回転円板の振動解析*

(第1報, 外周の一点で支持された場合)

小 寺 忠^{*1}

Vibration Analysis of a Rotating Disc (1st Report, A Disc with a Support on the Outer Periphery)

Tadashi KOTERA

In the present paper, vibrations in a rotating disc with a clamped inner circle, a free outer periphery and a support on the outer periphery are analyzed. A characteristic equation is obtained without introducing the so-called Green's function, and relations between natural frequencies and an angular velocity of rotation are determined. Due to the existence of the support, these relations are more complicated than those of a disc without the support. Also, figures of eigenmodes are shown. Nodal radii do not remain during the rotation of the disc.

Key Words: Theory of Vibration, Vibration of Disc, Rotating Disc, Bessel Function, Natural Frequency, Eigenmode

1. 緒 言

鉄道車輪の騒音対策の基礎研究として、車輪とレールの振動を理論と実験の両面から研究した論文はかなりの多い^{(1)~(11)}。それらの理論解析では、実際の車輪の形状が極めて複雑なため、中央部固定・周辺の一点で支持・その他の周辺は自由という仮定が設けられている。また、車輪モデルとは全く無関係に、点支持の円板の振動を解析した文献もかなりある^{(12)~(14)}。上のいずれの文献においても、あくまでも非回転円板の固有振動数や固有モードが求められているだけで、回転円板のそれらを求めたものはほとんど見あたらない。ただし、文献(17)~(19)では、フレキシブルディスクの回転数と固有振動数の関係が有限要素法によって示されているが、回転時の振動数の計算の際には点支持という条件は考えに入れられていない。

本報告では、中央部固定・周辺の一点で支持(その他の周辺は自由)という回転円板の固有振動数と固有モードを求めている。

2. 理論解析(非回転の場合)

まず最初に、厚さが一様な薄い非回転円板のたわみ振動を考えよう。これについてはすでに文献(1)でもグリーン関数を用いて考察されているが、本報ではグリーン関数によらない解析法を示す。

運動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^4 \nabla^4 u = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

で表される。ここで u は変位、 $c^4 = Eh^2/12\rho(1-\nu^2)$ 、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 ρ は密度、 h は板の厚さである。また、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

この解を

$$u = U(r, \theta) \cos pt \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$U(r, \theta) = R_n(r) \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

と仮定し、 $\sqrt{\rho} r/c = z$ と置くことによって

$$\frac{d^2 R_n}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR_n}{dz} - \left(\frac{n^2}{z^2} \pm 1 \right) R_n = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

なるベッセルの方程式が得られ、ある n に対する R_n の一般解は

* 平成元年3月24日 関西支部第64期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和63年7月18日。

*1 正員、神戸大学工学部 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)。

$$R_n(z) = A_n J_n(z) + B_n N_n(z) + C_n I_n(z) + D_n K_n(z) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ようになる。ただし $J_n(z)$ は n 次第1種ベッセル関数, $N_n(z)$ は n 次第2種ベッセル関数, $I_n(z)$ は n 次第1種変形ベッセル関数そして $K_n(z)$ は n 次第2種変形ベッセル関数である。

さて、本報では図1のように $r=b$ で固定され、 $r=a$, $\theta=0$ で点支持、 $r=a$, $\theta \neq 0$ で自由な円板を考えている。これは次の二つの場合に分けて考えることができる。

(1) $U(r, \theta) = R_n(r) \sin n\theta$ の場合 この場合は $\theta=0$ のとき必ず $U=0$ となるので、 $r=a$, $\theta=0$ で支持という条件は特に考える必要はなく、 $r=b$ で固定、 $r=a$ で自由とするだけでよい。したがって境界条件は次のように書ける。

$$r=b \text{ で } u=0, \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$r=a$ で

(曲げモーメントが0)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

(せん断力が0)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{2-\nu}{a^2} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{3-\nu}{a^3} u \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで $a\sqrt{p}/c = \lambda$, $b/a = \alpha$ とおけば、式(6)~(9)より

$$A_n J_n(\lambda \alpha) + B_n N_n(\lambda \alpha) + C_n I_n(\lambda \alpha) + D_n K_n(\lambda \alpha) = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$A_n \left\{ \frac{n}{\lambda \alpha} J_n(\lambda \alpha) - J_{n+1}(\lambda \alpha) \right\}$$

$$+ B_n \left\{ \frac{n}{\lambda \alpha} N_n(\lambda \alpha) - N_{n+1}(\lambda \alpha) \right\}$$

$$+ C_n \left\{ \frac{n}{\lambda \alpha} I_n(\lambda \alpha) + I_{n+1}(\lambda \alpha) \right\}$$

$$+ D_n \left\{ \frac{n}{\lambda \alpha} K_n(\lambda \alpha) - K_{n+1}(\lambda \alpha) \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$A_n [-J_n(\lambda) \{ \lambda^2 - n(n-1)(1-\nu) \} + \lambda(1-\nu) J_{n+1}(\lambda)]$$

$$+ B_n [-N_n(\lambda) \{ \lambda^2 - n(n-1)(1-\nu) \} + \lambda(1-\nu) N_{n+1}(\lambda)] + C_n [I_n(\lambda) \{ \lambda^2 + n(n-1)(1-\nu) \} - \lambda(1-\nu) I_{n+1}(\lambda)] + D_n [K_n(\lambda) \{ \lambda^2 + n(n-1)(1-\nu) \} + \lambda(1-\nu) K_{n+1}(\lambda)] = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$A_n [-J_n(\lambda) \{ n\lambda^2 + n^2(n-1)(1-\nu) \} + \lambda \{ \lambda^2 + n^2(1-\nu) \} J_{n+1}(\lambda)] + B_n [-N_n(\lambda) \{ n\lambda^2 + n^2(n-1)(1-\nu) \} + \lambda \{ \lambda^2 + n^2(1-\nu) \} N_{n+1}(\lambda)] + C_n [-I_n(\lambda) \{ -n\lambda^2 + n^2(n-1)(1-\nu) \} - \lambda \{ -\lambda^2 + n^2(1-\nu) \} I_{n+1}(\lambda)] + D_n [-K_n(\lambda) \{ -n\lambda^2 + n^2(n-1)(1-\nu) \} + \lambda \{ -\lambda^2 + n^2(1-\nu) \} K_{n+1}(\lambda)] = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

なる連立方程式が得られる。これらが非自明解 A_n , B_n , C_n , D_n をもつための必要十分条件から λ についての特性方程式が得られ、根 λ と比 $A_n : B_n : C_n : D_n$ が決まり、振動モードを描くことができる。この場合 $\theta=0$ は $n=0$ の場合を除いて明らかに節となる。

(2) $U(r, \theta) = R_n(r) \cos n\theta$ の場合 ある n に対する成分 U_n は単独では $\theta=0$ で $u=0$ とすることは不可能で、式(3)の

$$U(r, \theta) = R_n(r) \cos n\theta$$

の代わりに

$$U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) \cos n\theta \quad \dots\dots\dots (14)$$

を用いる。式(6)~(8), (10)~(12)は成立するが、今度は支点反力が存在するので式(9)と式(13)が成立しなくなる。今、支点反力の振幅を F とおけば、式(9)の代わりに

$$D \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{2-\nu}{a^2} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{3-\nu}{a^3} u \right) \right]_{r=a} = F \cos pt \cdot \delta(\theta)/\alpha \quad \dots\dots\dots (15)$$

が成立する。ただし、 $D = c^4 h \rho$ である。

δ 関数をフーリエ級数に展開して

$$\delta(\theta) = \frac{1}{2\pi} (1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta) \quad \dots\dots\dots (16)$$

と置くことにより、式(13)の代わりに

$$A_n [-J_n(\lambda) \{ n\lambda^2 + n^2(n-1)(1-\nu) \} + \lambda \{ \lambda^2 + n^2(1-\nu) \} J_{n+1}(\lambda)] + B_n [-N_n(\lambda) \{ n\lambda^2 + n^2(n-1)(1-\nu) \} + \lambda \{ \lambda^2 + n^2(1-\nu) \} N_{n+1}(\lambda)] + C_n [-I_n(\lambda) \{ -n\lambda^2 + n^2(n-1)(1-\nu) \} - \lambda \{ -\lambda^2 + n^2(1-\nu) \} I_{n+1}(\lambda)] + D_n [-K_n(\lambda) \{ -n\lambda^2 + n^2(n-1)(1-\nu) \} + \lambda \{ -\lambda^2 + n^2(1-\nu) \} K_{n+1}(\lambda)]$$

図1 取扱う円板の模型図

$$+ \lambda \{-\lambda^2 + n^2(1-\nu)\} K_{n+1}(\lambda) \\ = \varepsilon_n \cdot a^2 F / (2\pi D) \quad (17)$$

が成立する。ただし $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_n=2(n \geq 1)$ 。

式(10)～(12), (17)により A_n, B_n, C_n, D_n が未知数 F の関数として与えられるので, それらを

$$A_n = \frac{a^2 F}{2\pi D} \varepsilon_n b_{1n}, \quad B_n = \frac{a^2 F}{2\pi D} \varepsilon_n b_{2n} \\ C_n = \frac{a^2 F}{2\pi D} \varepsilon_n b_{3n}, \quad D_n = \frac{a^2 F}{2\pi D} \varepsilon_n b_{4n}$$

と表して, 支点の条件

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(\lambda) = 0 \quad (18)$$

に代入すると

$$\frac{a^2 F}{2\pi D} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n [b_{1n} J_n(\lambda) + b_{2n} N_n(\lambda) \\ + b_{3n} I_n(\lambda) + b_{4n} K_n(\lambda)] = 0 \quad (19)$$

となる。式(19)より $F \neq 0$ となるための条件は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n [b_{1n} J_n(\lambda) + b_{2n} N_n(\lambda) \\ + b_{3n} I_n(\lambda) + b_{4n} K_n(\lambda)] = 0 \quad (20)$$

となる。これを解けば固有値 λ および固有振動数 $p = (c\lambda/a)^2$ が得られる。したがって文献(1)のようにグリーン関数を併用する必要はない。

3. 理論解析 (回転円板の場合)

今度は円板が θ の負の向きに角速度 ω で回転する場合を考える。 θ を円板に固定した座標, ϕ を静止座標とし, 座標変換

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \theta - \omega t \\ \tau &= t \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

を導入すれば, 遠心力と半径方向の荷重の影響を無視したときの運動方程式(1)は, 次のようになる。

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 + c^4 \nabla^4 \right\} u = 0 \quad (22)$$

この解を

$$u = \cos(q\tau + n\phi) R_n(r) \quad (23)$$

と仮定してみると

$$\left\{ -(q - n\omega)^2 + c^4 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 \right\} R_n(r) \\ = 0 \quad (24)$$

となり,

$$r/c \cdot \sqrt{q - n\omega} = z_1 \quad (25)$$

と定義すれば, 式(24)の一般解は

$$R_n(z_1) = A_n I_n(z_1) + B_n N_n(z_1) \\ + C_n I_n(z_1) + D_n K_n(z_1) \quad (26)$$

と書ける。ここに A_n などは境界条件より決まる係数である。

同様に

$$u = \cos(q\tau - n\phi) R_n(r) \quad (27)$$

と仮定してみると

$$R_n(z_2) = A_n I_n(z_2) + B_n N_n(z_2) \\ + C_n I_n(z_2) + D_n K_n(z_2) \quad (28)$$

となる。ただし

$$r/c \cdot \sqrt{q + n\omega} = z_2 \quad (29)$$

こうして式(22)の解は

$$u_n = \cos(\rho\tau + n\phi) R_{n1}(z_1) \\ + \cos(q\tau - n\phi) R_{n2}(z_2) \quad (30)$$

と表される。なお, このほかにも

$$u_n = \sin(q\tau + n\phi) R_{n3}(z_1) \\ + \sin(q\tau - n\phi) R_{n4}(z_2) \quad (31)$$

が解になるが, 固有振動数や固有モードの形を求める場合には, 式(30)を考えるだけで十分であることが確かめられる。[式(23), (27)は単独では, 方程式(22)は満たすが支持点でのせん断力の条件式を満たさないのて, 解は(30)のように置く]。

さて, ここで

$$\lambda_1 = a/c \cdot \sqrt{q - n\omega} = \sqrt{Q - n\Omega}, \\ \lambda_2 = a/c \cdot \sqrt{q + n\omega} = \sqrt{Q + n\Omega}, \\ Q = (a/c)^2 \cdot q, \quad \Omega = (a/c)^2 \cdot \omega, \\ \alpha = b/a$$

と置いて, 式(6), (7), (9), (15)と同様の境界条件を用いると

$$A_n I_n(\lambda_i \alpha) + B_n N_n(\lambda_i \alpha) + C_n I_n(\lambda_i \alpha) \\ + D_n K_n(\lambda_i \alpha) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (32)$$

$$A_n \left\{ \frac{n}{\lambda_i \alpha} J_n(\lambda_i \alpha) - J_{n+1}(\lambda_i \alpha) \right\} \\ + B_n \left\{ \frac{n}{\lambda_i \alpha} N_n(\lambda_i \alpha) - N_{n+1}(\lambda_i \alpha) \right\} \\ + C_n \left\{ \frac{n}{\lambda_i \alpha} I_n(\lambda_i \alpha) + I_{n+1}(\lambda_i \alpha) \right\} \\ + D_n \left\{ \frac{n}{\lambda_i \alpha} K_n(\lambda_i \alpha) - K_{n+1}(\lambda_i \alpha) \right\} \\ = 0 \quad (i=1, 2) \quad (33)$$

$$A_n \left\{ -\lambda_i^2 J_n(\lambda_i) \right. \\ + (1-\nu) \{ n(n-1) J_n(\lambda_i) + \lambda_i J_{n+1}(\lambda_i) \} \\ + B_n \left\{ -\lambda_i^2 N_n(\lambda_i) \right. \\ + (1-\nu) \{ n(n-1) N_n(\lambda_i) + \lambda_i N_{n+1}(\lambda_i) \} \\ + C_n \left\{ \lambda_i^2 I_n(\lambda_i) \right. \\ + (1-\nu) \{ n(n-1) I_n(\lambda_i) - \lambda_i I_{n+1}(\lambda_i) \} \\ + D_n \left\{ \lambda_i^2 K_n(\lambda_i) \right. \\ + (1-\nu) \{ n(n-1) K_n(\lambda_i) + \lambda_i K_{n+1}(\lambda_i) \} \\ = 0 \quad (i=1, 2) \quad (34)$$

$$A_n \left\{ -J_n(\lambda_i) \{ n\lambda_i^2 + n^2(n-1)(1-\nu) \} \right. \\ + \lambda_i \{ \lambda_i^2 + n^2(1-\nu) \} J_{n+1}(\lambda_i) \}$$

$$\begin{aligned}
& + B_{ni}[-N_n(\lambda_i)\{n\lambda_i^2 + n^2(n-1)(1-\nu)\} \\
& + \lambda_i\{\lambda_i^2 + n^2(1-\nu)\}N_{n+1}(\lambda_i)] \\
& + C_{ni}[-I_n(\lambda_i)\{-n\lambda_i^2 + n^2(n-1)(1-\nu)\} \\
& - \lambda_i\{-\lambda_i^2 + n^2(1-\nu)\}I_{n+1}(\lambda_i)] \\
& + D_{ni}[-K_n(\lambda_i)\{-n\lambda_i^2 + n^2(n-1)(1-\nu)\} \\
& + \lambda_i\{-\lambda_i^2 + n^2(1-\nu)\}K_{n+1}(\lambda_i)] \\
& = F \cdot \varepsilon_n a^2 / (4\pi D) \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots (35)
\end{aligned}$$

が得られる。 ε_n と F は2章の場合と同じである。以上の式より係数 A_{ni} , B_{ni} , C_{ni} および D_{ni} が F を用いて表されるので、それらを支点の条件(各モードごとに $r=a$, $\phi=0$ で $u=0$)すなわち

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{R_{n1}(\lambda_1) + R_{n2}(\lambda_2)\} = 0 \dots\dots\dots (36)$$

に代入することにより、 Ω が与えられたときの Q の値が求められる。したがって、式(36)からわかるように n は固有振動の次数を示すものではなく、また、解(30)からわかるように、各固有振動の節は静止せずに時間とともに移動する。

4. 数値計算例

4・1 非回転円板の場合 無次元量 λ に影響を及ぼすのは $\alpha=b/a$ とポアソン比 ν だけであるので、ここでは E , h , a , b および ρ の具体的な値は特に与えずに、 $\alpha=1/3$, $\nu=0.3$ の場合の数値計算結果のみを示す。

表 1 非回転時の λ_j^0 の値($\alpha=1/3$, $\nu=0.3$)

n \ j	1	2	3
1	2.69959	7.00605	11.7698
2	2.94236	7.42433	12.0555
3	3.70014	8.10045	12.5318

$$\lambda = 2.69959$$

図 2 非回転時の振動モード($n=1$, $j=1$)

す。

(1) $U(r, \theta) = R_n(r) \sin n\theta$ の場合 ある n に対する特性根 λ を λ_j^0 ($j=1, 2, \dots$)と書けばそらは表1のようになる。また、 $D_n=1$ と置いたときの固有モードの例($n=1$, $j=1$)を図2に示す。ただし、ベッセル関数などは、十分に収束しているとみなせる級数の第20項までで近似している。

(2) $U(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) \cos n\theta$ の場合 このときの λ は n ごとに分離されないで、 λ_j ($j=1, 2, \dots$)と書くことにする。これらの値は n をどこまで考慮に入れるかに依存するので、まず、考慮に入れる n の数と λ_j の関係を求めて、それを表2に示す。これらの結果は文献(1)のものと若干異なっている。表2より、 $n=0 \sim 5$ を考慮に入ればかなり精度が良いことがわかる。このときの λ_j の値と固有モードを図3に示す。

4・2 回転円板の場合 無次元固有振動数 Q と無次元回転角速度 Ω の関係を図4に示す。考慮に入れる n を大きくすれば精度が良くなるが、計算時間もまた長くなる。それで本報では $n=5$ までを考慮に入れた場合の結果を示している。これより、回転時の固有振動数が円板の回転角速度によって複雑に変化することがわかる。なお、縦軸の●印は非回転時の固有振動数に対応しており、この印がない「交点」は実際には交点ではなく、固有振動数ではない。

表 2 非回転時の考慮に入れる n と λ_j の値との関係

j \ n	3まで	4まで	5まで	6まで
1	2.70398	2.70398	2.70398	2.70398
2	2.84627	2.84478	2.84411	2.84373
3	3.49106	3.47058	3.46185	3.45714

$$\lambda = 2.7039818$$

図 3 非回転時の振動モード($j=1$)

図 4 回転時の Q と Ω の関係

(a) $\Omega = 0.05$

(a) $Q = 3.97$ の場合

(b) $\Omega = 0.25$

(b) $Q = 5.3669$ の場合

(c) $\Omega = 1$

(c) $Q = 6.56965$ の場合

(d) $\Omega = 1.5$

図 5 回転時の振動モードの例 ($\Omega = 2.5$)

図 6 回転時の振動モード(最低次モード)

図5は、 $\Omega=2.5$ のときのモード形状を表している。このモード形状が

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \phi, t)$$

で表されることから、節の位置は静止せず、時間とともに移動することがわかる。いずれの図も、振動の一周を9等分したときの節の変化を表している。図5(a)は $Q=3.97$ の場合で、一周の間に円板は0.63回転し、図5(b)は $Q=5.3669$ の場合で0.466回転し、そして図5(c)は $Q=6.56965$ の場合で0.38回転する。円板の周縁での節の発生・消失が見られる。

図6は、最低次のモードの振動の様子が Ω によってどのように変化するかを示したもので、 Ω が小さいときは非回転時の第1モードに近く、節の数は少ないが、 Ω が大きくなるにつれて節の数がふえている。

5. 結 言

$r=b$ で固定、 $r=a, \theta=0$ (回転時は $\phi=0$)の一点で支持、他の周縁は自由の様な厚さの円板の、非回転時および回転時の固有振動数と固有モードを求めた。それらの結果をまとめると次のようになる。

(1) 非回転時の固有振動数と固有モードを、従来の手法と異なる手法で求めることができた。特に

$$U(r, \theta) = R_n(r) \cos n\theta$$

の形の振動の固有振動数は、従来の値とかなり異なっている。

討 論

〔質問〕 長 南 征 二〔東北大学工学部〕

回転円板の解析では遠心力の影響は無視できず、たとえば(0, 1)モードは危険速度を持たないにもかかわらず遠心力を無視すると同モードが危険速度を持つという結果が生じるなど、種々不備な結果をもたらす(付1)(付2)。このことを考えると貴解析のモデルは静止ガイドを有する回転円板と考えるよりは、回転ガイドを有する静止円板と考えたほうが妥当のように思える。ご意見をお伺いしたい。

〔回答〕 全くお説のとおりである。著者自身も計算で遠心力を無視した場合と考慮に入れた場合とを比較しているが、回転時の解を非回転時の固有関数で級数に展開せずに解析したり、直接数値計算によらないで解を求めようと努めたため、このようなモデルになってしまった。

〔質問〕 松 久 寛〔京都大学工学部〕

(2) 回転時の固有振動数は、運動方程式の解を(30)のように置くことにより求められるが、図4のように回転数に依存する。図の変数の範囲では $n=5$ ぐらいまで考慮に入れればかなり精度の良い結果が得られる。

(3) 回転時の固有モードは複雑で、非回転時のように節は静止せず、時間とともに移動する。

文 献

- (1) Sato, S. and Matsuhisa, H., *Bull. JSME*, 21-160 (1978), 1475.
- (2) Matsuhisa, H. and Sato, S., *Bull. JSME*, 22-173 (1979), 1626.
- (3) 松久・ほか2名, 機論, 46-409, C (1980), 1044.
- (4) 松久・ほか2名, 機論, 48-434, C (1982), 1544.
- (5) 松久・ほか2名, 機論, 49-442, C (1983), 993.
- (6) 松久・ほか2名, 機論, 50-452, C (1984), 635.
- (7) 末岡・ほか2名, 機論, 49-440, C (1984), 535.
- (8) 荒井, 機論, 49-440, C (1983), 543.
- (9) 荒井, 機論, 49-440, C (1983), 553.
- (10) 荒井, 機論, 49-443, C (1983), 1161.
- (11) 荒井, 機論, 49-445, C (1983), 1500.
- (12) 中沢, 機論, 33-256 (昭42), 1951.
- (13) Irie, T. and Yamada, G., *Bull. JSME*, 21-161 (1978), 1978.
- (14) Chi, C., *AIAA J.*, 10-2 (1972), 142.
- (15) 小野・ほか3名, 機論, 51-466, C (1985), 1389.
- (16) 小野・ほか2名, 機論, 52-473, C (1986), 326.
- (17) 小野・ほか1名, 機論, 52-484, C (1986), 3100.
- (18) 保坂・ほか1名, 機論, 52-474, C (1986), 490.
- (19) 河野・ほか3名, 機論, No. 870-3 (1987-3), 129.

図4について質問させていただく。

(1) 1930 ページ右欄下3行めに“縦軸の●印は非回転時の固有振動数に対応しており、この印がない「交点」は実際には交点ではなく、固有振動数ではない”と記述されているが、これも式(20)より得られる一点支持の固有振動数ではないか。

(2) Ω が大きくなると遠心力の影響が現れるので、これを無視した解析では Ω が1または2より小さい範囲で論じるべきであると思う。また Ω が5あたりから不安定もでてきていると思う。

〔回答〕 (1) 当然固有振動数ではないかと思ひ、何度も計算したが、 $\Omega=0$ とおいてしまうと特性

(付1) Hutton, S. G., ほか2名, *J. Sound Vib.*, 112 (1987), 527.

(付2) Adams, G. G., *Int. J. Mech. Sci.*, 29 (1987), 525.

方程式の根が得られなかった。しかし、その後のプログラムの変更により固有振動数であることが確認できている。

(2) 全くおっしゃるとおりである。著者自身、松久氏や長南氏と異なる手法で遠心力を考慮に入れた場合の結果を得ているが、本報は解を非回転時の固有関

数で級数展開したり、あるいは直接数値的に求めたりするのではなく、あくまでも一般解を求めてから係数の存在条件から振動数方程式を得るよう努めたため、このような事実上非回転円板（支点だけが回転）の振動解析に終わってしまった。