終端条件を有する離散形離散値制御システムの 一制御手法に関する研究*

宗 像 経 博^{*1}

A Study on a Control Technique for a Quantized Discrete Optimal Control System with Terminal Conditions

Tsunehiro MUNAKATA

Control systems whose controls can only take given discrete-level values are called quantized control systems. Optimization of such systems has conventionally been performed by mathematical programming methods, including dynamic programming or integer programming. In this paper, the author formulates a quantized discrete linear optimal control problem with terminal conditions using Halkin's formulation and derives the quantized discrete maximum principle for discrete-level valued solutions, which is a Pontryagin-type control condition. An algorithm based on this maximum principle is presented, along with a numerical example.

Key Words: Quantized Discrete Optimal Control System with Terminal Conditions, Quantized Discrete Maximum Principle, Convex Hull of Reachable Sets, Supporting Hyperplane

1. 緒 言

操作量がある与えられた離散値のみを取るシステムを離散値(量子的)システムというが、この種のシステムの最適化には従来動的計画法⁽¹⁾⁽²⁾や整数計画法⁽³⁾の数理計画手法が用いられていた。

ところでこの離散値制御システムは通常の連続値を取る制御システムと比較して、制御の精度は落ちるが反面制御が簡単でまたあらかじめ取り得る操作量を固定できるという利点があり、現実的なシステムとして現に存在している操作量がその大きさにおいて最小単位を持つシステムすなわち個体数を取扱う生態系システム、交通、物流、生産財個数等を取扱う社会経済システム、ティジタル計算機による計算機制御システム等のシステム記述、システム解析、制御において重要なシステムと考えられる。

しかしこの離散値制御に関するこれまでの研究の多くは、数理計画手法を用いて最適制御則を求めるものが中心で、システムの構造解析や動的最適化等基本的で制御工学的な研究はあまりなされておらず、著者の

知るところ、安西⁽⁴⁾⁽⁵⁾、宮道⁽⁶⁾⁽⁷⁾程度と思われる。

ところでこの離散値制御システムは、通常の連続値制御システムの場合と比較して、各時刻ごとの到達可能点の集合が離散点の集合になり、集合としての凸性、稠密性等その位相的性質が保証されなくなる点をはじめ、集合の最外殻部分における接線(したがって微分性)が存在しない点、分離定理の不成立等連続値の場合とは別角度からの細かい考察が必要となる。しかし操作量に関して幾何学的な条件を仮定して最適化条件(離散形最大原理)を導いている Halkin のアプローチ⁽⁸⁾はこの種のシステムに対しても有効と考えられ、したがって本稿では Halkin の定式化を用い、状態変数に関して線形で(入力変数に関しては必ずしも線形ではない)、終端条件を有する離散形離散値最適制御システムに対し、その一最適化条件を与える量子的離散形最大原理を導き、この最大原理によるアルゴリズムを与えている。さらに本稿のアルゴリズムを用いた二次の数値例を与えている。

2. 終端条件を有する線形離散形 離散値制御システムの制御

2.1 終端条件を有する最適制御問題の定式化

システムの状態方程式を次のように与える。

$$x(i+1) - x(i) = A(i)x(i) + g\{i, u(i)\}$$

* 平成元年6月3日 ロボティクス・メカトロニクス講演会'89において講演、原稿受付 昭和63年9月27日。

^{*1} 正員、広島電機大学工学部(〒739-03 広島市安芸区中野6-20-1)。

$$i=0, 1, \dots, k-1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに

x : 状態ベクトルで空間 R^n の要素

u : 制御ベクトルで空間 R^r の要素

A : n 次元正方行列

g : n 次元ベクトル

k : ある自然数

とする。なお $n > r$ である。

また u は次の性質を満たすものとする。

$$u \in \Omega \subset R^r$$

ここで、 Ω は与えられた許容離散値制御ベクトルの集合で有限有界な要素からできている集合とする。

次の二つの事項を仮定する。

(i) 関数 $g(i, u(i))$ は $i=0, 1, \dots, k-1$ に対し、 $u(i)$ について有界な関数である。

(ii) 行列 $I+A(i)$ は $i=0, 1, \dots, k-1$ に対し、正則である。なお I は単位行列を表す。また初期値 $x(0) = x_0$ は与えられているものとする。

このとき本稿での最適制御問題を次のように定式化する。

与えられた初期値 x_0 に対し、状態方程式(1)を満たし、

$$x(k) \in E \subset R^n \quad \dots\dots\dots (2)$$

かつ評価関数

$$x^n(k): \text{最大} \quad \dots\dots\dots (3)$$

とするような許容離散値制御ベクトルの列 $\{u(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k-1$ および対応する状態ベクトルの列 $\{x(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k$ を求めよ。

なおここに集合 E は

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix} \middle| a: \text{与えられた}(n-1)\text{次元定ベクトル}, l: -\infty < l < \infty \text{なる実定数} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

なる e^n 軸に平行な終端目標線を表し、また $x^n(k)$ は $x(k)$ の第 n 要素を表す。なお e^n 軸とは、単位ベクトル $e^n = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$ なる n 次元空間 R^n の第 n 軸を表す。また T は転置を表す。

ところで本稿では、終端目標線 E とこのシステムの最終時刻 k における到達可能点の集合 $W(k)$ (2・3節で与える) について次の仮定を行う。

$W(k) \cap E \neq \emptyset$ であり、かつ $W(k) \cap E$ の要素の中には必ず $W(k)$ の凸包点が含まれる。

なおここに $\emptyset$ は空集合を表し、また x が集合 (離散点の集合) $W(k)$ の凸包点とは x が $W(k)$ の凸包 (convex hull) すなわち $\text{co } W(k)$ の境界点 (最外殻点) になっている場合をいうものとする。

本稿では上記の問題を満足する離散値制御ベクトルの列 $\{\bar{u}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k-1$ を最適制御ベクトルの列、また対応する状態ベクトルの列 $\{\bar{x}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k$ を最適軌道とよぶことにする。なお以下時刻 i について $0, 1, \dots, k-1$ 等の記載を省略する所がある。

いずれも二次のシステムの場合であるが、図1に状態方程式に基づくシステムの状態推移の状況および最終時刻における終端条件 E のチェック、図2に最終時刻 k における到達可能点 $W(k)$ 、その凸包および終端目標線 E との関係、を示す。

本稿の制御問題に対して、次に与える最大原理が成立する。

2・2 量子的離散形最大原理 $\{\bar{u}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k-1$ を最適制御ベクトルの列、 $\{\bar{x}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k$ を最適軌道とすると、次のような非ゼロベクトルの列 $\{\bar{p}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k$ が存在する。

(1) ハミルトン関数の最大化: $i=0, 1, \dots, k-1$ と Ω 内のすべての u に対して

$$\begin{aligned} &\langle A(i)\bar{x}(i) + g(i, \bar{u}(i)), \bar{p}(i+1) \rangle \\ &\geq \langle A(i)\bar{x}(i) + g(i, u), \bar{p}(i+1) \rangle \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

(2) 随伴方程式: $i=0, 1, \dots, k-1$ に対して

$$\bar{p}(i) - \bar{p}(i+1) = A(i)^T \bar{p}(i+1) \quad \dots\dots\dots (6)$$

(3) 横断条件:

$$\bar{p}(k) = \pi \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに $\langle a, b \rangle$ は a と b との内積、 A^T は A の転置行列、 π は非ゼロ定ベクトルをそれぞれ表す。

なお随伴ベクトル $\bar{p}(i)$ の初期値 $\bar{p}(k) = \pi$ は $\bar{x}(k)$ において $\text{co } W(k)$ を支持する支持超平面の外側に向かう非ゼロこう配ベクトルである。

2・3 量子的離散形最大原理の証明 各時刻ごとの到達可能点の集合 $W(i)$, $i=0, 1, \dots, k$ は、

$$W(0) = \{x_0\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$W(i) = \{x(i) \mid x(i) = [I + A(i-1)]x(i-1) + g(i-1, u(i-1)): u(i-1) \in \Omega\}$$

$$i=1, 2, \dots, k \quad \dots\dots\dots (9)$$

で表される。なお $W(i)$, $i=0, 1, \dots, k$ は離散点の集合である。図3に示すように、最終時刻 k における $W(k)$ を考える。また集合 $S(\bar{x}(k))$ を

$$S(\bar{x}(k)) = \{x \mid x \in R^n, \pi^T x \geq \pi^T \bar{x}(k),$$

$\pi \in R^n: \bar{x}(k)$ における $\text{co } W(k)$ の支持超平面の外側に向かうこう配ベクトル} $\dots\dots\dots (10)$ と定義する。

評価関数は e^n 方向に関して線形であり、 $x(k)$ は有限有界であり、また仮定により $W(k) \cap E \neq \emptyset$ であり、かつ $W(k) \cap E$ の要素の中に $W(k)$ の凸包点が含まれるので、 $\bar{x}(k)$ において

図 1 二次元システムの場合の状態方程式に基づく各時刻ごとの状態点推移と終端条件

図 2 二次元システムの場合の最終時刻 k における到達可能点の集合 $W(k)$, その凸包である $\text{co } W(k)$ および終端目標線 E

$$\langle x(k) - \bar{x}(k), \pi \rangle \geq 0, x(k) \in S\{\bar{x}(k)\} \dots\dots (11)$$

$$\langle x(k) - \bar{x}(k), \pi \rangle \leq 0, x(k) \in W(k) \dots\dots (12)$$

となる非ゼロベクトル π が存在する^{***}。図 3 を参照のこと。

$\bar{p}(k) = \pi$ となるような

$$\bar{p}(i) - \bar{p}(i+1) = A(i)^T \bar{p}(i+1) \dots\dots (13)$$

の解として, $\bar{p}(k-1), \bar{p}(k-2), \dots, \bar{p}(1), \bar{p}(0)$ を定義する。したがって, 随伴方程式は満たされる。

このとき, $i=0, 1, \dots, k$ に対して

$$\langle x(i) - \bar{x}(i), \bar{p}(i) \rangle \leq 0, x(i) \in W(i) \dots\dots (14)$$

である。これを背理法により示す。

ある $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, $x(j) \in W(j)$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$\langle x(j) - \bar{x}(j), \bar{p}(j) \rangle = \varepsilon > 0$$

と仮定する。

関係式

$$x(i+1) = [I + A(i)]x(i) + g(i, \bar{u}(i))$$

$$i = j, j+1, \dots, k-1$$

により, $x(j+1), x(j+2), \dots, x(k)$ を与える。このとき, これら $x(j+1), \dots, x(k)$ に対して

$$\begin{aligned} \langle x(j) - \bar{x}(j), \bar{p}(j) \rangle - \langle x(j+1) - \bar{x}(j+1), \\ \bar{p}(j+1) \rangle &= 0 \end{aligned} \dots\dots (15)$$

である。これは次のようにして示される。式(13)より,

$\bar{p}(j) = [I + A(j)]^T \bar{p}(j+1)$ また関係式と最適ベクトルの性質とより,

$$x(j+1) = [I + A(j)]x(j) + g(j, \bar{u}(j))$$

$$\bar{x}(j+1) = [I + A(j)]\bar{x}(j) + g(j, \bar{u}(j))$$

が成立するので, 式(15)の左辺は

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \langle [I + A(j)]^{-1} \{x(j+1) - \bar{x}(j+1)\}, \\ &\quad [I + A(j)]^T \bar{p}(j+1) \rangle \\ &= \langle x(j+1) - \bar{x}(j+1), \bar{p}(j+1) \rangle \\ &= \langle [I + A(j)]^{-1} \cdot [I + A(j)] \cdot \\ &\quad \{x(j+1) - \bar{x}(j+1)\}, \bar{p}(j+1) \rangle \\ &= \langle x(j+1) - \bar{x}(j+1), \bar{p}(j+1) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。なぜなら, 行列 $I + A(j)$ は仮定(ii)より正則行列であるので。

したがって, この式(15)の関係より,

$$\langle x(k) - \bar{x}(k), \bar{p}(k) \rangle = \varepsilon, x(k) \in W(k)$$

となる。しかしこれは式(12)に矛盾する。以上より, 式(14)が示された。

ハミルトン関数の最大化の証明

ある $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, $\bar{u}(j) \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle A(j)\bar{x}(j) + g(j, \bar{u}(j)), \bar{p}(j+1) \rangle \\ = \langle A(j)\bar{x}(j) + g(j, \bar{u}(j)), \bar{p}(j+1) \rangle + \varepsilon \end{aligned}$$

と仮定する。

式(1)において

$$\bar{x}(j+1) = [I + A(j)]\bar{x}(j) + g(j, \bar{u}(j))$$

で与えられる $\bar{x}(j+1) \in W(j+1)$ に対して,

$$\varepsilon = \langle g(j, \bar{u}(j)) - g(j, \bar{u}(j)), \bar{p}(j+1) \rangle$$

^{***} 集合 $W(k)$ の要素は有限有界だから, $W(k)$ の凸包である $\text{co } W(k)$ に対し, 集合 $S\{\bar{x}(k)\}$ と $\text{co } W(k)$ とはともに凸集合で, かつ $\bar{x}(k)$ のみを共有している。したがって, $\bar{x}(k)$ において支持超平面を境に分離定理が成立する。また凸包の定義より, $W(k) \subset \text{co } W(k)$ である。

$$=\langle \bar{x}(j+1) - \bar{x}(j+1), \bar{p}(j+1) \rangle > 0$$

となる。これら式(14)に矛盾する。

最後に横断条件の証明

随伴ベクトルの逆時間方向の初期値である $\bar{p}(k) = \pi$ は, $\bar{x}(k)$ において集合 $W(k)$ の凸包である凸集合の $\text{co } W(k)$ と, やはり凸集合である $S\{\bar{x}(k)\}$ とを分離する支持超平面の外側に向いたこの配ベクトルとして存在している。したがって, 横断条件として $\bar{p}(k) = \pi$ とできる。

以上より最大原理が証明された。

2.4 アルゴリズム 2.3節で導いた量子的離散形最大原理による解法のアルゴリズムを与える。当アルゴリズムは随伴ベクトルの逆時間方向の初期値 $\bar{p}(k)$ を決める部分と, その結果に基づいて $\bar{p}(i)$, $i = k-1, k-2, \dots, 1, 0$ を求め, ハミルトン関数の最大化を各時刻に対して行う部分とからなる。

$\bar{p}(k)$ を求めるアルゴリズム

Step 1. $x(0) = x_0, u(i) \in \Omega, i = 0, 1, \dots, k-1$ に対し, $x(i+1) = [I + A(i)]x(i) + g(i, u(i)), i = 0, 1, \dots, k-1$ により $x(k) \in W(k)$ を求める。

Step 2. $D\{x(k)\} = W(k) \cap E$ とする。 $D\{x(k)\}$ を求める。

Step 3. $\max_{x(k) \in D\{x(k)\}} [x^n(k)]$ を求める。

その結果を $\bar{x}(k)$ とする。

Step 4. $\text{co } W(k)$ に対して,

$$H\{x(k)\} = \{x(k) \mid \text{co } W(k) \text{ の凸包点} \}$$

とし, また

$$B\{x(k); \bar{x}(k), \varepsilon\} = \{x(k) \mid \|x(k) - \bar{x}(k)\| < \varepsilon, \\ \|\cdot\|: \text{ノルム}, \varepsilon: \text{正の定数}\}$$

とする。このとき,

$$F\{x(k)\} = H\{x(k)\} \cap B\{x(k); \bar{x}(k), \varepsilon\}$$

とする。 $F\{x(k)\}$ を求める。

Step 5. すべての $x(k) \in F\{x(k)\}$ に対して, $\langle x(k) - \bar{x}(k), \bar{p}(k) \rangle \leq 0$ となるように $\bar{p}(k) = \pi$ を定める。終わり。

最適解 (各時刻ごと) を求めるアルゴリズム

Step 1. $\bar{p}(k) = \pi$ とし, $i = k-1$ とおく。

Step 2. $\bar{p}(i) - \bar{p}(i+1) = A(i)^T \bar{p}(i+1)$ より $\bar{p}(i)$ を求める。 $i = 0$ ならば, $\bar{x}(0) = x_0$ とする。

Step 3. $\max_{u(i) \in \Omega} [\langle A(i)\bar{x}(i) + g(i, u(i)), \bar{p}(i+1) \rangle]$

を解いて $\bar{u}(i)$ を求める。

Step 4. $\bar{x}(i+1) = [I + A(i)]\bar{x}(i) + g(i, \bar{u}(i))$ より $\bar{x}(i+1)$ を求める。 $i < k-1$ ならば, $i = i+1$ として

Step 3.へ $i = k-1$ ならば, 終わり。

ところで $\bar{p}(k)$ を求めるアルゴリズムの Step 4 における凸包点による離散点の集合である $H\{x(k)\}$ を求めるには, $x(k): \max_{x(k) \in W(k)} [x^n(k)]$ をまず求め, こ

の点 $\{x(k)\}$ から $\text{co } W(k)$ の端点および稜上にそって $W(k)$ の最外殻点を探索することになっている。また $\bar{x}(k)$ 中心, 半径 ε 内の到達可能点である $x(k)$ を示している集合 $B\{x(k); \bar{x}(k), \varepsilon\}$ については, $H\{x(k)\}$ とこの $B\{x(k); \bar{x}(k), \varepsilon\}$ との共通集合である $F\{x(k)\}$ に $\bar{x}(k)$ 付近の $\text{co } W(k)$ の端点が含まれるように ε の値を調整することになっている。

また最適解を求めるアルゴリズムの Step 3 に関して, 許容制御の集合 Ω は有限有界な離散値のみを要素とする集合だから, ハミルトン関数の最大化については最悪の場合 Ω の要素を総当たりすれば, 最適制御ベクトルは求まる。しかし一般的には制約条件である Ω に対して, ハミルトン関数を最大にする整数計画問題として, branch and bound 法などを用いて解くことになる。

2.5 数値例 本稿では, 次に示す二次の最適制御問題に対し, 2.4 節のアルゴリズムを用いた解法結果を示す。なお数値計算にはパソコン SORD M23B を用いた。

状態方程式:

$$\begin{bmatrix} x^1(i+1) \\ x^2(i+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^1(i) \\ x^2(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(i) \\ x^2(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & u^1(i) \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1(i) \\ u^2(i) \end{bmatrix} \\ i = 0, 1, \dots, 4$$

図3 二次元システムの場合の最終時刻 k における集合 $S\{\bar{x}(k)\}$ および非ゼロベクトル $\bar{p}(k)$

許容離散値操作量：

$$u(i) = \begin{bmatrix} u^1(i) \\ u^2(i) \end{bmatrix} \in \Omega \\ = \left\{ \begin{array}{l} u^1(i) + 2u^2(i) \leq 3 \\ 3u^1(i) + 2u^2(i) \leq 5 \\ u^1(i) \geq 0, u^2(i) \geq 0; \text{整数} \end{array} \right\}$$

初期値：

$$x(0) = \begin{bmatrix} x^1(0) \\ x^2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

終端目標線：

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix} \middle| a = -259 \right\}$$

評価関数：

$$x^2(5) : \text{最大}$$

結果

仮定(i), (ii)は満たしている。

$\bar{p}(k)$ を求めるアルゴリズムにより, $\bar{p}(5)$ を求める。

Ω を満たす許容離散値制御ベクトルは4本あるので, $k=5$ (最終時刻)における到達可能な状態点 $x(5) \in W(5)$ は, $1024 (=4^5)$ 点からなる。

このとき, $D\{x(5)\}$ は7点からなり,

$$\max_{x(5) \in D\{x(5)\}} [x^n(k)] \text{ は, } \bar{x}(5) = \begin{bmatrix} -259 \\ 733 \end{bmatrix} \text{ と求まる。}$$

$H(x(5))$ については, x^2 について最大値をとる

$$\begin{bmatrix} -260 \\ 734 \end{bmatrix} \text{ から始めて, } W(5) \text{ の最外殻点を調べ,}$$

$B(x(5); \bar{x}(5), \varepsilon)$ については, $\bar{x}(5)$ に隣り合う二凸包点(二次元システムの場合であるので)が含まれるように $\varepsilon=10$ とする。このとき11点が含まれる。したがって, $F\{x(5)\}$ は $\bar{x}(5)$ 自身を除けば次に示す5点

$$\begin{bmatrix} -260 \\ 734 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -261 \\ 732 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -262 \\ 728 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -262 \\ 727 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -255 \\ 725 \end{bmatrix}$$

からなる。

したがって, これら5点に対して $\langle x(5) - \bar{x}(5), \bar{p}(5) \rangle \leq 0$ となる $\bar{p}(5) = \pi = (\pi^1, \pi^2)^T$ は, π^1 と π^2 の比において, $1/2$ 以上1以下になればよい。それゆえに π^1 と π^2 の比を $3/4$ すなわち $\pi^1=4, \pi^2=3$ と取ることにする。

$$\therefore \bar{p}(5) = \pi = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

次に最適解(各時刻ごと)を求めるアルゴリズムにより, 最適解を求める。

随伴方程式は次のようになる。

$$\bar{p}(i) = \begin{bmatrix} 3 & -i \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \bar{p}(i+1), i=0, 1, \dots, 4$$

したがって, 随伴ベクトルは逆時刻方向に

$$\bar{p}(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \bar{p}(3) = \begin{bmatrix} -24 \\ 32 \end{bmatrix}, \bar{p}(2) = \begin{bmatrix} -136 \\ 152 \end{bmatrix},$$

$$\bar{p}(1) = \begin{bmatrix} -560 \\ 744 \end{bmatrix}$$

と求まる。

次にハミルトン関数の最大化を順時刻方向に行う。

0時刻では

$$H_0 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^1(0) \\ \bar{x}^2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & u^1(0) \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1(0) \\ u^2(0) \end{bmatrix}, \bar{p}(1) \right\rangle \\ = 928u^1(0) - 560u^1(0)u^2(0) - 744u^2(0) : \text{最大}$$

ただし

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} u^1(0) + 2u^2(0) \leq 3 \\ 3u^1(0) + 2u^2(0) \leq 5 \\ u^1(0), u^2(0) \geq 0; \text{整数} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \bar{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

したがって

$$\bar{x}(1) = \bar{x}(0) + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}(0) \\ + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

同様にして

$$H_1 : \text{最大より, } \bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{x}(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$H_2 : \text{最大より, } \bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{x}(3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$H_3 : \text{最大より, } \bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{x}(4) = \begin{bmatrix} -39 \\ 144 \end{bmatrix}$$

$$H_4 : \text{最大より, } \bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{x}(5) = \begin{bmatrix} -259 \\ 733 \end{bmatrix}$$

と求まる。なお, ハミルトン関数の最大化には, branch and bound 法を用いた。

3. 結 語

終端条件を有する線形離散形離散値制御システムに対し, その一制御手法として Halkin の定式化および幾何学的アプローチを用いて, Pontryagin タイプ⁽⁹⁾の離散形最大原理を導いた。さらにこの最大原理によるアルゴリズムを示し, 簡単な数値例にこの方法を適用することにより最適解を求めた。

ところで数値計画手法を用いた従来の方法と本稿の方法との比較について述べると、どちらの方法もその中心となる点は整数計画問題を解くという点では同一であるが、その変数の数(次元)においては前者が状態ベクトル、制御ベクトルの数および離散時刻数に比例して増えるのに対し、後者は離散時刻ごとに分割されているので、制御ベクトルの数のみに押えられるわけである。また本稿の場合のように付加条件が課せられた場合でも、離散時刻ごとの分割を利用すれば、例えば最終時刻の随伴ベクトルの処理で有効に対応できる場合が多い⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。この点も本稿の方法の特徴と考えられる。

今後の課題としては、本稿では仮定とした " $W(k) \cap E \neq \emptyset$ かつ $W(k) \cap E$ の要素の中に $W(k)$ の凸包点が含まれる" について、 $W(k)$ の凸包点が含まれない場合もあるのでその場合の制御法；状態に関して非線形の場合の最適化条件；二次の場合は問題はないが、三次以上の場合の $\bar{x}(k)$ 付近での $\text{co } W(k)$ の形態の有効的な把握法（もちろん本稿での方法でも可能ではあるが）等が挙げられる。

日頃研究面でお世話になっている恩師慶応義塾大学理工学部、林喜男教授、同志水清孝教授に謝辞を申し上げる。また本稿に忠告下さった慶応義塾大学、安西祐一郎教授、本学山田光助教授に感謝申し上げる。

文 献

- (1) Lewis, J. B. and Tou, J. T., Optimum Sampled Data Systems with Quantized Control Signals, *Trans. AIEE*, (1963), 229-233.
- (2) Havira, R. M. and Lewis, J. B., Computation of Quantized Controls Using Differential Dynamic Programming, *IEEE Trans.*, AC-17 No. 2 (1972), 191-196.
- (3) Kim, M. and Djadjuri, K., Optimum Sampled Data Control Systems with Quantized Control Function, *ISA Trans.*, 6 (1967), 65-73.
- (4) Anzai, Y., Concepts of Controllability of Quantized Control Systems, *Keio Engineering Reports*, 25-12 (1972), 141-159.
- (5) Anzai, Y., A Note on Reachability of Discrete-Time Quantized Control Systems., *IEEE Trans.* AC-19 No. 5 (1974), 575-577.
- (6) 宮道・深尾, 離散値制御システムの制御可能性, 計測自動制御学会論文集, 12-2 (1976), 145-150.
- (7) 宮道, 離散値制御システムの標準構造について, 計測自動制御学会論文集, 13-5 (1977), 631-636.
- (8) Halkin, H., Optimal Control for Systems Described by Difference Equations, *Advances in Control Systems*, (1964), 173-196, Theory and Applications Academic Press.
- (9) Pontryagin, L. S. ほか3名, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, (1962), chap 1, John Wiley.
- (10) 宗像, 離散時間形量子的最適制御システムに関する研究とその応用, 慶応義塾大学博士課程論文, (1977).
- (11) 宗像, 二評価関数を有する Halkin タイプの制御問題の一最適離散値解, システムと制御, 28-11 (1984), 61-68.