マニプレータ制御系の一般化根軌跡*
(第1報, 定数フィードバックの場合)古 莊 純 次*¹, 佐 橋 利 康*²Multivariable Root-Loci of Control Systems of Robot Manipulators
(1st Report, The Case of Constant Gain Feedback)

Junji FURUSHO and Toshiyasu SAHASHI

Current robot manipulators are controlled by decentralized or independent joint controllers. That is, each joint is locally controlled using only local information. We discuss the asymptotic behavior of the closed loop eigenvalues of such systems when the high gain feedback is implemented. The high-gain feedback is an effective control method because of its robustness to parameter variations and disturbances. By using a theory of multivariable root-loci, we present three propositions about the behavior of the closed loop eigenvalues in the case that the constant gain controller is used. It is supposed that the obtained results are useful in the control system design of manipulators.

Key Words: Robot Manipulator, Multivariable System, Root-loci, Servo Control, High-gain Feedback, Independent Joint Control

1. 緒 言

マニプレータの制御に関して多くの方法が提案されているが⁽¹⁾⁽²⁾, 現在運転中のマニプレータの多くは, 各関節ごとにフィードバック制御器を持っており, 比較的簡単な制御方式で制御されている。しかし, 簡単な局所フィードバック制御方式といえども, 関節の数が多いと調節すべきパラメータの数は非常に多くなる。そこで, 各調節パラメータと固有値との関連を与える固有値軌跡の性質がわかれば, パラメータを調節する際の目安として有用である。

本報告では, 定数フィードバック制御器(動的要素を持たない制御器)を各関節の局所フィードバック制御器として用いた場合の固有値軌跡の性質について論じる。多くのマニプレータシステムでは, パラメータ変化や外乱に対して強い高ゲインフィードバック制御が行われている。そこで, 高ゲイン時の固有値軌跡が実用面から特に重要である。本報告では, 高ゲインフィードバック制御時の閉ループシステムの固有値の挙動について3~5章で議論し, 各章ごとに固有値軌跡

に関する一つの命題を与える。

3章では, 直流サーボモータで駆動されるマニプレータを扱い, 関節角度, 関節速度および電流信号をフィードバック制御する場合について考えた。4章では, 3章と同じマニプレータに対して, 関節角度と関節速度をフィードバック制御する場合を考えた。5章では, トルクが直接制御できる場合を扱い, 関節角度と関節速度をフィードバック制御する場合を考えた。

以上の命題を導く当たっては, Kouvaritakis⁽³⁾⁽⁴⁾らの multivariable root-loci (一般化根軌跡あるいは多変数根軌跡と呼ばれる)の理論を用いた。Kouvaritakisらの論文では, 本報告で必要とする部分が散在するので, 定理1, 2として3, 4章にまとめ, 本報告で与える命題の誘導を容易にした。

2. システムの記述

m リンクマニプレータの運動方程式は次式で表される⁽¹⁾。

$$A(\theta)\ddot{\theta} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{ij}(\theta)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j + d(\dot{\theta}) + g(\theta) = T \quad \dots\dots\dots (1)$$

* 平成元年3月10日 東海支部第38期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和63年1月12日。

*¹ 正員, 岐阜大学工学部 (〒501-11 岐阜市柳戸1-1)。

*² 学生員, 岐阜大学大学院

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_m \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

上式において、 θ_i は第 i 関節の基準状態からの変位量（回転形の場合は角度であり、スライド形の場合は移動量である）であり、 T_i は第 i 関節に働く力である。また、 $A(\theta)$ は慣性行列であり、正値対称行列である。式(1)の左辺第2項は求心力項およびコリオリ力項を表しており、 $d(\dot{\theta})$ は各関節における摩擦力を表しており、 $g(\theta)$ は重力項を表している。式(1)を $\theta = \theta_s$, $\dot{\theta} = 0$, $T = T_s$ のまわりで線形化すると、次のようになる。

$$A_s \Delta \ddot{\theta} + D \Delta \dot{\theta} + E \Delta \theta = \Delta T \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$A_s = A(\theta_s), \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & d_m \end{bmatrix},$$

$$E = (\partial g / \partial \theta)_{\theta = \theta_s} \dots\dots\dots (4)$$

次に、各関節を駆動するサーボモータについて考える。減速機などの駆動力伝達系にがたや弾性がないとすると、サーボモータの回転は各関節の運動と1対1に対応する。そこで、3章と4章では式(1)はサーボモータの運動も含んだ運動方程式とする。モータの回転トルクは電流に比例するので、これをベクトル、行列を用いて次のように表す。

$$T = Qi \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & q_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & q_m \end{bmatrix}, \dots\dots\dots (6)$$

上式において、 i は電流を表すベクトルであり、 Q は各モータのトルク定数を表す行列である。電流の変化は次の微分方程式で記述される。

$$\frac{di}{dt} = -V\dot{\theta} - Ui + Wv \dots\dots\dots (7)$$

ここで、

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{C_{v1}}{L_1} & & 0 \\ & \frac{C_{v2}}{L_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{C_{vm}}{L_m} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_1} & & 0 \\ & \frac{R_2}{L_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & & 0 \\ & \frac{1}{L_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{1}{L_m} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

$v_1, \dots, v_m$: 各モータへの入力電圧

$C_{v1}, \dots, C_{vm}$: 逆起電力定数

$L_1, \dots, L_m$: モータ巻線のインダクタンス

$R_1, \dots, R_m$: モータの巻線抵抗

式(7)を定常状態 $\theta = \theta_s$, $\dot{\theta} = 0$, $i = i_s$ のまわりの式にすると次のようになる。

$$\frac{d\Delta i}{dt} = -V\Delta \dot{\theta} - U\Delta i + W\Delta v \dots\dots\dots (9)$$

式(3), (9)をまとめて状態変数表示すると次のようになる。

$$\dot{x} = Fx + Gu \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

$$x = \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta i \end{bmatrix}, \quad u = \Delta v \dots\dots\dots (11)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 \\ -A_s^{-1}E & -A_s^{-1}D & A_s^{-1}Q \\ 0 & -V & -U \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

3. 角度・角速度・電流をフィードバックする場合

各関節における局所フィードバックに用いられる制御方式の代表的なものとして、変位を比例・微分フィードバックし、さらに電流を比例フィードバックする方法がある⁽⁵⁾。一例として、第 j 関節について示すと次のようになる。

$$v_j = K_{pj}(\theta_{rj} - \theta_j) - K_{dj}\dot{\theta}_j - K_{cj}i_j \dots\dots\dots (13)$$

K_{pj} : 第 j 関節の変位に対する比例ゲイン

K_{dj} : 第 j 関節の変位に対する微分ゲイン

K_{cj} : 第 j 関節を駆動するモータの電流 i_j に対するフィードバックゲイン

θ_{rj} : 第 j 関節に対する目標値

本研究では、フィードバックゲインを同期して変化させた場合の根軌跡の性質を調べるので、フィードバックゲイン係数 f を用いて、 K_{pj} , K_{dj} , K_{cj} を次のように置き直す。

$$K_{pj} = f \cdot k_{pj}, \quad K_{dj} = f \cdot K_{dj}$$

$$K_{cj} = f \cdot k_{cj}$$

ただし

$$k_{pj} > 0, k_{dj} > 0, k_{cj} > 0, j=1, \dots, m \dots\dots\dots (14)$$

とする。

次に、局所フィードバック制御器をまとめて表すことを考える。定常状態まわりの微小変化を考え、さらにベクトル、行列を用いて表すと次のようになる。

$$\Delta v = -fH_1\Delta\theta - fH_2\Delta\dot{\theta} - fH_3\Delta i \dots\dots\dots (15)$$

ここで、

$$H_1 = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 \\ & k_{p2} \\ & \ddots \\ 0 & k_{pm} \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} k_{d1} & 0 \\ & k_{d2} \\ & \ddots \\ 0 & k_{dm} \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} k_{c1} & 0 \\ & k_{c2} \\ & \ddots \\ 0 & k_{cm} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

さらに、式(11)に示す x, u を用いると、上式は次のように表される。

$$u = -fHx \dots\dots\dots (17)$$

ここで、

$$H = [H_1 : H_2 : H_3] \dots\dots\dots (18)$$

式(10)、(17)からわかるように、閉ループシステムは次のように表される。

$$\dot{x} = (F - fGH)x \dots\dots\dots (19)$$

多入力出力システムの閉ループ固有値の軌跡について、Kouvaritakis⁽³⁾⁽⁴⁾はいくつかの定理を与えている。彼らの論文では、行列 HG が最大ランクを持つか否かでシステムを二つに分類し、それぞれの場合に対して定理を与えている。

そこで、 H, G がそれぞれ式(18)、(12)で与えられるとき、 HG が最大ランクを持つかどうかを調べる。

$$HG = H_3W = \begin{bmatrix} \frac{k_{c1}}{L_1} & 0 \\ & \frac{k_{c2}}{L_2} \\ & \ddots \\ 0 & \frac{k_{cm}}{L_m} \end{bmatrix}$$

上式からわかるように、 HG は最大ランクを持ち、さらに正値行列である。

HG が最大ランクを持つ場合に対して、Kouvaritakis らが与えた定理を次に定理1としてまとめる。ただし、この定理は5章でも使うため、行列 F, G, H の寸法はそれぞれ、 $n \times n, n \times p, p \times n$ とする。

【定理1】 HG が最大ランクを持つものとする。このとき、 $F - fGH$ の n 個の固有値は、 $f \rightarrow \infty$ とすると次

のようになる。

(1) $n-p$ 個の固有値は、システム行列⁽⁶⁾⁽⁷⁾

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - F & G \\ -H & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

の特性根に漸近する。

(2) p 個の固有値は、

$$|sI_p + p\Lambda| = 0 \dots\dots\dots (21)$$

を満たしながら無限遠点に向かう。ただし、 Λ は行列 GH の Jordan 標準形の p 個の非零固有値に対応する部分行列である。

システム行列 $P(s)$ の特性根は、一入力一出力システムにおける零点に相当するものである。この定理を用いて、 $\theta, \dot{\theta}, i$ が式(15)のようにフィードバックされるシステムの固有値軌跡について考える。

まず最初に $P(s)$ の特性根を求める。今考えているシステムの F, G, H は式(12)および式(18)で与えられるので、システム行列 $P(s)$ は次のようになる。

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI & -I & 0 & 0 \\ A_s^{-1}E & sI + A_s^{-1}D & -A_s^{-1}Q & 0 \\ 0 & V & sI + U & W \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

$P(s)$ の特性根は、ユニモジュラ行列（その行列式が非零の定数となる行列）を左右からかけても変化しない⁽⁸⁾ので、次のユニモジュラ行列を $P(s)$ の右からかける。

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & sI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

さらに、左から次のユニモジュラ行列

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ sI + A_s^{-1}D & I & 0 & 0 \\ V & 0 & I & 0 \\ -H_2 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

をかけると、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2I + sA_s^{-1}D + A_s^{-1}E & -A_s^{-1}Q & 0 \\ 0 & sV & sI + U & W \\ 0 & -sH_2 - H_1 & -H_3 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

上式の行および列の入替えをし、さらに sV および $sI + U$ を消去するように適当なユニモジュラ行列を右からかけると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2I + sA_s^{-1}D + A_s^{-1}E & -A_s^{-1}Q \\ 0 & 0 & -sH_2 - H_1 & -H_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

I, W は正則行列なので, $P(s)$ の特性根を求めるには, 多項式行列

$$\begin{bmatrix} s^2I + sA_s^{-1}D + A_s^{-1}E & -A_s^{-1}Q \\ -sH_2 - H_1 & -H_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

の特性根を求めればよいことがわかる.

次に, 式(27)に右から次のユニモジュラ行列をかける.

$$\begin{bmatrix} 0 & -A_s^{-1}Q \\ -Q^{-1}A_s & -s^2I - sQ^{-1}DA_s^{-1}Q - Q^{-1}EA_s^{-1}Q \end{bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

その結果, 次のようになる.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ H_3Q^{-1}A_s & s^2H_3 \\ & +s(H_2A_s^{-1}Q + H_3Q^{-1}DA_s^{-1}Q) \\ & +(H_1A_s^{-1}Q + H_3Q^{-1}EA_s^{-1}Q) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

すなわち, 上式からわかるように, $P(s)$ の特性根は, 方程式

$$\begin{aligned} & |s^2H_3 + s(H_2A_s^{-1}Q + H_3Q^{-1}DA_s^{-1}Q) \\ & + (H_1A_s^{-1}Q + H_3Q^{-1}EA_s^{-1}Q)| = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (30)$$

の根として得られる.

次に定理1の(2)について考える. 行列 GH は式(12), (18)より次のように与えられる.

$$GH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ WH_1 & WH_2 & WH_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

GH を Jordan 標準形に変形するための座標変換行列を次のように選ぶ.

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -(WH_3)^{-1}WH_1 & -(WH_3)^{-1}WH_2 & I \end{bmatrix}$$

このとき, 座標変換後の GH は次のようになる.

$$T^{-1}(GH)T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & WH_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (32)$$

上式右辺の行列の部分行列 WH_3 は, 式(8), (14), (16)からわかるように, その対角要素が非零である対

角行列である. そこで, 行列 GH の Jordan 標準形の非零固有値に対応する部分行列 Λ は, WH_3 に等しいことがわかる. すなわち,

$$\Lambda = WH_3 = \begin{bmatrix} \frac{k_{c1}}{L_1} & 0 \\ & \frac{k_{c2}}{L_2} \\ & \ddots \\ 0 & \frac{k_{cm}}{L_m} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

以上の結果を定理1に適用すると, 次の命題1が導かれる.

《命題1》式(10)で表される m リンクマニプレータを, 式(17)のようにして制御する場合について考える. このとき, $f \rightarrow \infty$ とすると, 閉ループシステムの固有値は次のようにふるまう.

(1) $2m$ 個の固有値は,

$$\begin{aligned} & |s^2H_3 + s(H_2A_s^{-1}Q + H_3Q^{-1}DA_s^{-1}Q) \\ & + (H_1A_s^{-1}Q + H_3Q^{-1}EA_s^{-1}Q)| = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (34)$$

の根 (零点) に漸近する.

(2) m 個の固有値は,

$$s = -f \frac{k_{ci}}{L_i}, \quad i=1, 2, \dots, m \dots\dots\dots (35)$$

を満たしながら $-\infty$ へ向かう.

次に二リンクアームにこの命題を適用してみる.

(例1) 第1リンクは長さ0.4 m, 質量6.0 kg, 第2リンクは長さ0.3 m, 質量4.0 kgとする. モータの減速比は100倍とし, 重力の影響および各関節における粘性摩擦力を無視する. すなわち, A_s, D, E, Q, V, U, W は次のように与えられるものとする.

$$\begin{aligned} A_s &= \begin{bmatrix} 3.95 & 0.36 \\ 0.36 & 0.44 \end{bmatrix}, \quad D=0, \quad E=0, \\ Q &= \text{diag}\{21.6, 18.7\}, \\ V &= \text{diag}\{27.1, 10.2\}, \\ U &= \text{diag}\{300.0, 694.3\}, \\ W &= \text{diag}\{125.0, 52.6\} \end{aligned} \dots\dots\dots (36)$$

ここで, $\text{diag}\{\cdot\}$ は, 括弧内の要素をその対角要素とする対角行列を示す. また, H_1, H_2, H_3 は次のように与えることにする.

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{diag}\{2.0, 1.0\}, \\ H_2 &= \text{diag}\{0.2, 0.07\}, \\ H_3 &= \text{diag}\{1.0, 0.5\} \end{aligned}$$

このとき, 閉ループシステムの固有値軌跡は図1に示すようになる. 零点は式(34)から

$-13.5 \pm 9.5j, -15.6, -146.7$ と得られる. 命題1に示すとおり, f を大きくするにつれて, 軌跡は四つの零点および $-\infty$ に漸近している.

4. 角度および角速度をフィードバックする場合

3章では、各関節の角度、角速度および電流を各関節ごとに局所フィードバックした場合の固有値の軌跡について論じた。本章では、電流のフィードバックを省略し、角度および角速度のみをフィードバックする場合について考える。この制御則は次のように表される。

$$u = -f\bar{H}x \quad (37)$$

ここで、

$$\bar{H} = [H_1, H_2, 0] \quad (38)$$

であり、 H_1, H_2 は式(16)で定義されるものである。

Kouvaritakisら⁽³⁾の定理を用いるため、3章と同様に $\bar{H}G$ が最大ランクを持つか否かを最初に調べる。

$$\bar{H}G = 0 \quad (39)$$

$\bar{H}G$ のランクは零なので、 $\bar{H}G$ が最大ランクを持たない場合の Kouvaritakis らの結果を用いる。ただし本節の問題は、 $\text{rank}(\bar{H}G) = 0$ かつ $\bar{H}FG$ が最大ランクを持つという特殊な場合に当たるので、Kouvaritakis らの結果を使いやすいように整理し、次のようにまとめておく。ただし、行列 $F, G, \bar{H}$ の寸法は、本節のシステムの寸法に限定せず、 $n \times n, n \times p, p \times n$ とする。

【定理2】 $\bar{H}G = 0$ であり、かつ $\bar{H}FG$ が最大ランクを持つものとする。このとき、 $F - fG\bar{H}$ の n 個の固有

値は、 $f \rightarrow \infty$ とすると次のようになる。

(1) $n - 2p$ 個の固有値は、システム行列

$$\bar{P}(s) = \begin{bmatrix} sI - F & G \\ -\bar{H} & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

の特性根に漸近する。

(2) $2p$ 個の固有値は、

$$\left| I + \frac{f}{s^2} \bar{H}FG \right| = 0 \quad (41)$$

を満たしながら無限遠点へ向かう。

この定理を用いて、式(10)、(37)で記述される m リンクマニプレータの閉ループ固有値軌跡について論じる。ただし、このシステムでは $n = 3m, p = m$ である。最初に次の補題を与える。

〈補題1〉 $F, G, \bar{H}$ が式(12)、(38)および式(6)、(8)、(16)で与えられるとき、 $\bar{H}FG$ は、座標変換によりその対角要素がすべて正である対角行列に変換できる。

(証明) 式(12)、(38)より

$$\begin{aligned} \bar{H}FG &= H_2 A_s^{-1} QW \\ &= \text{diag}\{k_{d1}, \dots, k_{dm}\} A_s^{-1} \\ &\quad \text{diag}\{q_1/L_1, \dots, q_m/L_m\} \end{aligned}$$

座標変換行列

$$T_1 = \text{diag}\{\sqrt{k_{d1}L_1/q_1}, \dots, \sqrt{k_{dm}L_m/q_m}\} \quad (42)$$

により、 $\bar{H}FG$ を座標変換すると次のようになる。

$$\begin{aligned} T_1^{-1}(\bar{H}FG)T_1 &= \text{diag}\{\sqrt{k_{d1}q_1/L_1}, \dots, \sqrt{k_{dm}q_m/L_m}\} A_s^{-1} \\ &\quad \text{diag}\{\sqrt{k_{d1}q_1/L_1}, \dots, \sqrt{k_{dm}q_m/L_m}\} \end{aligned}$$

A_s は正値対称行列なので、 A_s^{-1} も正値対称行列である。その結果、上式からわかるように、 $T_1^{-1}(\bar{H}FG)T_1$ も正値対称行列である。正値対称行列は、座標変換によってその対角要素が正の対角行列に必ず変換できる。すなわち、座標変換 T_1 を行った後に、さらに適当な座標変換 T_2 を行うと次のように対角化できる。

$$\begin{aligned} T_2^{-1}T_1^{-1}(\bar{H}FG)T_1T_2 &= \begin{bmatrix} \rho_1 & & 0 \\ & \rho_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \rho_m \end{bmatrix}, \quad (43) \end{aligned}$$

ただし、 $\rho_i, i = 1, 2, \dots, m$ は $\bar{H}FG$ の固有値でありすべて正の実数である。(証明終わり)

補題1からわかるように、このシステムは、 $\bar{H}FG$ が最大ランクを持つという定理2の前提条件を満たしている。また、式(43)を用いると、式(41)は次のように書き換えることができる。

$$\left| I + \frac{f}{s^2} \begin{bmatrix} \rho_1 & & 0 \\ & \rho_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \rho_m \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (44)$$

図1 ゲイン係数 f に関する固有値軌跡 ($\theta, \dot{\theta}, i$ をフィードバックする場合)

$f \rightarrow \infty$ に対して上式を満たすためには, s は虚軸と平行に無限遠点に向かえばよい。

次に, システム行列 $\bar{P}(s)$ の特性根を求める。

〈補題2〉式(10)および式(37)で定義されるシステムのシステム行列 $\bar{P}(s)$ の特性根は, $-k_{pi}/k_{di}, i=1, \dots, m$ である。

(証明) 3章と同様に基本行列変換, 列変換を行うと, 式(26)において, $H_3=0$ としたものが得られる。そこで, $\bar{P}(s)$ の特性根は,

$$|sH_2 + H_1| = 0$$

の根として得られる。

(証明終わり)

補題1, 補題2および定理2より次の命題が得られる。

〈命題2〉式(10)で表される m リンクマニプレータを, 式(37)のようにして制御する場合について考える。すなわち, 角度および角速度のみをフィードバックする場合について考える。このとき, $f \rightarrow \infty$ とすると, 閉ループシステムの固有値は次のようにふるまう。

(1) m 個の固有値は, $-k_{pi}/k_{di}, i=1, \dots, m$ に漸近する。

(2) $2m$ 個の固有値は, 虚軸と平行に無限遠点に向かう。

この命題を3章の例1の二リンクアームに適用してみる。

(例2) アームの各パラメータは例1と同様とする。また, 比例ゲイン行列 H_1 , 微分ゲイン行列 H_2 は次のようにおく。

$$H_1 = \text{diag}\{2, 1\}$$

$$H_2 = \text{diag}\{0.2, 0.07\} \quad (45)$$

図2に, フィードバックゲイン係数 f に関する閉ループシステムの固有値軌跡を示す。図2からわかるように, 4個の固有値は虚軸と平行に無限遠点に向かっており, 2個の固有値は,

$$-\frac{k_{p1}}{k_{d1}} = -10.0, \quad -\frac{k_{p2}}{k_{d2}} = -14.29$$

に漸近している。

5. トルクを直接入力できるアクチュエータを用いた場合

入力信号によりトルクを直接発生できるアクチュエータを使用した場合には, 式(7)は考慮する必要がなくなる。すなわち, この場合 T を直接入力項とすることができる。このとき, システムの状態変数表示は次のようになる。

$$\dot{x}_a = F_a x_a + G_a u_a \quad (46)$$

ここで,

$$x_a = \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad u_a = \Delta T,$$

$$F_a = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -A_s^{-1}E & -A_s^{-1}D \end{bmatrix},$$

$$G_a = \begin{bmatrix} 0 \\ A_s^{-1} \end{bmatrix} \quad (47)$$

制御方式としては, 各関節における比例・微分制御とする。これを, 行列, ベクトルを用いてまとめて表すと次のようになる。

$$u_a = -f H_a x_a \quad (48)$$

ここで,

$$H_a = [H_1, H_2] \quad (49)$$

であり, H_1, H_2 は式(16)で定義されるものである。

行列 $H_a G_a$ が最大ランクを持つか否かをまず調べる。

$$H_a G_a = H_2 A_s^{-1}$$

A_a および H_2 は正則行列なので, $H_a G_a$ は正則すなわち最大ランクを持つ。行列 $H_a G_a$ が最大ランクを持つので, 定理1を用いて, 閉ループシステムの固有値の軌跡について論じる。その準備として, 次の二つの補題を求めておく。

〈補題3〉式(46), (48)で与えられるシステムのシステム行列

$$P_a(s) = \begin{bmatrix} sI - F_a & G_a \\ -H_a & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

の特性根は, $-k_{pi}/k_{di}, i=1, 2, \dots, m$ である。

(証明) 3章と同様に, 前後から適当なユニモジ

図2 ゲイン係数 f に関する固有値軌跡 ($\theta, \dot{\theta}$ をフィードバックする場合)

ユラ行列をかけると、式(50)は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & sH_2 + H_1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (51)$$

(証明終わり)

〈補題4〉行列 $G_a H_a$ は、座標変換によりその対角要素がすべて正である対角行列に変換できる。

(証明) 式(47), (49)より,

$$G_a H_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_s^{-1} H_1 & A_s^{-1} H_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (52)$$

座標変換行列を

$$T_a = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -(A_s^{-1} H_2)^{-1} A_s^{-1} H_1 & I \end{bmatrix} \dots\dots\dots (53)$$

とにおいて、座標変換すると次のようになる。

$$T_a^{-1} (G_a H_a) T_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_s^{-1} H_2 \end{bmatrix}$$

さらに、補題1の証明と同様にして座標変換すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (54)$$

ただし、 $\mu_1, \dots, \mu_m$ は $A_s^{-1} H_2$ の固有値であり、正の実数である。(証明終わり)

以上の補題および定理1より次の命題が得られる。
 〈命題3〉 式(46)で表される m リンクマニプレータを、式(48)のようにして制御する場合について考える。このとき、 $f \rightarrow \infty$ とすると、閉ループシステムの固有値は次のようにふるまう。

(1) m 個の固有値は、 $-k_{pi}/k_{ai}, i=1, \dots, m$ に漸近する。

(2) m 個の固有値は、実軸上を

$$s = -f\mu_i, i=1, \dots, m \dots\dots\dots (55)$$

を満たしながら $-\infty$ へ向かう。ただし、 $\mu_1, \dots, \mu_m$ は補題4の証明の中で示したように、 $A_s^{-1} H_2$ の固有値であり、正の実数である。

この命題を、例1で用いた二リンクマニプレータに対して次に適用する。

(例3) アームの力学的なパラメータは例1と同様とする。ただし、サーボモータの慣性は無視するので A_s は次のように与えられるものとする。

$$A_s = \begin{bmatrix} 1.56 & 0.36 \\ 0.36 & 0.12 \end{bmatrix}$$

また、比例ゲイン行列 H_1 、微分ゲイン行列 H_2 は、式(45)のように置く。図3に、フィードバックゲイン係数 f に関する閉ループシステムの固有値軌跡を示す。図3からわかるように、2個の固有値は実軸上を $-\infty$ に向かっており、2個の固有値は、

図3 ゲイン係数 f に関する固有値軌跡 (トルクを直接入力できるアクチュエータを用いた場合)

$$-\frac{k_{p1}}{k_{a1}} = -10.0, \quad -\frac{k_{p2}}{k_{a2}} = -14.29$$

に漸近している。

6. 結 言

多入力、多出力システムである m リンクマニプレータを局所高ゲインフィードバック制御した際の固有値軌跡について議論し、以下の結果を得た。

(1) 直流サーボモータで駆動される m リンクマニプレータにおいて、関節角度、関節速度および電流信号をフィードバック制御した場合、そのゲインを同期しながら上げていくと、 $2m$ 個の固有値は式(34)の零点に収束し、 m 個の固有値は実軸上を $-\infty$ へと向かう。(命題1および図1参照)

(2) 直流サーボモータで駆動される m リンクマニプレータにおいて、関節角度と関節速度をフィードバック制御した場合、そのゲインを同期して上げていくと、 m 個の固有値は $-k_{pi}/k_{ai}, i=1, \dots, m$ に漸近し、 $2m$ 個の固有値は虚軸と平行に無限遠点に向かう。(命題2および図2参照)

(3) 直接トルクを入力できるアクチュエータを用いた m リンクマニプレータにおいて、関節角度と関節速度をフィードバック制御した場合、そのゲインを同期して上げていくと、 m 個の固有値は $-k_{pi}/k_{ai}, i=1, \dots, m$ に漸近し、 m 個の固有値は実軸上を $-\infty$ へと向かう。(命題3および図3)

以上の結果からわかるように、採用する制御方式が決まれば、無限遠点に向かう固有値については、その方向が決まってしまう。一方、有限の値(零点)に向か

う固有値軌跡については、4, 5章の場合に対しては、フィードバック係数 $k_{pi}, k_{di}, i=1, \dots, m$ を適当に与えることにより零点が指定可能 (ただし、実軸上に限られる) なので、その収束する先が指定可能となる。

実際の制御においては高ゲインフィードバックが用いられるので、本研究で得られた結果は、マニプレータ制御系設計における一つの目安になると考えられる。

文 献

(1) Paul, P. (吉川訳), ロボットマニピュレータ, (1984), 165,

コロナ社.

- (2) Brady, M., ほか4名, ed. *Robot Motion*, (1982), MIT Press.
- (3) Kouvaritakis, B. and Shaked, U., *Int. J. Contr.*, 23-3 (1976), 297.
- (4) Kouvaritakis, B. and MacFfrlane, A. G. J., *Int. J. Control*, 23-2 (1976), 149.
- (5) 岡田・長坂, サーボアクチュエータとその制御, (1985), 70, コロナ社.
- (6) 須田, 計測と制御, 17-6 (1978), 460.
- (7) 須田, 計測と制御, 17-8 (1978), 622.
- (8) 児玉・須田, システム制御のためのマトリクス理論, (1978), 47, 計測自動制御学会.

討 論

〔質問〕 美 多 勉 (千葉大学工学部)

A, B, C が $\det |CB| \neq 0$, あるいは, $CB=0$ で $\det |CAB| \neq 0$ の場合, $A-fBC$ の f に関する固有値軌跡が求められている。ロボットの場合には, A, B が特殊な形をしており, しかも, フィードバックゲイン C が式(16)で与えられているので, このようなきれいな結果が得られている。以下に質問させていただく。

(1) 最大ランクという表現より, 行列式の表現のほうがわかりやすいと思うがいかがか。

(2) 得られた結果の使い途をもう少し詳しく述べていただけないか。

(3) 理論的興味から, 調整ゲイン f が同率でない場合, あるいは, 一部のループゲインが一定の場合には, どのようなになるのか見通しをお聞かせ願いたい。

〔回答〕 (1) Kouvaritakis らの論文における表現を踏襲したが, $|HC| \neq 0$ のほうがより一般的なので, この表現を用いるべきであったと考える。

(2) 本報告で示した三つの性質は, マニプレータの係数および姿勢に関係なく成立する。そこで, 係数が未知のマニプレータのフィードバック係数を調節する際にも, 固有値の動きがほぼ予想できるため有用である。また, 高ゲインフィードバック時には, 固有値をある程度指定することも可能となる。例えば, 5章の命題3の場合を考えると, 実軸上に限定されるが, $-k_{pi}/k_{di}, i=1, 2, \dots, m$ を指定することにより, m 個の固有値はほぼその近くに指定できる。次に, H_2 を適切に与えることにより, $A_s^{-1}H_2$ の固有値 $\mu_i, i=1, 2, \dots, m$ を指定すれば, その結果 $-\infty$ に向かう速さも指定できる。

(3) 5章のマニプレータについて考え, m 個の関節のうち任意の r 個の関節のループゲインを同期し

て上げ, 残りの関節のゲインを固定した場合についてお答えする。結果をわかりやすくするため, まず最初に関節角度 θ_j の番号の付け換えを行い, θ_1 がループゲインを同期して上げる関節の角度ベクトル, θ_2 がゲインを固定した関節の角度ベクトルを表すようにする。これにともない, A_s, D, E の要素の入れ換えも行う。各関節における局所フィードバックを次のように表すことにする。

$$T_1 = -fN_1\Delta\theta_1 - fN_2\Delta\theta_1 \dots\dots\dots (i)$$

$$T_2 = -M_1\Delta\theta_2 - M_2\Delta\theta_2 \dots\dots\dots (ii)$$

マニプレータに式(ii)のフィードバックを施し, 次にこれを整理しなおした式では, D, E が変わるのでこれを $\bar{D}, \bar{E}$ とおく。このとき, $f \rightarrow \infty$ とすると閉ループ固有値は次のようになる。

(i) r 個の固有値は $-K_{pj}/K_{di}, j=1, 2, \dots, r$ に漸近する。

(ii) r 個の固有値は $\sigma_i - f\mu_i$ に漸近する。ただし, μ_i は行列 $N_2(A_s^{-1})_{11}$ の固有値であり, 常に正の実数である。ここで, $(A_s^{-1})_{11}$ は A_s^{-1} の左上の $r \times r$ 部分行列である。また,

$$\sigma_i = \frac{1}{\mu_i} [Y^{-1} \{M_1(A_s^{-1})_{11} - N_2(A_s^{-1}\bar{D}A_s^{-1})_{11}\} Y]_{ii}$$

ここで, Y は $N_2(A_s^{-1})_{11}$ を対角化する座標変換行列であり, $[X]_{ii}$ は行列 X の (i, i) 要素である。

(iii) 残りの $2m-2r$ 個の固有値は次の方程式の根に漸近する。

$$|(s^2 A_s + s\bar{D} + \bar{E})_{22}| = 0$$

ここで, $(Z)_{22}$ は行列 Z の右下の $(m-r) \times (m-r)$ 部分行列である。