トルクに制限がある場合の振り子の制御*
(第4報, 振上げ制御のプレイバック)高橋隆行*¹, 猪岡 光*¹Control of a Pendulum under Torque Limitation
(4th Report, Playback of a Swinging-up Motion)

Takayuki TAKAHASHI and Hikaru INOOKA

A human operator can control a complicated system, such as a gantry crane, after sufficient training. In the previous reports, we examined human control ability and pointed out its utility in the swinging-up control of an inverted pendulum system. In this paper, we examine a playback method for controlling complicated systems utilizing the ability of a human operator. The operation of a human operator is stored in computer memory, and afterwards the data are reproduced in real time to control the system. In experimentation, we get good results applying this method to the inverted pendulum system.

Key Words: Application of Control, Experimental Study, Manual Control, Pendulum, Swinging-up Motion, Playback Control

1. 緒 言

これまでに著者らは, 単振り子を倒立点へ振り上げる制御について, 理論的ならびに実験的に検討してきた^{(1)~(3)}. 非線形微分方程式で表される振り子の振上げ運動制御の取扱いは, 粘性減衰力が小さい場合には著者らが先に提案した図式的な解法⁽²⁾が利用できるが, 一般の場合には難しい. 特に, 加振トルクの大きさに制限がある場合には, 振上げ途中でトルク方向の切換えが必要になるため, 有効な制御則を発見することは容易ではない.

前報⁽³⁾では, 人間が制御対象の動きを観察し, 直接操作器を操作して制御を行うような制御系を構成して実験を行った. その結果, 振り子のように解析が困難な制御対象であっても, 人間は練習により比較的簡単に有効な制御則を獲得できることを示した. そこで, 人間が行った制御を記憶し利用することで, 解析が困難な系の自動制御を実現することが可能であると考えられる. しかし, 前報で述べたトルク入力形の単純なプレイバック制御では再現性が良くなく, 応用に際し

ての問題となる.

本報では, 前報のプレイバック制御の問題点について考察し, 制御の再現性向上をはかった. また新たに目標位置入力形の方法を提案し, その実用性について実験的に検討した.

2. 運動方程式とエネルギー式

図1の振り子の, 無次元化した運動方程式は次式で与えられる⁽¹⁾.

$$\ddot{\theta}(\tau) + 2\zeta\dot{\theta}(\tau) + \sin \theta(\tau) = \alpha \mp \alpha_{fr} \\ [-: \dot{\theta}(\tau) > 0, +: \dot{\theta}(\tau) < 0] \dots \dots \dots (1)$$

ただし,

図1 振り子のモデル

* 昭和62年10月1日 第30回自動制御連合講演会において講演, 原稿受付 昭和63年9月26日.

*¹ 東北大学工学部 (〒980 仙台市荒巻字青葉).

図2 トルク入力形の構成

$$\dot{\theta}(\tau) = \frac{d\theta(\tau)}{d\tau}$$

$$\tau = \omega t, 2\zeta = \frac{C}{\sqrt{mgl}}, \alpha = \frac{T}{\omega^2 I}$$

$$\alpha_{fr} = \frac{T_{fr}}{\omega^2 I}, \omega^2 = \frac{mgl}{I}$$

また, t : 時間 s, θ : 振り子の角度 rad, l : 重心の回転半径 m, T : 加振トルク N・m, T_{fr} : クーロン摩擦トルク N・m, C : 粘性減衰係数 N・m・s, g : 重力の加速度 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, I : 慣性モーメント $\text{kg}\cdot\text{m}^2$, τ : 無次元時間, ζ : 粘性減衰比, α : 無次元加振トルク, α_{fr} : 無次元クーロン摩擦トルクである。加振トルク α には物理的な飽和を考え, 最大値 $\alpha_{\max}$ に対して $|\alpha| \leq \alpha_{\max}$ を満足するものとする。

また, θ_1 から θ_2 まで振り子が回転した場合に, 振り子の持つエネルギーは, 次式で与えられる⁽¹⁾。

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (\alpha + \alpha_{fr})(\theta_1 - \theta_2) - 2\zeta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \dot{\theta}(\tau) d\theta + \tilde{E}_1 \\ &= \frac{1}{2} \{ \dot{\theta}(\tau)|_{\theta(\tau)=\theta_2} \}^2 + (1 - \cos \theta_2) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

ただし,

$$\tilde{E}_1 = \frac{E_1}{mgl}$$

ここで E_1 は θ_1 において振り子が持っていた全エネルギーである。

3. トルク入力形のプレイバック

トルク入力形の実験装置⁽³⁾の構成を図2に示す。人間は, 振り子の動きを観察しながら操作器を操作して振り子に加わるトルクを制御し, 最終的に倒立点近傍での振り子の速度が十分に小さくなるように制御する。なお, 倒立点近傍に十分小さな速度で振り上がった場合, 振り子は自動的に安定化される。

操作器はジョイスティックを用いた3値オンオフ形である。オンのときに振り子に加わるトルクの絶対値は $\alpha_{\max}$ 以下に制限されているため, 振り子を倒立点まで運動させるためには, 適切なタイミングでトルクを切換え, 次第に振幅を増大させなければならない。

図3 トルク入力形を用いたプレイバック

振り子はボールベアリングで支持し, 歯車を介して DC サーボモータ (山洋電気 SM-26) により駆動した。モータは, 安定した駆動トルクを発生させるために定電流駆動した。また振り子の角度は分解能 14 bit のロータリエンコーダで計測した。

図3はプレイバック実験でのデータの一例である。操作量を記憶した際の振り子の動き $\theta^A(\tau)$ とプレイバックした際の振り子の動き $\theta^B(\tau)$ は, 外乱などの影響により同じにはならず, 多くの場合倒立点近傍で全く異なった動きをする。このように誤差が生じてしまう理由は次のように考えることができる。

運動方程式(1)を次のような状態方程式で表す。

$$\dot{x} = f(x) + g\alpha \dots \dots \dots (3)$$

ただし,

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x = [x_1 \ x_2]^T$$

$$f = [f_1 \ f_2]^T, g = [0 \ 1]^T$$

$$f_1 = x_1$$

$$f_2 = -2\zeta x_2 - \sin x_1$$

なお右肩の添字 T は転置を表す。状態 x と加振トルク α の微小変動 $\Delta x, \Delta \alpha$ を考え, 式(3)をテーラー展開して一次の項までとると

$$\Delta \dot{x} = F(x) \Delta x + g \Delta \alpha \dots \dots \dots (4)$$

が得られる。ただし,

$$F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -2\zeta \end{bmatrix} \quad \dots\dots (5)$$

式(4)の固有値 λ_1, λ_2 は次式で与えられる。

$$\lambda_{1,2} = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \cos x_1} \quad \dots\dots (6)$$

したがって式(4)のシステムは $x_1 \geq \pi/2$ で不安定であり、 $x_1 = \pi$ で不安定根の実部は最大になる。このことから図3のプレイバック制御は、特に倒立点近傍において外乱や系の特性変動に対して敏感であるということができる。

また図3では θ^A と θ^B の間で初期角度が約 0.2° 異なっている。これはクーロン摩擦力によるもので、その大きさは、理論的には

$$\theta_{\text{INIT}} \leq \sin^{-1} \alpha_r \quad \dots\dots (7)$$

と表される。以下、 θ_{INIT} を初期角度誤差と呼ぶことにする。振り子の振上げ運動は非線形であるので、初期角度誤差はたとえ微小であっても、倒立点近傍での振り子の運動軌道に対し予測の困難な影響を及ぼす。

実験で得られた多くの例において、初期角度誤差が零の場合にも誤差が生じることが確認された。そこで、実験で得た振り子の運動のデータから振り子にかかるトルクを求め、それをプレイバックの前後で比較することにより、系に加わる外乱を評価する。

振り子にかかるトルクを求めるために、振り子の速度を次の中心差分式

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2\Delta\tau} (\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) \quad \dots\dots (8)$$

で近似して、エネルギー式(2)を書き換える。

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{\zeta}{2\Delta\tau} (\theta_{i+1} - \theta_{i-1} + \theta_i - \theta_{i-2}) \\ & + \frac{1}{8(\Delta\tau)^2} (\theta_{i+1}^2 + \theta_{i-1}^2 - \theta_i^2 - \theta_{i-2}^2 \\ & - 2\theta_{i+1}\theta_{i-1} + 2\theta_i\theta_{i-2}) + \frac{1}{\theta_i - \theta_{i-1}} \\ & \times (\cos \theta_{i-1} - \cos \theta_i) + \alpha_r \cdot \text{sgn}(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) \end{aligned} \quad \dots\dots (9)$$

この式を用いて実験データを処理した結果、プレイバックの際に加わる外乱トルクは図4のように求まった。これよりこの外乱は、ほぼ次のような性質を持つガウス白色雑音であることがわかった。

平均=0

分散=0.00015

人間が行った制御を記憶して利用するためには、上で述べた二つの要因、すなわち初期角度誤差と外乱トルクによる誤差の発生を抑える必要がある。

そこで、プレイバック時の構成として図5を考え

る。これは、図2のプレイバック時の構成に点線の部分を付け加えたものである。すなわち、操作量を記憶するだけでなく、振り子の運動軌跡も記憶しておき、プレイバックの際に振り子の動きを測定してフィードバックをかけるというものである。本報で用いた制御則は、次の式で表されるような比例・微分 (PD) 形である。

$$du = K_p \cdot e_i + K_d (e_i - e_{i-1})$$

$$e_0 = 0, e_i = \theta_i - \theta_{i-1} \quad \dots\dots (10)$$

ただしこのような補正を行うためには、操作量を記憶する際に、後に操作量の補正が行えるだけの一定の余裕をトルクに残しておく必要がある。余裕の程度は、比例ゲイン K_p 、および微分ゲイン K_d の大きさに依存する。ここでは、初期角度誤差 θ_{INIT} 、および外乱トルクを考慮に入れた数値シミュレーションにより $K_p = 10$ 、 $K_d = 20$ と決定した。実験結果を図6に示す。倒立点近傍においても安定にプレイバックを実現している。

4. 目標位置入力形のプレイバック

3章の方法では、操作量と振り子の角度の両方を記憶しなければならず、またトルクに一定の余裕を残して操作量を記憶する必要がある。また余裕の程度は、

図4 プレイバックの際に加わる外乱トルク

図5 フィードバック付きのトルク入力形

ゲインや外乱の大きさに影響されるため見積もりが難しい。この制限は実際の応用上問題となる。そこでこのような制限のない方法を次に考える。

前述のように、プレイバック時の軌道誤差が増大するのは振り子の角度が $\theta \geq \pi/2$ を超えた場合、特に倒立点に十分近づいた場合に顕著である。いいかえると、フィードバックのない図2の構成を用いた場合でも、振上げ途中では大きな軌道誤差を生じないと考えて差し支えない。したがって、倒立点近傍の比較的狭い範囲の振り子の運動を安定化できれば、良好なプレイバックが実現できると考えられた。

この考えに基づいて構成したものが、図7の目標位置入力形である。この方法では、人間はトルクの代わりに振り子の目標位置を作り出して制御する。振り子に加わるトルクの大きさの上限は、飽和特性を持つ要素により制限されている。そのため、目標位置を入力とするフィードバックループが正常に機能するのは、飽和しない範囲においてのみであることに注意する必要がある。

この目標位置入力形の装置を用いた手動制御実験を行った。図8は倒立に成功した操作パターンの例であり、倒立点近傍でトルクに飽和を生じていないことが

図6 フィードバック付きのトルク入力形を用いたプレイバック

わかる。したがって、倒立点近傍でフィードバックが有効に機能しており、目標位置のみを用いたプレイバックが良好に行われると予想される。

プレイバック実験の結果を図9に示す。目標位置を再生するだけで、軌道誤差の小さい良好なプレイバック制御が行えることがわかる。

5. 討 論

プレイバックにおける倒立の成功率に関してトルク入力形と目標位置入力形の間に大きな差は認められない。しかし、トルク入力形は操作量と振り子の運動軌跡の両方を記憶しなければならないのに対して、目標位置入力形の場合には操作量、すなわち目標位置のみを記憶すれば良いという特長がある。さらにトルク入力形の不利な点は、プレイバックの際にフィードバックループが機能しなければならないため、ゲインに応じたトルクの余裕を記憶の際に考慮に入れなければならないことである。

一方、振り子を振り上げるという操作を人間に行わせる場合、飽和のある系に対して目標位置を与えて制御するよりも、トルクを与えるほうが感覚的には合うようである。したがってトルク入力形のほうが人間にとって操作が容易であり、短時間で訓練を終了できる可能性がある。一方、倒立点近傍での微妙な操作は、目標位置入力形のほうが適しているようである。

このように、人間の制御能力を利用して制御則を得ようとする場合には、人間と機械とのインタフェースをどのようにするかが重要な課題である。

6. 結 言

これまでいくつかの報告を通じて、単純な構造ながら非線形な特性を持つために解析的に制御則を得るのが困難な力学系である単振り子を取りあげ、その振上げ制御について検討してきた。

はじめに振り子の基礎的な特性を実験的に求め⁽¹⁾、粘性減衰があまり大きくないときに振り子の振上げ則

図7 目標位置入力形の構成

図8 目標位置入力形の場合に振り子に加わるトルク

図9 目標位置入力形を用いたプレイバック

を簡単に求めることができる図式的な方法を提案した⁽²⁾。前報では人間の制御能力に関する実験を行い、人間の制御能力を利用して解析的な取扱いが困難な対象の制御に利用できることを確認した⁽³⁾。

そして本報では、人間の制御能力を利用する方法として、人間の行った制御操作をそのまま時系列データとして記憶し、それを実時間で再生する方法について実験的に考察した。この方法は、人間の制御能力の利用法としては非常に単純で適用しやすいが、記憶するデータ量が多くなってしまうこと、制御対象の特性が変化した場合には新たに実験を行い、データを記憶しなおさなければならないなどの欠点がある。したがっ

て、ここで提案した手法を実際に用いるためには、データの圧縮化法、複数の制御則の効率的な記憶と利用法、制御対象の特性変動に関する対策などを行わなければならないと考える。

おわりに、実験などに協力していただいた東北大学機械工学科大学院生 佐藤晴彦君に感謝する。

文 献

- (1) 結城・猪岡・小林, 機論, 52-475, C(1986), 1026.
- (2) 高橋・猪岡, 機論, 53-485, C(1987), 107.
- (3) 高橋・佐々木・猪岡, 機論, 53-489, C(1987), 1042.