隔壁を有する環状殻の自由振動*

小林 幸徳^{*1}, 山田 元^{*1}, 永井 達也^{*2}

Free Vibration of a Toroidal Shell with Interior Partition

Yukinori KOBAYASHI, Gen YAMADA, and Tatsuya NAGAI

This paper presents an analysis of the free vibration of a toroidal shell with an interior partition consisting of a concentric circular cylindrical shell. For this purpose, the governing equation for vibration of a toroidal shell including a circular cylindrical shell is written as a coupled set of first-order differential equations by use of the transfer matrix of the shell. Once the transfer matrix has been determined by quadrature of the equations, the entire structure matrix is obtained by the product of the transfer matrices and the point matrix at the joint of the shell system, and the frequency equation is derived in terms of the elements of the structure matrix. The method is applied to toroidal shells with interior partitions, and the natural frequencies and the mode shapes of vibration are calculated numerically.

Key Words: Free Vibration, Natural Frequency, Mode of Vibration, Transfer Matrix, Toroidal Shell, Joined Shell

1. 緒 言

本論文では、内部に円筒殻状の隔壁を有する環状殻の自由振動を伝達マトリックス法を適用して解析する。環状殻は、宇宙構造物や核融合炉などの構造要素として注目されており、その自由振動に関していくつかの研究がある。Liepins^{(1)~(3)}は内圧が作用する場合、Balderesら⁽⁴⁾は補強された環状殻、MacGillら⁽⁵⁾⁽⁶⁾と小沢田ら⁽⁷⁾⁽⁸⁾は厚肉環状殻、また山田ら⁽⁹⁾はだ円断面を有する場合について解析している。一方、接合殻の振動に関してもこれまで多くの研究がなされており、Petersonら⁽¹⁰⁾と入江ら⁽¹¹⁾は隔壁を有する円筒殻あるいは非円筒殻、また小林ら⁽¹²⁾は閉じた系を有する非対称殻の自由振動について報告している。しかし、宇宙構造物などを設計する際に重要である隔壁を有する環状殻に関する論文は見当たらない。

この解析のために、まず Love の薄肉殻の理論に基づいて環状殻の運動方程式（特別な場合として円筒殻を含む）を誘導し、子午線方向の伝達マトリックスを

用いて一階のマトリックス微分方程式で表す。伝達マトリックスはこの式を数値積分することによって求められる。ついで、環状殻と隔壁の接合条件をポイントマトリックス形で表し、これと伝達マトリックスとの積によって全体の構造マトリックスを求め、境界条件を適用して接合系の振動数方程式を導く。そして数値計算を実施して、固有振動数と振動モードを求め、環状殻と隔壁の連成振動特性を明らかにする。

2. 理 論 解 析

図1は隔壁を有する環状殻と座標系 (θ, ϕ, z) を示す。それぞれの方向の変位成分を u, v, w とし、回転軸AA'から断面中心Oまでの距離を R_0 、円断面の半径を a 、殻の厚さを H 、殻の中央面上の任意の位置Pの回転軸からの距離を R とする。

環状殻の運動方程式は、Loveの理論に基づけば次のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial N_{\theta\phi}}{a \partial \phi} + \frac{2 \cos \phi}{R} N_{\theta\phi} + \frac{\sin \phi}{R} Q_\phi \\ + \rho H \omega^2 u = 0 \\ \frac{\partial N_{\theta\phi}}{R \partial \theta} + \frac{\partial N_\phi}{a \partial \phi} + \frac{\cos \phi}{R} (N_\phi - N_\theta) + \frac{Q_\theta}{a} \\ + \rho H \omega^2 v = 0 \end{aligned} \right\}$$

* 平成元年4月3日 第66期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和63年9月16日。

^{*1} 正員、北海道大学工学部（〒060 札幌市北区北13条西8丁目）。

^{*2} 学生員、北海道大学大学院。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_\theta}{R\partial\theta} + \frac{\partial Q_\phi}{a\partial\phi} + \frac{\cos\phi}{R}Q_\theta - \frac{\sin\phi}{R}N_\theta - \frac{N_\phi}{a} \\ + \rho H\omega^2 w = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 ρ は単位体積当たりの質量、 ω は円振動数である。

せん断力の成分は

$$\left. \begin{aligned} Q_\theta &= \frac{\partial M_\theta}{R\partial\theta} + \frac{\partial M_{\theta\phi}}{a\partial\phi} + \frac{2\cos\phi}{R}M_{\theta\phi} \\ Q_\phi &= \frac{\partial M_{\theta\phi}}{R\partial\theta} + \frac{\partial M_\phi}{a\partial\phi} + \frac{\cos\phi}{R}(M_\phi - M_\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

で表され、膜力およびモーメントの成分は

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= D \left\{ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + v \cos\phi + w \sin\phi \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial\phi} + w \right) \right\} \\ N_\phi &= D \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial\phi} + w \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + v \cos\phi + w \sin\phi \right) \right\} \\ N_{\theta\phi} &= N_{\phi\theta} \\ &= \frac{1-\nu}{2} D \left\{ \frac{\partial u}{a\partial\phi} - \frac{1}{R} \left(u \cos\phi - \frac{\partial v}{\partial\theta} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

図 1 隔壁を有する環状殻の幾何学的形状と座標系

$$\left. \begin{aligned} M_\theta &= K \left\{ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial\theta} + \chi \cos\phi \right) + \nu \frac{\partial \chi}{a\partial\phi} \right\} \\ M_\phi &= K \left\{ \frac{\partial \chi}{a\partial\phi} + \frac{\nu}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial\theta} + \chi \cos\phi \right) \right\} \\ M_{\theta\phi} &= M_{\phi\theta} \\ &= \frac{1-\nu}{2} K \left\{ \frac{\partial \psi}{a\partial\phi} - \frac{1}{R} \left(\psi \cos\phi - \frac{\partial \chi}{\partial\theta} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

となる。ここで、 ψ と χ は角変位

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{u}{R} \sin\phi - \frac{\partial w}{R\partial\theta} \\ \chi &= \frac{v}{a} - \frac{\partial w}{a\partial\phi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

であり、ケルビン・キルヒホッフの等価せん断力と膜力

$$\left. \begin{aligned} S &= Q_\phi + \frac{\partial M_{\theta\phi}}{R\partial\theta} \\ T &= N_{\theta\phi} + \frac{\sin\phi}{R} M_{\theta\phi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。また、 D, K はそれぞれ殻の伸びこわさと曲げこわさであり、縦弾性係数 E 、ポアソン比 ν を用いて $D=EH/(1-\nu^2)$ 、 $K=EH^3/12(1-\nu^2)$ で与えられる。

殻が自由振動するとき、式(1)～(6)の各変数は次のように変数分離できる。

$$\left. \begin{aligned} u &= H\bar{u} \sin n\theta, (v, w) = H(\bar{v}, \bar{w}) \cos n\theta \\ \psi &= (H/a)\bar{\psi} \sin n\theta, \chi = (H/a)\bar{\chi} \cos n\theta \\ (N_\theta, N_\phi, Q_\theta, S) &= (K/a^2)(\bar{N}_\theta, \bar{N}_\phi, \bar{Q}_\theta, \bar{S}) \cos n\theta \\ (N_{\theta\phi}, N_{\phi\theta}, T, Q_\phi) &= (K/a^2)(\bar{N}_{\theta\phi}, \bar{N}_{\phi\theta}, \bar{T}, \bar{Q}_\phi) \sin n\theta \\ (M_\theta, M_\phi) &= (K/a)(\bar{M}_\theta, \bar{M}_\phi) \cos n\theta \\ (M_{\theta\phi}, M_{\phi\theta}) &= (K/a)(\bar{M}_{\theta\phi}, \bar{M}_{\phi\theta}) \sin n\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 n は円周方向波数、記号 $\bar{}$ を付した変数は無次元量である。さらに、解析を簡単化するために次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} (r, h) &= (1/a)(R, H) \\ \lambda^2 &= \rho H a^2 \omega^2 / D \quad (\text{振動数パラメータ}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

式(1)～(6)より、変数 $\phi, N_\theta, N_{\theta\phi}, N_{\phi\theta}, Q_\theta, Q_\phi, M_\theta, M_{\theta\phi}, M_{\phi\theta}$ を消去することにより、上記の方程式は状態量ベクトル $\{z(\phi)\} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\chi}, \bar{M}_\phi, \bar{S}, \bar{N}_\phi, \bar{T}\}^T$ を用いて次のようなマトリックス常微分方程式に書き直される。

$$d\{z(\phi)\}/d\phi = [U(\phi)]\{z(\phi)\} \dots\dots\dots (9)$$

係数マトリックス $[U(\phi)]$ の零でない要素は、次のとおりである。

$$U_{11} = -U_{66} = \cos\phi/r, U_{12} = -U_{78} = n/r \quad]$$

$$\begin{aligned}
U_{13} &= -U_{58} = nh^2 \sin 2\phi / 12r^3, U_{14} = -U_{58} \\
&= nh^2 \sin \phi / 6r^2, U_{18} = h/6(1-\nu) \\
U_{21} &= -U_{37} = -n\nu/r, U_{22} = U_{44} = -\nu \cos \phi / r \\
U_{23} &= -U_{67} = -1 - \nu \sin \phi / r, U_{27} = h/12 \\
U_{32} &= -U_{34} = U_{56} = -U_{76} = 1, U_{41} = -U_{85} \\
&= -n\nu \sin \phi / r^2, U_{43} = -U_{65} = -n^2\nu/r^2 \\
U_{45} &= 1/h, U_{51} = U_{84} = nh(1-\nu) \cos \phi \\
&\times \{(1+\nu) \sin \phi / r - 1 + \sin \phi / r\} / r^2 \\
U_{52} &= U_{74} = -n^2h(1-\nu)(1 + \sin \phi / r) / r^2 \\
U_{53} &= U_{64} = n^2h(1-\nu)(3+\nu) \cos \phi / r^3 \\
U_{54} &= h(1-\nu)\{2n^2 + (1+\nu) \cos^2 \phi\} / r^2 \\
U_{55} &= U_{77} = -(1-\nu) \cos \phi / r, U_{61} = U_{83} \\
&= nh(1-\nu^2) \sin \phi (12/h^2 + n^2/r^2) / r^2 \\
U_{62} &= U_{73} = h(1-\nu) \cos \phi (12(1+\nu) \sin \phi / h^2 \\
&- n^2(1 + \sin \phi / r) / r\} / r^2 \\
U_{63} &= h(1-\nu)\{(1+\nu)n^4 + 2n^2 \cos^2 \phi \\
&+ 12(1+\nu)r^2 \sin^2 \phi / h^2\} / r^4 - 12\lambda^2/h \\
U_{71} &= U_{82} = 12n(1-\nu^2) \cos \phi / hr^2 \\
U_{72} &= h(1-\nu)\{12(1+\nu) \cos^2 \phi / h^2 \\
&+ n^2(1 + \sin \phi / r)^2 / 2\} / r^2 - 12\lambda^2/h \\
U_{81} &= 12n^2(1-\nu^2) / hr^2 - 12\lambda^2/h \\
U_{88} &= -2 \cos \phi / r
\end{aligned}$$

.....(10)

一般に状態量ベクトル $\{z(\phi)\}$ は、殻の子午線方向の伝達マトリックス $[T(\phi)]$ を用いて次のように表せる。

$$\{z(\phi)\} = [T(\phi)]\{z(\phi_0)\} \quad \text{.....(11)}$$

これを式(9)に代入することによって

$$d[T(\phi)]/d\phi = [U(\phi)][T(\phi)] \quad \text{.....(12)}$$

が得られる。伝達マトリックスは、上式を数値積分することにより求められる。本論文では、Runge-Kutta-Gill 法を用いて計算を実施し、高い精度の数値を得ている。

隔壁(円筒殻)に関する式は、式(1)～(6)において、 $\phi = \pi/2$, $a \rightarrow \infty$, $a d\phi = ds$ とおくことによってただちに得られる。ここで、 s は円筒殻の軸方向座標である。その結果、式(11)と式(12)は次のように書き直される。

$$\left. \begin{aligned} \{z(\xi)\} &= [T(\xi)]\{z(\xi_0)\} \\ d[T(\xi)]/d\xi &= [U(\xi)][T(\xi)] \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(13)}$$

ここで

$$\xi = s/a, b = B/a \quad \text{.....(14)}$$

である。また以下では環状殻に関する量には指標(s)を、隔壁に関する量には指標(p)を付けて区別する。

殻と隔壁との接合部における隔壁の状態量ベクトルは

$$\{z(b)\}^{(p)} = [T(b)]^{(p)}\{z(0)\}^{(p)} \quad \text{.....(15)}$$

と書ける。 $\{z(\xi)\}^{(p)}$ を変位ベクトル $\{d(\xi)\} = \{u \ v \ w \ \phi\}^T$ と力ベクトル $\{f(\xi)\} = \{M_\phi \ S \ N_\phi \ T\}^T$ に分割すると、式(15)は次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} d(b) \\ f(b) \end{Bmatrix}^{(p)} = \begin{bmatrix} T_d(b) \\ T_f(b) \end{bmatrix}^{(p)} \{\bar{z}(0)\}^{(p)} \quad \text{.....(16)}$$

ここで、 $\{\bar{z}(0)\}^{(p)}$ は $\xi=0$ における境界条件を適用した結果得られる四つの未知量からなるベクトルで、 $[T_d(b)]^{(p)}$ と $[T_f(b)]^{(p)}$ は 4 行 4 列の正方行列である。式(16)より

$$\{f(b)\}^{(p)} = [S]\{d(b)\}^{(p)} \quad \text{.....(17)}$$

ここで

$$[S] = [T_f(b)]^{(p)}([T_d(b)]^{(p)})^{-1} \quad \text{.....(18)}$$

は接合部における板の剛性マトリックスである。接合部 Q (図 1) での殻と隔壁のなす角を γ とすると

$$\{d(b)\}^{(p)} = [A]\{d(\phi_0-0)\}^{(s)} \quad \text{.....(19)}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{.....(20)}$$

である。また、力の平衡条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{f(\phi_0+0)\}^{(s)} &= \{f(\phi_0-0)\}^{(s)} + [A]\{f(b)\}^{(p)} \\ &\quad \text{.....(21)} \end{aligned}$$

ただし、 $\phi_0 \pm 0$ は接合部 Q の直後(+), 直前(-)を意味する。式(16)と式(18)を式(20)に代入すると

$$\begin{aligned} \{f(\phi_0+0)\}^{(s)} &= \{f(\phi_0-0)\}^{(s)} + [\bar{S}]\{d(\phi_0-0)\}^{(s)} \\ &\quad \text{.....(22)} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$[\bar{S}] = [A][S][A] \quad \text{.....(23)}$$

である。したがって、状態量ベクトル $\{z(\phi_0+0)\}^{(s)}$ はポイントマトリックス

$$[P] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{S} & I \end{bmatrix} \quad \text{.....(24)}$$

を用いて

$$\{z(\phi_0+0)\}^{(s)} = [P]\{z(\phi_0-0)\}^{(s)} \quad \text{.....(25)}$$

と表せる。ゆえに殻の状態量ベクトルは

$$\left. \begin{aligned} \{z(\phi)\}^{(s)} &= [T(\phi)]\{z(\pi/2)\}^{(s)} \\ &\quad (\pi/2 \leq \phi \leq \phi_0) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(26)}$$

$$\left. \begin{aligned} \{z(\phi)\}^{(s)} &= [T(\phi)]^{(s)}[P][T(\phi_0)]^{(s)} \\ &\quad \times \{z(\pi/2)\}^{(s)} \\ &= [\bar{T}(\phi)]\{z(\pi/2)\}^{(s)} \\ &\quad (\phi_0 < \phi \leq 3\pi/2) \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(27)}$$

また隔壁の状態量ベクトルは

$$\begin{aligned} \{z(\xi)\}^{(p)} &= [T(\xi)]^{(p)}\{z(0)\}^{(p)} \\ &\quad (0 \leq \xi \leq b) \end{aligned} \quad \text{.....(28)}$$

と書ける。ここで、 $[T(\phi)]$ は全体の構造マトリックスである。

本論文で扱う環状殻は、断面を上下に2等分する平面に関して対称な構造を有しており、殻にはこの平面に関して対称な(S形)振動と、逆対称な(A形)振動が生じる。したがって実際の計算では対称面($\phi=\pi/2, 3\pi/2$)における境界条件

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} = \bar{\chi} = \bar{S} = \bar{T} = 0 & \quad (\text{対称振動}) \\ \bar{u} = \bar{w} = \bar{M}_\phi = \bar{N}_\phi = 0 & \quad (\text{逆対称振動}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (29)$$

を考慮して、振動系の半分についてのみ計算すれば十分である。式(29)を式(27)に代入することにより、振動数方程式

$$\begin{bmatrix} T_{21} & T_{23} & T_{25} & T_{27} \\ T_{41} & T_{43} & T_{45} & T_{47} \\ T_{61} & T_{63} & T_{65} & T_{67} \\ T_{81} & T_{83} & T_{85} & T_{87} \end{bmatrix} (3\pi/2) \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{M}_\phi \\ \bar{N}_\phi \end{bmatrix} (\pi/2) = 0 \quad (\text{対称振動}) \dots\dots (30)$$

$$\begin{bmatrix} T_{12} & T_{14} & T_{16} & T_{18} \\ T_{32} & T_{34} & T_{36} & T_{38} \\ T_{52} & T_{54} & T_{56} & T_{58} \\ T_{72} & T_{74} & T_{76} & T_{78} \end{bmatrix} (3\pi/2) \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{\chi} \\ \bar{S} \\ \bar{T} \end{bmatrix} (\pi/2) = 0 \quad (\text{逆対称振動}) \dots\dots (31)$$

が導かれ、その固有値 λ を計算することによって殻の固有振動数が得られ、その固有値に対応する固有ベクトルを計算することによって振動モードが決定される。

3. 固有振動数, 振動モード

本論文では、伝達マトリックスを求めるために

Runge-Kutta-Gill法を用いているが、その精度は数値積分の分割数に依存している。表1は、隔壁が円断面の中央にあるときの殻に対して、 $\phi=\pi/2\sim\pi$ の区間の分割数を変化させたときの振動の固有値の収束状況を示している。表1から分割数を60とすれば固有値は3~4けたの有効数字の範囲で収束することがわかる。よって、本論文では分割数を60として計算を実施した。また、隔壁がない環状殻についてはすでに多くの結果が報告されており、文献(9)付表1では伝達マトリックス法によって得られた固有値が、他の解析方法による結果とよく一致することが示されている。

図2は、隔壁の位置を示す角度 α と振動の固有値 λ との関係を示す。実線は対称(S形)振動、破線は逆対称(A形)振動を示し、それぞれの曲線は図2中に示した周方向波数の最低次の固有値曲線である。また、 $\alpha=0^\circ$ の固有値は、隔壁が円断面の中央にあるときの値であり、 $\alpha=\pm 90^\circ$ の場合は隔壁がない環状殻の固有値である。図2より、隔壁が円断面の中央付近にあるとき固有値は大きく変動し、その程度は周方向波数が高いほど顕著であることがわかる。以上のことより、

表1 振動の固有値と積分の分割数
($r_0=2.5, h=0.01, \nu=0.3, \alpha=0^\circ, n=2$)

Vibration mode	30	60	90
S-1	0.082622	0.082616	0.082615
S-2	0.14388	0.14388	0.14388
S-3	0.20429	0.20428	0.20428
A-1	0.064722	0.064721	0.064721
A-2	0.19326	0.19326	0.19326
A-3	0.20050	0.20050	0.20050

図2 隔壁を有する環状殻の振動の固有値 ($r_0=2.5, h=0.01, \nu=0.3$)

隔壁の位置を変えることによって大きい周方向波数を有する最低次の固有値を大幅に増大させることが可能であり、固有振動数の極大化に用いることができる。

図3は、 $n=2$ の殻における角度 α と振動の固有値 λ との関係を示す。高次振動においても隔壁が円断面の中央付近にあるとき固有値の変化が大きい。また高次振動では固有値の変動の幅は小さくなり、波の数が増加していくことがわかる。これは円断面上の波数が増加するためである。

図4は、図3に対応する殻の振動モードを示す。図

4中の太い実線は子午線方向の変位 v と面外方向の変位 w を合成した変位を示しており、おのおのの図の面外変位の最大値を単位の値としている。図4より隔壁が環状殻の変形を拘束している様子がよくわかる。

図5は、 $n=2, \alpha=0^\circ$ の場合の半径比 a/R_0 と振動の固有値 λ との関係を示す。半径比が増すと、固有値はS-1振動とA-2振動を除いては単調に増加する。これは、半径比が増すと環状殻が相対的に小さくなるためである。図4にみるように隔壁の運動が少ないS-1, A

図3 隔壁を有する環状殻の振動の固有値 ($r_0=2.5, h=0.01, \nu=0.3, n=2$)

図4 隔壁を有する環状殻の振動モード ($r_0=2.5, h=0.01, \nu=0.3, n=2$)

図 5 隔壁を有する環状殻の振動の固有値 ($h=0.01$, $\nu=0.3$, $n=2$, $\alpha=0^\circ$)

-2 振動では $a/R_0 > 0.4$ で固有値が減少しているが、これは円断面の半径 a が相対的に大きくなり、断面の剛性が低下するためと考えられる。

4. 結 言

隔壁を有する環状殻の自由振動をポイントマトリックスを導入した伝達マトリックス法によって解析し、境界条件を適用して振動数方程式を導いた。そして、数値計算を実施した結果、隔壁が円断面の中央付近にあるとき固有振動数が大きく変動することが明らかになった。このことから、隔壁を用いて固有値の極大化を実現することができる。また、振動モードを描くことによって、隔壁が環状殻の振動に与える影響がより明らかになった。本論文では、円筒殻状の隔壁を扱ったが、本方法は隔壁が円すい殻や有孔円板からなる場合にも適用可能である。

文 献

- (1) Liepins, A. A., Free Vibrations of Prestressed Toroidal Membrane, *AIAA J.*, 3-10 (1965), 1924.
- (2) Liepins, A. A., Flexural Vibrations of the Prestressed Toroidal Shell, *NASA Cont. Rep.*, 296 (1965).
- (3) Liepins, A. A., Vibration Study of a Pressurized Torus Shell, *NASA Cont. Rep.*, 885 (1967).
- (4) Balderes, T. and Armenakas, A. E., Free Vibrations of Ring-Stiffened Toroidal Shells, *AIAA J.*, 11-12 (1973), 1637.
- (5) McGill, D. J. and Lenzen, K. H., Circumferential Axisymmetric Free Oscillations of Thick Hollowed Tori., *Int. J. Solids Struct.*, 3 (1967), 771.
- (6) McGill, D. J. and Lenzen, K. H., Polar Axi-symmetric Free Oscillations of Thick Hollowed Tori, *SIAM J. Appl. Math.*, 15-3 (1967), 678.
- (7) 小沢田・ほか 2 名, トーラスの自由振動, 機論, 51-461, C (1985), 8.
- (8) 小沢田・ほか 2 名, 厚肉トーラスの自由振動, 機論, 52-473, C (1986), 7.
- (9) 山田・ほか 3 名, だ円断面を有する環状殻の自由振動, 機論, 53-492, C (1987), 1636.
- (10) Peterson, M. R. and Boyd, D. E., Free Vibrations of Circular Cylinders with Longitudinal Interior Partitions, *J. Sound Vib.*, 60-1 (1978), 45.
- (11) Irie, T., ほか 2 名, Free Vibration of Non-Circular Cylindrical Shells with Longitudinal, Interior Partitions, *J. Sound Vib.*, 96-1 (1984), 133.
- (12) Kobayashi, Y. and Irie, T., Free Vibration of Unsymmetrically Joined Shell Structures with a Closed Member, *J. Acoust. Soc. Am.*, 81-6 (1987), 1795.