次に、状態デッドビート制御において重要なべき零ジョルダン行列について述べる。

[補題1] $n \times n$ べき零ジョルダン行列 $\mathbf{J}$ は、そのべき零ジョルダン細胞(以後、細胞と呼ぶ)の数 r と細胞の次数 p_i ($i=1, \dots, r$) が決まれば、細胞の並べ方の順序を除いて一意に定まる。そこで、 p_i 次の細胞 $\mathbf{J}(p_i)$ を

$$\mathbf{J}(p_i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \cdot & \cdot & 0 \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & \cdot & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

とし、 p_i を順序付けして

$$p_1 + \dots + p_r = n \quad (4)$$

$$n \geq p_1 \geq \dots \geq p_r \geq 1 \quad (5)$$

とし、 $\mathbf{J}$ をブロック対角行列

$$\mathbf{J} = \text{block diag} \{ \mathbf{J}(p_1), \dots, \mathbf{J}(p_r) \} \quad (6)$$

とする。

次に、Luenberger の可制御正準形に関する補題を述べる。

[補題2] 可制御性と $\mathbf{B}$ が最大階数 m をもつという仮定より、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が与えられると、広義の可制御指数と呼ばれる m 個の正の整数が一意的に定まる。この不変量を順序付けして n_i ($i=1, \dots, m$) とする。すなわち

$$n_1 + \dots + n_m = n \quad (7)$$

$$n \geq n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 1 \quad (8)$$

とする。さらに、式(1)は、適当な座標変換

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}_1 \bar{\mathbf{x}}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{S}_2 \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (9)$$

により、次の Luenberger の可制御正準形に変換することができる。

$$\bar{\mathbf{x}}(t+1) = (\mathbf{J}_0 + \mathbf{E}\mathbf{A}^*)\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{E}\bar{\mathbf{u}}(t) \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{J}_0$ は細胞の次数が $p_i = n_i$ ($i=1, \dots, m$) なる特別なべき零ジョルダン行列である。また、 $\mathbf{E}$ は第 $(n_1 + \dots + n_i, i)$ 成分 ($i=1, \dots, m$) のみが1で、他は零なる $n \times m$ 行列である。さらに、 $\mathbf{A}^*$ は $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{S}_1$ および $\mathbf{S}_2$ が与えられれば定まる $m \times n$ 定数行列である。

3. デッドビート入力

入力を一定ゲインの状態フィードバックに限定したときのデッドビート入力の一般形は、すでに求められている⁽²⁾。このとき、状態の数 n や入力の数 m が大きくなると組合せの数は急激に増加する。例えば、 $n=11$, $m=5$, 広義の可制御指数が $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (3, 3, 3, 1, 1)$ のとき 34 とおりの場合をそれぞれ調べなければならない。また、一般形も逆行列を含み設計パラメータの数も多いので、ある種の評価関数を最小化するような場合には複雑な最適化計算をしなければならない。さらに、一定ゲインの状態フィードバックに限定しているので、最適化は真の最適化ではなくパラメータ最適化となっている。

そこで、一定ゲインの状態フィードバックに限定しない真の意味でのデッドビート入力の一般形を求める。なお、表現を簡単化するために Luenberger の可制御正準形を用いて議論する。

まず、 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ を次のように変換する。

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{A}^* \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t) \quad (11)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{v}}$ は $m \times 1$ ベクトルである。明らかに設計の自由度は変わらない。式(11)を式(10)に代入すると

$$\bar{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{J}_0 \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{E} \bar{\mathbf{v}}(t) \quad (12)$$

を得る。明らかに、最短整定時間は狭義の可制御指数(最大可制御指数) n_1 であるから、整定時間 τ は

$$\tau \geq n_1 \quad (13)$$

でなければならない。式(12)より $\bar{\mathbf{x}}(\tau)$ は

$$\bar{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{J}_0^\tau \bar{\mathbf{x}}(0) + [\mathbf{E} \mathbf{J}_0^{\tau-1} \mathbf{E} \cdots \mathbf{J}_0^0 \mathbf{E}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}(\tau-1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{v}}(0) \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる。さらに、状態デッドビート条件の式(2)より

$$\bar{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{0} \quad (15)$$

となる。また、 $\mathbf{J}_0$ の細胞の最大次数は n_1 であるから、

$$\mathbf{J}_0^{n_1} = \mathbf{0} \quad (16)$$

となる。よって、式(15)、(16)を式(14)に代入すれば、連立一次方程式

$$[E \ J_0 E \cdots J_0^{r-1} E] \begin{bmatrix} \bar{v}(\tau-1) \\ \vdots \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = 0 \quad \cdots \cdots (17)$$

を得る。

次に、 $n \times 1$ ベクトル $e(j)$ を第 j 成分のみが 1 で他は零なる単位ベクトルとし、 $\beta_i (i=1, \cdots, m)$ を

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= n_1 \\ \beta_2 &= n_1 + n_2 \\ &\vdots \\ \beta_m &= n_1 + n_2 + \cdots + n_m \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (18)$$

とおく。さらに、零または正の整数 p に対し、 $n \times 1$ ベクトル $w(n_i - p)$ を

$$w(n_i - p) = \begin{cases} e(\beta_i - p) & (p < n_i) \\ 0 & (p \geq n_i) \end{cases} \quad \cdots \cdots (19)$$

とすると

$$J^p E = [w(n_1 - p) \ w(n_2 - p) \cdots w(n_m - p)] \quad \cdots \cdots (20)$$

となる。すなわち、 $J^p E$ の列ベクトルは単位ベクトルか零ベクトルとなる。また、 $J^p E$ の列に現れる単位ベクトルは式(17)の係数行列 $[E \ J_0 E \cdots J_0^{r-1} E]$ の中に一度だけしか現れない。さらに、可制御性の条件より、 $[E \ J_0 E \cdots J_0^{r-1} E]$ の任意の行は、 $1 \times (mr)$ 単位ベクトルである。よって、式(17)は τ 個の連立一次方程式

$$J^p E \bar{v}(\tau - p - 1) = 0 \quad (0 \leq p \leq \tau - 1) \quad \cdots \cdots (21)$$

に分離される。

これら τ 個の連立一次方程式は、 p の値によって一般に次の三つの場合が生じる。

[1] n_m は最小可制御指数であるから、 $0 \leq p \leq n_m - 1$ 、すなわち、 $\tau - n_m \leq t \leq \tau - 1$ のとき $n \times m$ 行列 $J^p E$ の階数 (rank) は

$$\text{rank } J^p E = m \quad (\text{最大階数}) \quad \cdots \cdots (22)$$

となり、

$$\bar{v}(t) = 0 \quad (\tau - n_m \leq t \leq \tau - 1) \quad \cdots \cdots (23)$$

となる。よって、式(11)より

$$\bar{u}(t) = -A^* \bar{x}(t) \quad (\tau - n_m \leq t \leq \tau - 1) \quad \cdots \cdots (24)$$

となる。

[2] n_1 は最大可制御指数であるから、 $n_1 \leq p \leq \tau - 1$ 、すなわち、 $0 \leq t \leq \tau - n_1 - 1$ のとき、 $J^p E$ は

$$J^p E = 0 \quad (0 \leq t \leq \tau - n_1 - 1) \quad \cdots \cdots (25)$$

となり、 $\bar{v}(t)$ は任意となる。よって、式(11)より $\bar{u}(t)$ も任意となる。

[3] $n_m \leq p \leq n_1 - 1$ 、すなわち、 $\tau - n_1 \leq t \leq \tau - n_m - 1$ のとき、 $\bar{v}(t)$ の第 i 成分を $\bar{v}_i(t)$ とおくと、式(19)と式(20)より

$$\bar{v}_i(t) = \begin{cases} \text{任意} & (\tau - n_1 \leq t \leq \tau - n_i - 1) \\ 0 & (\tau - n_i \leq t \leq \tau - n_m - 1) \end{cases} \quad \cdots \cdots (26)$$

となる。よって、 $\bar{u}(t)$ の第 i 成分を $\bar{u}_i(t)$ とおくと、式(11)より

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} \text{任意} & (\tau - n_1 \leq t \leq \tau - n_i - 1) \\ -e_m(i) A^* \bar{x}(t) & (\tau - n_i \leq t \leq \tau - n_m - 1) \end{cases} \quad \cdots \cdots (27)$$

となる。ここで、 $e_m(i)$ は第 i 成分のみが 1 で他は零なる $1 \times m$ 単位ベクトルである。

最短整定時間は n_1 であるから、整定時間 τ を

$$\tau = n_1 + q \quad (q \text{ は零または正の整数}) \quad \cdots \cdots (28)$$

とおき、以上をまとめると次の原理を得る。

[デッドビート原理 (Luenberger の可制御正準形による表現)] 任意の初期状態 $\bar{x}(0)$ に対し、状態デッドビート条件

$$\bar{x}(n_1 + q) = 0 \quad \cdots \cdots (29)$$

を満足するデッドビート入力 $\bar{u}(t)$ の一般形は、次の [1] ~ [3] と等価でなければならない。

[1] $0 \leq t \leq q - 1$ のとき

$\bar{u}(t)$ は任意。

[2] $q \leq t \leq n_1 - n_m + q - 1$ のとき

$\bar{u}(t)$ の第 i 成分 $\bar{u}_i(t)$ は

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} \text{任意} & (q \leq t \leq n_1 - n_i + q - 1) \\ -e_m(i) A^* \bar{x}(t) & (n_1 - n_i + q \leq t \leq n_1 - n_m + q - 1) \end{cases} \quad \cdots \cdots (30)$$

となる。

[3] $n_1 - n_m + q \leq t \leq n_1 + q - 1$ のとき

$$\bar{u}(t) = -A^* \bar{x}(t) \quad \cdots \cdots (31)$$

なお、最短整定時間 $\tau = n_1$ のときは、[1] の場合は存在しない。

すなわち、整定時間 $\tau = n_1 + q$ のとき Luenberger の可制御正準形で表現したデッドビート入力 $\bar{u}(t)$ の一般形は、一般に次の三つの相に分かれる。

[1] 第 1 相 ($t = 0, \cdots, q - 1$)

$\bar{u}(t)$ はすべて任意入力となる。

[2] 第 2 相 ($t = q, \cdots, n_1 - n_m + q - 1$)

$\bar{u}(t)$ のある成分は一定ゲインの状態フィードバック、他の成分は任意となる。

[3] 第 3 相 ($t = n_1 - n_m + q, \cdots, n_1 + q - 1$)

$\bar{u}(t)$ は一定ゲインの状態フィードバックとなる。

よって、Luenberger の可制御正準形による表現を元の座標系に変換すれば、次の原理を得る。

[デッドビート原理] 任意の初期状態 $\bar{x}(0)$ に対

し、状態デッドビート条件

$$x(n_1+q)=0 \quad (32)$$

を満足するデッドビート入力 $u(t)$ の一般形は、次の [1]～[3] と等価でなければならない。

[1] $0 \leq t \leq q-1$ のとき

$u(t)$ は任意。

[2] $q \leq t \leq n_1-n_m+q-1$ のとき

$$u(t)=S_2 \bar{u}(t) \quad (33)$$

ただし、 $\bar{u}(t)$ は式(30)より与えられる。

[3] $n_1-n_m+q \leq t \leq n_1+q-1$ のとき

$$u(t)=-S_2 A^* S_1^{-1} x(t) \quad (34)$$

すなわち、元の座標系で表現したデッドビート入力の一般形の第2相は、入力変換行列 S_2 のために一定ゲインの状態フィードバックと任意成分との線形結合となる [$u(t)$ のある成分が一定ゲインの状態フィードバック、他の成分が任意となる場合を含む]。

明らかに一入力系では第2相が存在しないが、多入力系では一般に第2相が存在する。ただし、広義の可制御指数 n_i ($i=1, \dots, m$) が互いに等しいとき、すなわち

$$n_1=n_2=\dots=n_m=\frac{n}{m} \quad (35)$$

のときには、第2相は存在しない。よって、次の系が成立する。

[系] 制御対象の広義の可制御指数 n_i ($i=1, \dots, m$) が互いに等しいとき、デッドビート入力 $u(t)$ の一般形は

$$u(t)=\begin{cases} \text{任意} & (0 \leq t \leq q-1) \\ -S_2 A^* S_1^{-1} x(t) & (q \leq t \leq n_1+q-1) \end{cases} \quad (36)$$

と等価でなければならない。

ここで求めた真の意味でのデッドビート入力の一般形は、入力を一定ゲインの状態フィードバックに限定したときのデッドビート入力の一般形⁽²⁾や正準形⁽⁴⁾と比較して、非常に簡潔である。したがって、ある種の評価関数を最小化するような場合に有効である。また、整定時間を状態の数 n より大きくすることができる。

これまでは、式(11)をもとにデッドビート原理を導出したが、 $A+BK$ がべき零ジョルダン行列に相似となるような $m \times n$ 行列 K を用いて、式(11)の代わりに

$$u(t)=Kx(t)+v(t) \quad (37)$$

としても、これまでと同様にして別の表現形式のデッドビート入力の一般形を求めることができる。しかし、表現形式が異なっても設計の自由度は変わらない。

なお、

$$t \geq \tau \quad (38)$$

のとき、理論的には $x(t)=0$, $u(t)=0$ となる。しかし、雑音や外乱などで $x(t)$ が零状態からずれる場合を考えると、 $t \geq \tau$ のときの $u(t)$ をデッドビート原理の第3相の式(34)とすることが望ましい。

4. 例 題

Sebakhy ら⁽⁵⁾の例題を用いる。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^*=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき、広義の可制御指数は $(n_1, n_2, n_3)=(3, 1, 1)$ である。整定時間 τ を

$$\tau=n_1+q=3+2=5$$

とする。任意の初期状態 $x(0)$ に対し、 $x(5)=0$ なるデッドビート入力の一般形は、Luenberger の可制御正準形による表現を用いると、

$\bar{u}(0)$: 任意ベクトル

$\bar{u}(1)$: 任意ベクトル

$$\bar{u}(2)=\begin{bmatrix} -\bar{x}_1(2)+\bar{x}_2(2)-\bar{x}_3(2) \\ \text{任意} \\ \text{任意} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}(3)=\begin{bmatrix} -\bar{x}_1(3)+\bar{x}_2(3)-\bar{x}_3(3) \\ \text{任意} \\ \text{任意} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}(4)=\begin{bmatrix} -\bar{x}_1(4)+\bar{x}_2(4)-\bar{x}_3(4) \\ -\bar{x}_4(4)-\bar{x}_5(4) \\ -\bar{x}_5(4) \end{bmatrix}$$

となる。よって、元の座標系では

$u(0)$: 任意ベクトル

$u(1)$: 任意ベクトル

$$u(2)=\begin{bmatrix} -x_3(2)+x_4(2)-x_5(2) \\ \text{任意} \\ \text{任意} \end{bmatrix}$$

$$u(3) = \begin{bmatrix} -x_3(3) + x_4(3) - x_5(3) \\ \text{任意} \\ \text{任意} \end{bmatrix}$$

$$u(4) = \begin{bmatrix} -x_3(4) + x_4(4) - x_5(4) \\ -x_1(4) - 2x_4(4) + x_5(4) \\ -x_4(4) \end{bmatrix}$$

となる。

5. あとがき

本論文では、多入力線形定常離散時間系に対し状態デッドビート条件（終端状態固定条件）を満足するデッドビート入力の一般形を求めた。なお、デッドビート入力は一定ゲインの状態フィードバックに限定しない。一般に、多入力系に対しては、デッドビート入力の一般形は、次のような三つの相に分かれる。

[1] 第1相 入力はすべて任意となる。

[2] 第2相 入力は一定ゲインの状態フィードバックと任意成分との線形結合となる（入力のある成分が一定ゲインの状態フィードバック、他の成分が任意となる場合を含む）。

[3] 第3相 入力は一定ゲインの状態フィードバ

ックとなる。

これに対し、一入力系では第2相は存在しない。ただし、多入力系においても広義の可制御指数が互いに等しいときは、第2相は存在しない。

本論文で求めたデッドビート入力の一般形は真の意味での一般形であり、一定ゲインの状態フィードバックに限定したときのデッドビート入力の一般形より設計の自由度は大きい。しかし、逆に表現形式は簡潔である。

なお、一般形に含まれる任意入力（設計の自由度）の決定法は、別の機会に報告したいと思っている。

文 献

- (1) 計測自動制御学会編, 自動制御ハンドブック基礎編, (1983), 498, オーム社.
- (2) 近藤・ほか3名, 状態デッドビート制御器の体系的設計法, 機論, 53-492, C (1987), 1782.
- (3) 近藤・ほか3名, 一入力デッドビート原理とその入力エネルギー最小化への応用, 機論, 54-505, C (1988), 2125.
- (4) 近藤・ほか2名, 状態デッドビート制御器の標準形, 機論, 53-495, C (1987), 2303.
- (5) Sebakhy, O. A. and Abdel-Moneim, T. M., State Regulation in Linear Discrete-Time Systems in Minimum Time, *IEEE Trans. Autom. Control*, 24-1 (1979), 84.