一般風中の飛行に関するエネルギー指標*

鈴木 木 曠 二^{*1}Energy Index for Flight
in General Conditions of Wind

Kooji SUZUKI

The concept of energy height has been usually applied to estimate the energy level of aircraft and birds and to analyze their flight even in general non-uniform wind without any clear definition. In this paper, the physical meaning of the energy height is clarified. The energy height in non-uniform wind is the margin of the mechanical energy defined in a particular non-inertial system, but not in the inertial system, and is useful for the systematic analyses of the flight; in particular, the soaring in general conditions of wind.

Key Words: Dynamics of Machinery, Energy Height, Mechanical Energy, Non-Inertial System, Non-Uniform Wind, Dynamic Soaring

1. 緒 言

航空機や鳥の飛行に関して、飛行状態のエネルギーレベルを示す指標が設定できるとよい。飛行は一般に時間的空間的に変化する風の中で行われる。特に滑しょう(翔)は、上昇風や風速こう(勾)配等を利用して飛行を継続させようとするものである。したがって、その指標は一般的非一様風中での飛行に適用できるとともに、エネルギー増減のしくみを説明できるものでなければならない。

本論文では、この指標として、慣例的に用いられているエネルギー高度 H に W を乗じた e_A (次式) をとりあげる。

$$e_A = WH = mV^2/2 + Wh \dots \dots \dots (1)$$

これは、パイロットの実感のエネルギー的表現であるとともに、これの微分値を W で除したものの ($\dot{H}$) が、滑しょう用計器トータルエナジーバリオメタの値である。この指標はまた、文献(1)、(2)等に見られるように、非一様風中の飛行の研究にもよく用いられてきた。 e_A は、運動エネルギーの形をした第1項に対気速

度 V を用いているから、無風下での飛行を除けば明らかに地表固定座標系から観測する力学的エネルギーではない。これまで、このエネルギー指標は直観的自明なものとして用いられ、力学的に厳密な解釈や有用性の検討はなされてこなかった。

本論文は、その力学的意味を明らかにし、さらに、これを用いることによって、滑しょうの基本原理が明解に説明され、異なった滑しょう法を同一そ(狙)上で解析することができるなど、有用性のあることを示す。

2. 記 号

t : 時間

$$[\dot{\quad}] = d[\quad]/dt$$

C, k, n : 定数

$E-xyz$: 地表固定座標系 (E系) (上方を正)

$A-x_Ay_Az_A$: 非慣性座標系 (A系) (上方を正)

H : エネルギー高度 $= e_A/W$

e_A : エネルギー指標, 対気エネルギー余裕

E_A : A系で観測する力学的エネルギー, 対気エネルギー

E_E : E系で観測する力学的エネルギー, 対地エネルギー

* 平成元年4月5日 第66期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和62年7月3日。

^{*1} 正員、東海大学工学部 (〒259-12 平塚市北金目 1117)。

E_{Amin} : A系で観測する最小エネルギー

m : 質量

$W, \mathbf{W}$: 重力 $= (0, 0, -W)$

D : 抗力

L : 揚力

$\mathbf{F}$: 空気力 $= (-D, 0, L)$

$\mathbf{r}$: 対地位置 (対地軌道)

$\mathbf{U}, U$: 対地速度

$\mathbf{s}$: 対気位置 (対気軌道)

$\mathbf{V}, V$: 対気速度

$\mathbf{w}, w$: 風速 $= (w_x, w_y, w_z)$

ζ_A : A系で観測する地表の高さ

3. エネルギー指標 e_A の力学的意味

3.1 一般風中における飛行の運動方程式とエネルギー積分 対象 (航空機や鳥) の運動はその重心についてのみ考える。簡単のために推力は考えない。推力は負の抗力として D に組み込んで扱えばよいからである。地表固定座標系 E で記述した運動方程式は式 (2) となる。

$$m\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{F} + \mathbf{W} \quad \text{..... (2)}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{w} \quad \text{..... (3)}$$

$$m\dot{\mathbf{V}} = -m\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{F} + \mathbf{W} \quad \text{..... (4)}$$

式 (2) に式 (3) を用いて式 (4) のように表すと、これは対象の対気速度 $\mathbf{V}$ が常に直接観測されるような運動座標系 A で記述した運動方程式である。A 系とは、その原点 A が対象の存在する位置 $\mathbf{r}$ における大気の流れベクトル (風速 $\mathbf{w}$) と常に同じ速度ベクトルで動き、その座標軸は回転しないもので、一般に非慣性系である (図 1)。式 (4) の右辺第 1 項がこの座標系の加速度 $\dot{\mathbf{w}}$ によって生ずる見かけの外力である。

時刻 t における対象の位置 $\mathbf{r}(t)$ は対地速度 $\mathbf{U}$ で変化しており、刻々変化するその位置における風速 $\mathbf{w}$ の時間変化率が $\dot{\mathbf{w}}$ である。これは式 (5) のようになる。

$$\dot{\mathbf{w}} = \partial \mathbf{w} / \partial t + (\partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{r}) \mathbf{U} \quad \text{..... (5)}$$

ただし、

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \partial w_x / \partial x & \partial w_x / \partial y & \partial w_x / \partial z \\ \partial w_y / \partial x & \partial w_y / \partial y & \partial w_y / \partial z \\ \partial w_z / \partial x & \partial w_z / \partial y & \partial w_z / \partial z \end{bmatrix} \quad \text{..... (6)}$$

式 (5) の第 1 項は対象の位置における風の時間的変動の成分、第 2 項は空間的变化による成分である。式 (6) は風速 $\mathbf{w}$ によって形成されたベクトル場のこう配であり、ある瞬間に対象が存在する位置の近傍における風の空間的分布形によってのみ決定される。その

成分の意味は例えば次のとおりである。

$$\begin{cases} \partial w_x / \partial x: \text{風速の } x \text{ 成分の, 同方向こう配 (加減速)} \\ \partial w_x / \partial z: \text{風速の } x \text{ 成分の, 直交 } z \text{ 方向こう配} \end{cases}$$

さて、非慣性系で運動が記述されていても、エネルギー積分を行うことになら問題はない⁽³⁾から、式 (4) に A 系で観測される速度 (対気速度 $\mathbf{V}$) をスカラー的に乗じ、 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = -DV$ を用い、さらに、微小変位に対してなす重力の仕事が全微分の形になる (式 (7)) ことを考慮すれば、式 (8) のようになる。

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{V} dt = -d(Wz_A) \quad \text{..... (7)}$$

$$E_A = -\int DV dt - m \int \dot{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{V} dt + C_8 \quad \text{..... (8)}$$

ただし、

$$E_A = mV^2/2 + Wz_A \quad \text{..... (9)}$$

ここに、 E_A は、通常よく用いられる地表固定座標系等の慣性系から観測される力学的エネルギーではなく、対象近傍の大気とともに動く A 系から観測される力学的エネルギーである。観測系を強調して以後これを対気エネルギーと呼ぶこととする。そのエネルギー形態は式 (9) の右辺で知ることができ、運動エネルギーと位置エネルギーの和であることは言うまでもない。もちろん両者とも、A 系から観測したものである。

3.2 e_A の力学的意味 E_A の基準値として、エネルギー最小の状態すなわち、対象が対気速度 $V=0$ でかつ、地表すれすれにある ($z_A = \zeta_A$) 場合の値 E_{Amin} を採用すると、対象の対気エネルギーの余裕は式 (10) のようになる。ちなみに、正常な着陸をする瞬間には

図 1 座標系と諸量 (y 軸, y_A 軸は省略)

$m \times (\text{失速速度})^2/2$ の対気エネルギー余裕を持っていなければならないということが、風と無関係に言える。

$$E_A - E_{Amin} = mV^2/2 + Wh \quad \dots\dots\dots(10)$$

ただし、 $h = z_A - \zeta_A$ である。

さて、式(10)の右辺は冒頭に提示した指標 e_A にほかならない。式(10)の左辺を具体的に計算すると式(12)のようになる。なおこのとき式(8)と式(11)を用いている。 E_{Amin} は昇降するA系の対地高度($-\zeta_A$)によって決まる値である[式(11)]。

$$E_{Amin} = W\zeta_A, \quad \zeta_A = -\int w_z dt + C_{11} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$e_A = mV^2/2 + Wh \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$= -\int DV dt$$

$$+ \int [SS] dt + \int [DS] dt + C_{12} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $[SS] = Ww_z$, $[DS] = -m\dot{w} \cdot V$, $C_{12} = e_A|_{t=0}$ である。

さらに、 e_A の変化を仕事率で表わすなら式(13)となる。

$$\dot{e}_A = -DV + [SS] + [DS] \quad \dots\dots\dots(13)$$

かくして、エネルギー指標 e_A は、対象近傍の大気とともに動く非慣性系Aからみた力学的エネルギーの、エネルギー最小状態からの余裕であると解釈される。以後これを対気エネルギー余裕と呼ぶこととする。

さらに、この対気エネルギー余裕がどのような仕事によって生起するものであるかは、式(12)、式(13)の右辺によって知ることができる。それによって滑しょうの基本原理解が包括的に説明されることを次章に示す。

なおここで、上記の解釈に含まれている「…エネルギー最小状態からの……余裕」のもつ意味について付言しておく。これは、地表固定系で考える場合の、次のような現実的な立場に対応している。地表に起伏がある地域で、絶対高度一定の水平飛行をしていても、変化する地表からの相対高度を用いてエネルギーを評価しようという立場である。つまり、 e_A には、地表からの相対高度を重要視するパイロットの実用的な視点が反映されていると解釈できよう。

なお、地表に起伏があるとして上記の定式化を展開しても、各式に必要な修正は議論の本質に影響を与えるものではないので、はんな項の入るのを避けるために地表は水平であるとした。

風が任意の水平風($w_z=0$)である場合には、 e_A は力学的エネルギーそのものとなって、いっそうわかりやすい。なんとならばこの場合、A系は昇降しないから

$\zeta_A = C_{11}$ となり、

$$e_A = mV^2/2 + W(z_A - C_{11}) = E_A + C \quad \dots\dots\dots(14)$$

となるからである。このことは、変化する水平風を利用した動的滑しょう法を解析する場合⁽⁴⁾⁽⁵⁾に用いることができる。

4. e_A からみる滑しょう法の

基本原理

対気エネルギー余裕 e_A によって滑しょう法の基本原理がどのように説明されるかを以下に示す。 e_A (もしくはその増減率)の起源である仕事(もしくは仕事率)すなわち式(12)(もしくは式(13))の右辺を分析すればよい。

第1項は、抗力 D による負の仕事で不可避である。

第2項と第3項は、風の影響下にあり、特に第3項は飛び方($V, U, s = \int V dt, r = \int U dt$ 等)を含んでいる。

したがって、適当な性質の風があって、その中で適切な飛び方をすれば、第2項あるいは第3項を正の値にすることができ、抗力による e_A の減少を緩和するか、補って余りあれば e_A を増大させることができる。滑しょうとはこのように飛ぶことにほかならない。

第2項が静的滑しょう法 static soaring (SS)、第3項が動的滑しょう法 dynamic soaring (DS) にそれぞれ対応していて、これ以外の滑しょう法はないことを示している。

この二つの滑しょう法の基本原理は以下のとおりである。

4.1 静的滑しょう法(SS) 利用するのは風の鉛直成分 w_z だけであり、飛び方とは無関係である。上昇風($w_z > 0$)の中を飛びさえすれば、 $[SS]$ は正となる。この項は、重力による仕事の形をしており、次のような例が理解を助けるであろう。

今、一樣上昇風の中で大気に対して水平飛行をする場合を考えると、対象は大気と同じ上昇率で昇ってゆく。この上昇について重力の成す仕事がこの項そのものであり、 $D=0$ ならこの分だけ e_A が増加する。しかし現実には、抗力によるロスによって V が低下してゆくとともに e_A の増加も抑制される。

基本原理は単純で、「上昇風の中を飛ぶこと」となる。

4.2 動的滑しょう法(DS) 第3項は見かけの外力 $-m\dot{w}$ による仕事である。利用するのは風の変化 $\dot{w}$ であり、風速そのもの(w)には依存しない。また、重力とも無関係である。この滑しょう法には風の変化 $\dot{w}$ およびそれを生かす飛び方(V)の二つが不可欠で、この両者の関係によって $[DS]$ の正負と大きさが決ま

る。利用する風の変化には、時間的変動と空間的变化がある(式(5))が、後者の場合はやや複雑で、対気速度 V ばかりでなく位置 r と対地速度 U をも考慮した飛び方が要請される。

$[DS] = -m\dot{w} \cdot V > 0$ より基本原理は、「付近の風の変動と分布をにらみながら、対気速度 V の向きが風速変化 $\dot{w}$ の向きと反対(鈍角)になるように飛ぶこと」となる。別の表現をすると、「風の変化が対気速度を増すように飛ぶこと」となる。

飛行方向と風向の関係によって場合わけをして具体的に説明すると次のようになる。

向い風で飛ぶ($V \cdot w < 0$) なら風速が増すほうへ、
追い風で飛ぶ($V \cdot w > 0$) なら風速が減るほうへ、
横風で飛ぶ($V \cdot w \approx 0$) なら風が前方に回るようなほうへ飛べ、である。第1のケースが直観的に最も理解しやすいと思われる。しかし、基本原理はいずれも同じで、突風(とりもなおさず、風の変化 $\dot{w}$) が前から吹いて対気速度を増してくれるのである。

二つの滑しよう法はその基本原理を異にするため、物理的同一そ(粗)上では扱いにくいものであったが、対気エネルギー余裕 e_A のもとにそれが可能となったわけである。

5. e_A による滑しよう法の分析例

海上の水平風の鉛直方向風速こう配を用いる、アホウドリ類のDSについては、すでに著者によって、対気エネルギー余裕 e_A を用いた解析がなされている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。ここでは、SSの一つとして知られている斜面上昇風を利用した滑しよう法をとりあげ、これがDSの効果をも併せもったものであることを示す。

図2のような $z = kx + C$ と表される斜面沿いに並

行に吹く斜面上昇風を、境界層の存在も含めて記述すると式(15)と表される。これを用いて式(5)を計算すれば式(16)となる。

$$w = (w_x, 0, w_z), \quad w_x \propto (z - kx - C)^n \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w_x}{\partial z} \begin{bmatrix} -k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k^2 & 0 & k \end{bmatrix} U = \frac{\partial w_x}{\partial z} \begin{bmatrix} -k\dot{x} + \dot{z} \\ 0 \\ -k^2\dot{x} + k\dot{z} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(16)$$

この上昇風の中にとどまる限り、 $w_z > 0$ であるから $[SS] = Ww_z > 0$ となって、これがSSによる利得成分を示す。次にDSについて、まず $\dot{w}$ の方向は斜面に平行である。 $\dot{w}$ の向きは、 $\partial w_x / \partial z > 0$ であるから斜面との距離を増すほうへ飛ぶ($\dot{z} > k\dot{x}$ なる U) なら斜面を登る向きであり、斜面との距離を縮めるほうへ飛ぶ($\dot{z} < k\dot{x}$ なる U) なら斜面を下る向きである。したがって、 $[DS] > 0$ とするのは、 $\dot{w} \cdot V < 0$ を満たしかつ、 $\dot{w}$ と U の向きが上記の係に矛盾しない飛び方をした場合である。式(3)を用いれば図2に示した範囲に V を向けるべきであると知れる。この飛び方を斜面に対して相対的にみれば、海上の水平風の鉛直方向風速こう配を利用する場合の飛び方である「向風上昇、追風降下」⁽⁴⁾と同じである。というのは、DSの基本原理が、前述のように重力と無縁だからである。実際に行われている滑しようも上記の飛び方に合致したものである。式(16)と $-mV$ のスカラー積がDSによる利得成分となる。

対気エネルギー余裕 e_A はこの例のように、複合的滑しよう法の定量的分析にも有効であることがわかった。

6. 地表固定座標系による観測では

いうまでもなく、座標系の選択は通常、現象の記述や解析等にどのように便であるかによって行われるものであって、そもそも座標系固有の優劣はない。

さて、E系で観測する力学的エネルギー E_E の微分は、式(2)に U を乗じ、式(3)を用いて次のようになる。

$$\dot{E}_E = m\dot{U}U + W\dot{z} = -DV + F \cdot w \quad \dots\dots\dots(17)$$

第1項は抗力によるロスである。第2項は、対象の変位のうち風に流される成分について、空気力(抗力と揚力) F の成す仕事率である。これにはDSに必須である風の変化 $\dot{w}$ が含まれていない。またこの項は、水平風中の向風水平飛行の場合に正となってしまう($F \cdot w = Dw > 0$)。さらに例えば、一樣水平風中における対気速度 V 一定の水平旋回を考えると、エネルギー

図2 斜面上昇風を利用する滑しよう法

一レベル一定と評価するのが飛ぶものの感覚であると思われるが、この項は周期的に変動する。 w の方向が一定であるのに対して、 F の方向はみそすり運動をするからである。パイロットは、強風下の低空旋回において U の変化 (すなわち E_E の変化) に幻惑されることの危険を熟知している。

この観測法は、地表固定点からみるとどう見えるかは教えてくれるが、飛行のエネルギーレベルを刻々直接判定するのに便であるかどうか疑問である。

7. 結 言

航空機や鳥の飛行状態のエネルギーレベルを示す指標としてよく用いられる $e_A = mV^2/2 + Wh$ の、力学的意味が明らかとなった。

それは、航空機や鳥の近傍の大気とともに動く非慣性系 A から観測した力学的エネルギーの、エネルギー最小状態からの余裕と解釈される。地表固定系等の慣性系ではなく、このような座標系からみることが、一

般的非一様風中の飛行、特に滑しょうの解析に有用であることがわかった。

A系から観測することは、飛行が大気との相対運動に力学的根拠をおくという事実には忠実な見方である。A系のもつこのような背景こそ、 e_A が上述のような力学的意味と有用性をもつ理由であろう。

非一様風中の飛行のエネルギーを論ずるのに、通常極めて便利な慣性系が必ずしも適当でないというのも、理由は同じ根拠にあるものと思われる。

文 献

- (1) Wood, C. J., The flight of Albatrosses, *IBIS*, 115-2 (1973), 244.
- (2) Wilson, J. A., Sweeping flight and soaring by albatrosses, *Nature*, 257 (1975), 307.
- (3) 例えば、山内, 一般力学, (1982), 95, 岩波書店.
- (4) 鈴木, 東京大学学位論文, (1983).
- (5) 鈴木, 機論, 50-457, C (1984), 1736.