非線形はりの同定法*
(第1報, 同定法の提案)安田 仁彦*¹, 神谷 恵輔*²Identification of a Nonlinear Beam
(1st Report, Proposition of an Identification Technique)

Kimihiro YASUDA and Keisuke KAMIYA

As a basis for developing an identification technique of nonlinear distributed systems based on their dynamical responses, an identification technique is proposed based on a simple example of nonlinear distributed systems. The example taken up is a simply supported beam vibrating with large amplitudes. The basic procedures of the proposed technique are: (1) measuring periodic responses of the beam to periodic excitations; (2) determining modal coordinates using the responses based on the modal functions of the corresponding linear beam; and (3) determining the modal equations including nonlinear terms using the principle of harmonic balance. Some numerical examples are given, and the technique proposed is shown to be applicable.

Key Words: Identification, Nonlinear Vibration, Distributed System, Principle of Harmonic Balance

1. ま え が き

機械や構造物などの振動系を同定する実験的な方法としてモード解析法があり, 設計の有力な手段として広く用いられている。しかし, 現在のモード解析法は, 対象とする振動系を線形系として同定するものであって, 陽な形で非線形性まで含めて同定することはできない。

機械や構造物の使用条件が厳しくなるにつれて, より正しい動的応答を予測する必要性が増し, 対象とする振動系を非線形系として同定する方法が多くの研究者により提案されてきている^{(1)~(14)}。著者の一人も, これまで報告^{(15)~(19)}において多自由度非線形系を同定する方法を提案してきた。

この研究では, 非線形連続体を同定する方法を開発するための基礎的な検討を目的として, 非線形連続体の簡単な例を取り上げて同定法を提案する。取り上げる振動系は両端単純支持のはりである。このはりは, 大きい振幅で振動させるとき非線形振動系となる。そこでこの振動系の同定法を提案し, その有効性を数値

シミュレーションによって検討する。

2. 問題の設定

図1に示すように, 長さが l で, 軸方向に拘束された両端単純支持のはりを考える。はりに沿って x 軸を定め, 一方の端を原点, 他方の端を $x=l$ の点とする。はりのたわみを $w(x, t)$ あるいは単に w とおけば, 大きな振幅で振動させるときの系の支配方程式は

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EA}{l} \left[u_0 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C \frac{\partial w}{\partial t} + \mu EI \frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} = Q(x, t) \cdots (1)$$

である⁽²⁰⁾。ここで系に作用する減衰力として, 係数 C の粘性減衰力および係数 μ の内部減衰力を考えた。 u_0 は軸方向の張力による初期変位で, 張力を加えなければ $u_0=0$ である。 $Q(x, t)$ ははりに作用する外力を単位長さ当たりについて表したものである。 ρ, A, E, I ははりの密度, 断面積, 縦弾性係数, 断面二次モーメントである。

以上のはりに対して問題設定する前に, 外力 $Q(x, t)$ を与えて, 式(1)からたわみ $w(x, t)$ を求める解析の問題をまず考える。

はりを微小振幅で振動させれば線形はりとなる。こ

* 平成元年4月3日 第66期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和63年10月4日。

*¹ 正員, 名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)。

*² 学生員, 名古屋大学大学院。

ここで考えているはりの場合、対応する線形非減衰はりのモード関数はよく知られているように $\sin(n\pi x/l)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) であり、それらは直交性を満たす。そこでここで問題にしている非線形はりのたわみ w を、線形はりのモード関数で展開すると

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots (2)$$

の形におくことができる。ここに X_n ($n=1, 2, 3, \dots$) は時間 t の関数で、線形系の場合に準じてモード座標といわれる。式(2)を式(1)に代入して、モード関数の直交性、すなわち $m \neq n$ に対して

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \dots\dots\dots (3)$$

が成り立つことを利用すると、はりの支配方程式(1)からモード方程式

$$m_n \ddot{X}_n(t) + c_n \dot{X}_n(t) + k_n X_n(t) = N_n = q_n(t) \quad (n=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (4)$$

を得る。ここに m_n, c_n, k_n は

$$\left. \begin{aligned} m_n &= \rho A \\ c_n &= C + \frac{n^4 \pi^4 \mu EI}{l^4} \\ k_n &= \frac{n^4 \pi^4 EI}{l^4} + \frac{n^2 \pi^2 EA u_0}{l^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

で与えられる定数である。また N_n は

$$N_n = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{n,m} X_m(t)^2 \right\} X_n(t) \dots\dots\dots (6)$$

の形のモード座標 $X_n(t)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の関数であり、パラメータ $\beta_{n,m}$ は

$$\beta_{n,m} = \frac{n^2 m^2 \pi^4 EA}{4l^4} \dots\dots\dots (7)$$

である。さらに $q_n(t)$ は

$$q_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l Q(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる時間の関数である。式(4)を解いてモード座標 $X_n(t)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を定めれば式(2)によってはりのたわみ w が求められる。したがって式(1)によって w を求める問題は、式(4)によって $X_n(t)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を求める問題に帰着される。

そこで問題設定に移る。非線形はりを同定するという問題は、ある外力 $Q(x, t)$ のデータとそれに対するたわみ $w(x, t)$ のデータを用いて、支配方程式(1)を

定めることである。ところで以上の議論によると、任意の外力に対する系のたわみは式(4)によって求めることができる。したがって式(1)を定めるという問題は、同定の目的を考えれば、式(4)を定めるという問題に置き換えてもよいと思われる。そこで以下に、ある外力 $Q(x, t)$ とそれに対するたわみ $w(x, t)$ のデータを知ってモード方程式(4)を定める方法を提案し、非線形はりの同定法の提案とする。ただし式(4)のモード方程式は無数個の方程式からなるが、モード方程式からたわみを求めるとき、実用上はいくつかの方程式のみを考慮するだけで差支えないので、ここでも、はじめのいくつかの方程式を定めることを考える。

3. 同定法の提案

3.1 $X_n(t)$ と $q_n(t)$ の求め方 同定の手順に従って、はじめに、たわみ $w(x, t)$ の測定データから M 個のモード座標 $X_n(t)$ ($n=1, 2, 3, \dots, M$) を定める方法を考える。対象とする非線形はりの線形モード関数 $\sin(n\pi x/l)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) は既知であるとしておく。

たわみ $w(x, t)$ の測定点として、 N 個の点 x_i ($i=1, 2, 3, \dots, N$) を定め、その点でたわみ $w(x_i, t)$ を測定するものとする。たわみ $w(x_i, t)$ と $X_n(t)$ ($n=1, 2, \dots, M$) の間には

$$w(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) \sin \frac{n\pi x_i}{l} \dots\dots\dots (9)$$

の関係が成り立つ。そこである時刻 $t=t_j$ におけるたわみを測定すると

$$w(x_i, t_j) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t_j) \sin \frac{n\pi x_i}{l} \dots\dots\dots (10)$$

が得られる。

式(10)からできるだけ簡単に $X_n(t_j)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を求めるため、式(3)の關係に注意する。はりを等分割し、両端を除く分割点に測定点 x_i ($i=1, 2, 3, \dots, N$) を定めると、式(3)の關係から、大きくない m, n ($m \neq n$) について、

$$\sum_{i=1}^N \sin \frac{m\pi x_i}{l} \sin \frac{n\pi x_i}{l} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

が近似的に成り立つことがわかる。特に、 $m+n \leq 2N+1$ となる m, n に関しては式(11)は厳密に成り立つ⁽²¹⁾。そこで式(10)の両辺に $\sin(n\pi x_i/l)$ を掛け、 i について加え合わせ、式(11)の關係を用いると

$$X_n(t_j) = \frac{\sum_{i=1}^N w(x_i, t_j) \sin \frac{n\pi x_i}{l}}{\sum_{i=1}^N \sin^2 \frac{n\pi x_i}{l}} \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。この式によって $X_n(t_j)$ を近似的に求めることができる。

図1 同定の対象とするはり

以上の方法を各時刻 t_j ($j=1, 2, 3, \dots$) について繰返せば, $X_n(t)$ を時間の離散点 t_j について求めることができる。

$q_n(t)$ を定める問題は簡単である。外力 $Q(x, t)$ のデータを用いて式(8)の積分計算を各時刻 $t=t_j$ において行えば, 時間の離散点 t_j における $q_n(t)$ が求められる。

以上のようにして, われわれは $X_n(t)$ と $q_n(t)$ をデータとして持ったことになる。そこで次に, 前報⁽¹⁵⁾で提案した方法に従ってモード方程式を定める方法を提案する。

3.2 モード方程式の求め方 モード方程式を求めるため, 第一に考える問題は, モード方程式をどのような形におくかということである。採用したモード関数の性質を考慮すると, 求めるモード方程式は慣性項および線形の復原力項では連成しない。減衰項および非線形項についてはそのようなことはいえない。したがって求めるモード方程式は一般に

$$m_n \ddot{X}_n(t) + \sum_{m=1}^M c_{nm} \dot{X}_m(t) + k_n X_n(t) + N_n = q_n(t) \quad (n=1, 2, \dots, M) \quad (13)$$

の形におくことができる。この式でパラメータ m_n , c_{nm} , k_n は未知数で, c_{nm} は

$$c_{nm} = c_{mn} \quad (m \neq n) \quad (14)$$

を満たすとする。また非線形項 N_n は一般にモード座標 $X_n(t)$ ($n=1, 2, \dots, M$) あるいはその時間微分の非線形関数で, 多くの場合それらの多項式で近似できる。ここでは非線形性が復原力にあるはりを考えているので, 非線形項 N_n はモード座標 $X_n(t)$ ($n=1, 2, \dots, M$) のみの関数であると考えることができる。そこで各 N_n は $X_n(t)$ の二乗からはじまる

$$N_n = \sum_{i,j} a_{n,ij} X_i(t) X_j(t) + \sum_{i,j,k} \beta_{n,ijk} X_i(t) X_j(t) X_k(t) + \dots \quad (15)$$

の形の多項式で与えられるとする。ここに係数 $a_{n,ij}$, $\beta_{n,ijk}$, ... は未知のパラメータである。また式(15)の記号 Σ は, 記号の下に書かれた条件を満たすすべての $i, j, k, \dots$ に関する総和を意味するものとする。

以上でモード方程式の形を定めることができたので, 次に考える問題は, パラメータ m_n , c_{nm} , k_n および非線形項 N_n の係数パラメータ $a_{n,ij}$, $\beta_{n,ijk}$, ... をどのように定めるかということである。

これらのパラメータを定めるため, 外力 $Q(x, t)$ として周期 T の周期外力を採用し, 外力およびこれに対する, 外力と同じ周期の定常状態のたわみ振動

$w(x, t)$ をデータとして測定する。そのデータから前項に述べた方法によって, $q_n(t)$ および $X_n(t)$ を求める。このようにして得た $q_n(t)$ は外力と同じ周期を持つので, 加えた外力の周期 T からきまる角振動数 ω ($=2\pi/T$) を用いて

$$q_n(t) = (Q_n)_0 + (Q_n)_1 \cos \omega t + (Q_n)_2 \cos 2\omega t + \dots + (Q_n)_1^* \sin \omega t + (Q_n)_2^* \sin 2\omega t + \dots \quad (16)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここにフーリエ係数 $(Q_n)_0$, $(Q_n)_1$, $(Q_n)_2$, ... は FFT (高速フーリエ変換) などの手法により容易に求められる既知の量である。同様に, モード座標 $X_n(t)$ も

$$X_n(t) = (X_n)_0 + (X_n)_1 \cos \omega t + (X_n)_2 \cos 2\omega t + \dots + (X_n)_1^* \sin \omega t + (X_n)_2^* \sin 2\omega t + \dots \quad (17)$$

の形のフーリエ級数に展開できる。ここでもフーリエ係数 $(X_n)_0$, $(X_n)_1$, $(X_n)_2$, ... は既知の量である。次に, 式(15)で仮定した項 $X_i(t)X_j(t)$, $X_i(t)X_j(t)X_k(t)$, ... を上で求めたモード座標 $X_n(t)$ の演算によって求め, その結果もフーリエ級数

$$\begin{aligned} X_i(t)X_j(t) &= (X_iX_j)_0 \\ &+ (X_iX_j)_1 \cos \omega t + (X_iX_j)_2 \cos 2\omega t + \dots \\ &+ (X_iX_j)_1^* \sin \omega t + (X_iX_j)_2^* \sin 2\omega t + \dots \\ X_i(t)X_j(t)X_k(t) &= (X_iX_jX_k)_0 \\ &+ (X_iX_jX_k)_1 \cos \omega t + (X_iX_jX_k)_2 \cos 2\omega t + \dots \\ &+ (X_iX_jX_k)_1^* \sin \omega t + (X_iX_jX_k)_2^* \sin 2\omega t + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

の形におく。ここでもフーリエ係数 $(X_iX_j)_0$, $(X_iX_j)_1$, ... は既知の量である。

式(16), (17), (18)を式(13)に代入し, ハーモニクバランスの原理を用いて, 両辺の定数項および $\cos \omega t$, $\sin \omega t$, ... の係数をそれぞれ等しいとおくと, 次の形の方程式を得る。

$$[A]\{S\} = \{Q\} \quad (19)$$

ここに $[A]$ は式(17), (18)に表れるフーリエ係数から決まる既知のマトリックス, $\{Q\}$ は式(16)に表れるフーリエ係数から決まる既知のベクトル, そして $\{S\}$ は系のパラメータおよび非線形項の係数パラメータを成分とする未知のベクトルである。これらの表示式は, 求めたいモード方程式の数 M , 非線形項を表す多項式の次数, フーリエ級数展開の打ち切り次数などを指定すれば容易に求められるもので, 一般的な表示は面倒であるからここでは省略する。

加える外力の角振動数 ω としていくつかの値を適当に定め, またフーリエ級数展開の打ち切り次数を適当にとれば, 未知数の数より多い方程式を含んで再び式

(19)の形の方程式を得る。そこでこの式に最小二乗法を適用すれば、 $\{S\}$ は

$$\{S\} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T\{Q\} \dots\dots\dots (20)$$

によって定められる。必要があれば重みマトリックスを用いて同定の精度を上げるよう試みることができる。重みマトリックス $[W]$ を用いるとき、 $\{S\}$ は、式(20)の代わりに

$$\{S\} = ([A]^T[W][A])^{-1}[A]^T[W]\{Q\} \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる。式(20)あるいは式(21)によって $\{S\}$ を求めれば、モード方程式が定められたことになる。

4. 数値シミュレーション

による同定の例

3章で提案した同定法の有効性を検討するため、ここで数値的に求めた振動データを実験データとみなし、同定の数値シミュレーションを行う。求めたいモード方程式は、低次の三つのモードに関するものとする。

4.1 振動データの求め方 振動データを数値的に求めるため、一例として、式(1)に表れる各パラメータの値を次のように定める。

$$\begin{aligned} \rho &= 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad A = 9.50 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \\ E &= 2.06 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad I = 1.98 \times 10^{-13} \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$C = 0.15 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2, \quad \mu = 3.00 \times 10^{-4} \text{ s},$$

$$l = 8.16 \times 10^{-1} \text{ m}, \quad u_0 = 1 \times 10^{-6} \text{ m} \dots\dots\dots (22)$$

たわみ w の振動データを、モード方程式を用いて次のように求める。実際の実験データでは、たわみは高次のモード成分までを含むので、ここでは同定したいモード数の2倍にあたる6次までのモード成分を含めて考える。そのため、式(4)のはじめの6式を、添字 n が7以上のモード座標 $X_n(t)$ ($n \geq 7$)を無視し、与えられた周期外力に対し適当な初期条件のもとに数値的に積分し、外力と同じ周期の周期解になるまで積分を続ける。こうして得た周期解を式(2)に代入し、たわみ w の振動データとし、これを実験データとみなす。

外力として、式

$$Q(x, t) = q_0 \delta(x - x_f) \cos \omega t \dots\dots\dots (23)$$

で与えられる集中的な調和外力を作用させる場合を考える。この式で q_0 は外力の大きさ、 $x = x_f$ は集中外力を作用させる加振点である。以下の数値例では大きさ q_0 は $q_0 = 1.0 \times 10^{-2} \text{ N}$ とした。

外力の与え方は以上のような集中外力のほか、式

$$Q(x, t) = \begin{cases} q_0 \cos \omega t & (x_{f1} < x < x_{f2}) \\ 0 & (0 < x < x_{f1}, x_{f2} < x < l) \end{cases} \dots\dots\dots (24)$$

(a) $\omega = 40 \text{ rad/s}$ の場合

(b) $\omega = 48 \text{ rad/s}$ の場合

図2 たわみ w の数値データの例

のように、区間 $x_{f1} < x < x_{f2}$ 内で一定の大きさ q_0 をとる分布調和外力を作用させる場合も考える。この場合には大きさ q_0 は $q_0 = 3.0 \times 10^{-2} \text{ N/m}$ とした。

4.2 同定の進め方 式(12)を用いて、たわみ w からモード座標を求めるため、測定点を

$$x = \frac{1}{5}l, \frac{2}{5}l, \frac{3}{5}l, \frac{4}{5}l \dots \dots \dots (25)$$

の位置にとる。これらの測定点のデータからモード座標 $X_n(t)$ ($n=1, 2, 3$) を求めるには式(12)を用いる。

非線形項は式(15)に示す二乗、三乗の項よりなるとする。ただし非線形はりの問題では、力学的な考察によって、各非線形項はポテンシャルから導かれると考えられるので、ここでは三乗、四乗の多項式で与えられるポテンシャル

$$U = \sum_{i \leq j \leq k} \alpha_{hijk} X_i(t) X_j(t) X_k(t) + \sum_{h \leq i \leq j \leq k} \beta_{ohijk} X_h(t) X_i(t) X_j(t) X_k(t) \dots \dots \dots (26)$$

から

$$N_n = \frac{\partial U}{\partial X_n(t)} \dots \dots \dots (27)$$

によって導かれるとする。このようにしたほうが、モード方程式に含まれる非線形項の係数パラメータが減少し、精度の向上が期待される。

フーリエ級数展開の打ち切り次数は3にする。またこ

こでは重みマトリックスは用いないことにする。

4.3 数値シミュレーションの結果 数値シミュレーションの結果の例として、加振点 $x_f = (3/8)l$ に集中外力を作用させる場合の結果を示す。まず外力 $Q(x, t)$ とたわみ w の数値データの例を図2に示す。この図のデータを用いてモード座標 $X_n(t)$ ($n=1, 2, 3$) とそのフーリエ級数の大きさを定めたところ、図3に示すようになった。この結果は、たわみ w を求める際の $X_n(t)$ ($n=1, 2, 3$) とほとんど一致している。図3を求めたと同じようにして、 ω のいろいろな値に対してモード座標を求め、それを振幅と ω の関係にして示すと図4のようになった。ここに示したデータは1次、2次、3次までのすべての共振点付近のデータを含んでいる。そこで次に、これらのすべてのデータを用いてモード方程式の各係数を定めた。その結果、モード方程式を求めるときには非線形項 N_n を含めて式(13)のように一般性をもたせてあるのに、減衰係数 C_{nm} ($n \neq m$) は係数 C_{nn} に比してほとんど零となり、また非線形項も、式(6)に表れる項以外の非線形項は式(6)に表れる各項に比して1%以下の小さな値となり、提案した方法により非線形項 N_n も含めて式(4)の形に完全に一致するモード方程式が得られることがわかった。そして各係数の値は表1に示したようになり、正しい値に極めて近くなった。このようにして、い

(a) $\omega = 10 \text{ rad/s}$ の場合

(b) $\omega = 18 \text{ rad/s}$ の場合

図3 たわみ w から求めたモード座標とそのフーリエ係数の大きさ

ま取り上げた問題の場合、たわみのデータを利用してモード方程式が再現されることがわかった。

集中外力の加振位置 x_f を $x_f=(1/4)l$ にしても、同定結果はほとんど同じであった。

式(27)の形の分布外力を作用させる場合として、加振範囲を $(1/4)l < x < (3/8)l$ にした場合および $(3/8)l < x < (1/2)l$ にした場合にも、数値シミュレーションの結果、上述の場合と同じようなよい結果が得られた。

最後に、集中外力で加振点を $x_f=(1/2)l$ にした場合、および分布外力で加振範囲を $(7/16)l < x_f < (9/16)l$ にした場合には、モード方程式の係数はでたらしめな値となり、同定はできなかった。これは、たわみ

のデータに2次のモードの成分がほとんど含まれないことに起因すると思われる。同様に、振動数 ω の範囲をそれぞれ1次、2次、3次の共振点付近のみにとった場合にも同定はできなかった。

以上の各場合の結果をまとめると、加振点と測定点を適当に定めれば、たわみの振動データからモード方程式を定めることができ、同定が可能であるといえる。

5. ま と め

非線形連続体の同定法の開発を目的として、この報告では非線形はりを取り上げて同定法を提案した。提案した方法は、周期外力による応答データからモード

図4 同定に用いたモード座標の値

表1 同定結果

	Exact	Identified
	$\times 10^{-2} \text{ Kg/m}$	$\times 10^{-2} \text{ Kg/m}$
m_1	7.45	7.45
m_2	7.45	7.45
m_3	7.45	7.44
	$\times 10^{-1} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$	$\times 10^{-1} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$
c_{11}	1.52	1.52
c_{22}	1.85	1.86
c_{33}	3.28	3.32
	$\times 10^3 \text{ N/m}^2$	$\times 10^3 \text{ N/m}^2$
k_1	0.04	0.04
k_2	0.29	0.29
k_3	1.05	1.05
	$\times 10^9 \text{ N/m}^4$	$\times 10^9 \text{ N/m}^4$
$\beta_{1,111}$	0.11	0.11
$\beta_{1,122}$	0.43	0.43
$\beta_{1,133}$	0.97	0.97
$\beta_{2,112}$	0.43	0.43
$\beta_{2,222}$	1.72	1.72
$\beta_{2,223}$	3.87	3.87
$\beta_{3,113}$	0.97	0.97
$\beta_{3,223}$	3.87	3.86
$\beta_{3,333}$	8.71	8.65

座標を求め, そのデータに基づいてモード方程式を定めるものである。数値シミュレーションによって, 提案した方法で非線形はりが精度よく同定できることを示した。

文 献

- (1) Ibanez, P., *J. Nucl. Eng. Des.*, **25** (1973), 30.
- (2) Ibrahim, S. R. and Mikulcik, E. C., *Shock Vib. Bull.*, **46-5** (1976), 187.
- (3) Masri, S. F. and Caughey, T. K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **46-2** (1979), 433.
- (4) Udawadia, F. E. and Chio-Po Kuo, *Earthqu. Eng. Struct. Dyn.*, **9** (1981), 385.
- (5) Stephan, C. U. and Ivan, E. M., *ASME Paper*, 82-DET-138 (1982).
- (6) Okubo, N., *Sound Vib.*, **16-11** (1982), 34.
- (7) Kirshenboim, J. and Ewins, D. J., *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, **106-1** (1984), 49.
- (8) 渡辺・佐藤, 機論, **51-467**, C (1985), 1765.
- (9) 大久保・ほか2名, 精密工学会誌, **52-3** (1985), 89.
- (10) Stanway, R., ほか2名, *Proc. Instn. Mech. Eng.*, **199-C**, 1 (1985), 79.
- (11) Yongxin, Y. and Ibrahim, S. R., *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, **107-1** (1985), 60.
- (12) 渡辺・佐藤, 機論, **52-481**, C (1986), 2397.
- (13) Busby, H. R., ほか2名, *J. Sound Vib.*, **180-3** (1986), 415.
- (14) 佐藤・ほか2名, 機論, **54-497**, C (1988), 87.
- (15) 安田・ほか2名, 機論, **53-495**, C (1987), 2191.
- (16) 安田・ほか2名, 機論, **54-500**, C (1988), 816.
- (17) 安田・河村, 機論, **54-504**, C (1988), 1708.
- (18) 安田・河村, 機論, **54-507**, C (1988), 2550.
- (19) 安田・渡辺, 機論, **55-512**, C (1989), 833.
- (20) Burgreen, D., *Trans. ASME*, **73-2** (1951), 135.
- (21) ラルストン・ラビノヴィッツ (戸田・小野訳), 電子計算機のための数値解析の理論と応用 上(1986), 254, プレイン図書出版.