多変数離散モデルを用いた実験モード解析*

岡田 養二^{*1}, 高 樋 昌^{*2}
松田 健一^{*1}, 山中 一雄^{*3}Multivariable Discrete Model Identification of Vibrating Structure
and Application to Experimental Modal AnalysisYohji OKADA, Takashi TAKAHI,
Kenichi MATSUDA, and Kazuo YAMANAKA

Experimental modal analysis has been widely used to identify the modal parameters of structures. Mainly, it is based on analyzing the individual test signal either in the frequency domain or in the time domain. The main defect is the inaccuracy of the spatial mode shape caused by analyzing the individual measured signal. This paper introduces a new method of identifying the modal parameters from its decaying response. First, the multivariable discrete model is identified from the measured signal. Then the identified characteristic matrix is analyzed by an eigenvalue routine to get the vibrating poles and its associated modes. The proposed technique is applied to a plate structure and its accuracy is tested.

Key Words: Dynamics of Machinery, Measurement, Vibration, Discrete Model, Identification, Experimental Modal Analysis

1. 緒 言

実験モード解析は、実験的に振動特性を把握する目的や、動特性改善に役立てるために広く用いられている。これは測定された振動データから、固有振動数、減衰率および振動モードを同定し、構造変更などに役立てようとするものである^{(1)~(3)}。

同定手法としては、周波数領域による手法と⁽⁴⁾⁽⁵⁾、時間領域による方法がある^{(6)~(8)}。どちらの方法にしる、振動波形のうちの成分の強い周波数について、各応答波形のフィルタリング的抽出を行い、固有振動数と減衰率を求める。これを各振動波形に適用し、振動モードを求める手法が主である。著者らも時間領域で平均化を行い、これに単点ごとの時系列解析を適用する方法を提案した⁽⁹⁾。これらの方法での問題点は、各振動波形のわずかな計算誤差によって、一つのモードを近接した二つのモードと誤認してしまうなど、空間的な関連がないことである。したがって時間領域におけるフィルタ的な同定だけでなく、時間と空間の双方のフ

ィルタ特性を考えた同定法が、より好ましいと思われる。全体項を使うモード解析も提案されているが⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、あまり普及していないようである。

一方で系の動特性を正確に同定したり、構造変更を推定しやすいように、物理特性である質量 m 、ばね k 、減衰 c を直接同定しようという研究も進んでいる^{(12)~(14)}。特性マトリックスが同定できれば、モード特性のみならず系の動的性質がすべて判明する。しかしこの手法は、非線形な同定理論を使わなければならず、計算効率の向上は難しい。

ここで提案する方法は、系を多変数の離散モデルによって表し、離散系の特性マトリックスを同定する方法である。離散系の場合は線形な同定方程式であり、通常の最小二乗法が適用できる。次に同定された特性マトリックスを固有値解析し、特性根より固有振動数とモード減衰を求め、固有モードより振動モードを求める方法である。

この方法は、基本的には構造物の減衰自由振動の、同時多点計測を必要とする。そのためには、高価なセンサ複数個と、多チャンネル A/D コンバータが必要である。すくなくとも、著者らにこれを用意することは不可能なので、1点加振1点測定ハンマリング応答によって、多点同時計測と等価な測定とする。この

* 平成元年6月2日 ロボティクス・メカトロニクス講演会'89
において講演、原稿受付 昭和63年10月27日。

^{*1} 正員、茨城大学工学部 (〒316 日立市中成沢町4-12-4)。

^{*2} 学生員、茨城大学大学院。

^{*3} 茨城大学工学部。

場合、純粋なインパルス応答を必要とするため、FFTアナライザによって周波数領域で平均化し、その後逆FFTによってインパルス応答に直すことが考えられる。著者らは前報で⁽⁹⁾、時間領域の平均化でFFTの計算誤差を受けることなく、精度のよいインパルス応答が抽出できることを示した。本報でも、図1に示す解析システムでこの方法を使うので、簡単に平均化の考え方を示す。

本方式の長所の一つは、測定点に1自由度を与えることで、測定対象を多自由度でモデル化することにある。そのためランダム加振のAR法(Auto Regressive Process)⁽⁸⁾や、Prony法⁽⁶⁾でおこる次数決定問題や、不安定根の発生は基本的にはない。唯一の欠点は、測定対象が集中定数系の場合、剰余項を考慮する合理的で簡便な方法がないことである。

提案した手法を、まずアナログ計算機上にシミュレートした5自由度モデルに適用する。同定された固有振動数、減衰率、振動モードを理論値と比較する。さらに実際の測定で起きやすい特定の点でのデータの倍率が、1.5倍になった場合のモード形への影響を検討する。最後に宙吊り平板を実際にハンマリングし、モード同定を行う。これも有限要素法で解析した結果と比較検討する。

2. 同定アルゴリズム

2.1 離散運動方程式 多自由度集中定数系近似

図1 実験モード解析系の構成

された、構造物の自由振動方程式は、次のマトリックス方程式で与えられる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

あるいは $v = \dot{x}$ を使うと、次の状態方程式となる。

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -m^{-1}cv - m^{-1}kx \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(1)、(2)の係数を同定すると言う点から考えると、式中の x , v は変位と速度である必要はない。これらの式を微分あるいは積分しても成立する。したがって速度と加速度、あるいは変位の積分と変位といった組合せでも成立する。一般の実験モード解析が、加速度センサで構築される方式にも、これからの議論は当てはまる。

式(1)あるいは式(2)を、時刻 $t = iT$ で離散化すると、次の線形離散モデルとなる。

$$x(i) = Ax(i-1) + Bx(i-2) \quad \dots\dots\dots (3)$$

あるいは $2n \times 2n$ のマトリックス D を使って

$$y(i) = Dy(i-1) \quad \dots\dots\dots (4)$$

と表される。状態量 $y = [x^T v^T]^T$ を使えば、式(4)の $2n \times 2n$ マトリックスを同定することとなる。しかしこの場合は、2種類のセンサを必要とする。本論文では式(3)の $n \times n$ マトリックス A , B を同定する。

2.2 インパルス応答の抽出 式(3)は、離散化された多自由度の減衰自由振動方程式である。これより A , B を推定するためには、減衰振動の多点同時計測を行い、すべての点の応答 $x(i)$ を必要とする。著者らには多点同時計測は不可能なため、前報で開発したインパルス応答の抽出とその平均化によって代替する⁽⁹⁾。ハンマリング試験での加振力を $u(i)$ 、応答を $x(k)$ とすると、ハンマリング力は完全なインパルスではない。しかもその大きさによって、応答の大きさも変化する。これを以下のような方法で、基準化する。

離散系の入出力関係はインパルス応答 $g(k-i)$ を使って次のように表せる。

$$x(k) = \sum_{i=0}^k g(k-i)u(i) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ハンマリングの同期点を $x(1)$, $u(1)$ とし、 $(2-L)$ より L 点までのデータで次のマトリックス式を作る。

$$\begin{bmatrix} x(L) \\ \vdots \\ x(2) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \cdots & u(L) \\ u(0) & u(1) & \cdots & u(L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(2-L) & \cdots & u(0) & u(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(L-1) \\ \vdots \\ g(1) \\ g(0) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(6)をガウスの消去法で解き、インパルス応答 $g(i)$ が求められる。これを平均化して、信頼性を高めるこ

とができる。\$j\$ 回め (\$j=1, 2, \dots, K\$) の試験ごとに求まったインパルス応答を \$g^{(j)}(i)\$ とすれば、平均化したインパルス応答とその分散は、次式で求められる。

$$g(i) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K g^{(j)}(i) \quad (7)$$

$$\xi_i^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K [g^{(j)}(i) - g(i)]^2 \quad (7)$$

これを測定すべき \$n\$ 点について、ハンマリング点 \$l\$ を変え (\$l=1, 2, \dots, n\$), \$g_l(i)\$ を求める。

2.3 係数 \$A, B\$ の同定 ハンマリング点 \$l=1\$ から \$n\$ まで、\$g_l(i)\$ を縦に配列して次のインパルス応答ベクトル \$\mathbf{g}(i)\$ を定義する。

$$\mathbf{g}(i) = [g_1(i) \ g_2(i) \ \dots \ g_n(i)]^T \quad (8)$$

この \$\mathbf{g}(i)\$ を式(3)の \$\mathbf{x}(i)\$ に代入し、転置すると次の関係を得る。

$$\mathbf{g}(i)^T = [\mathbf{g}(i-1)^T \ \mathbf{g}(i-2)^T] \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix} + \mathbf{e}^T \quad (9)$$

ここで \$\mathbf{e}\$ は、式(3)の方程式誤差となっており、測定誤差や高次振動成分を吸収しようとする項である。

式(9)を、\$i=3\$ から \$I\$ まで縦にならべて、次のマトリックス形式に表す。

$$\mathbf{E} = \mathbf{G} - \mathbf{G}^* \mathbf{X} \quad (10)$$

ここで

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1(3) \dots g_n(3) \\ g_1(4) \dots g_n(4) \\ \dots \dots \dots \\ g_1(I) \dots g_n(I) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} g_1(2) \dots g_n(2) g_1(1) \dots g_n(1) \\ g_1(3) \dots g_n(3) g_1(2) \dots g_n(2) \\ \dots \dots \dots \\ g_1(I-1) \dots g_n(I-1) g_1(I-2) \dots g_n(I-2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix}$$

未知ベクトル \$\mathbf{X}\$ の大きさは \$2n \times n\$ であり、式(10)の方程式の数は \$(I-2) \times n\$ である。したがってデータ点数を、\$I \geq 2n+2\$ と選べば、最小二乗法で解くことができる。誤差の二乗和 \$\lambda\$ を重み \$\mathbf{W}\$ をはさんで次のように定義する。

$$\lambda = \text{trace} \mathbf{E}^T \mathbf{W} \mathbf{E} \quad (11)$$

これを最小とするのは \$\partial \lambda / \partial \mathbf{X} = 0\$ であり、次のように未知係数を求めることができる。

$$\mathbf{X} = (\mathbf{G}^{*T} \mathbf{W} \mathbf{G}^*)^{-1} \mathbf{G}^{*T} \mathbf{W} \mathbf{G} \quad (12)$$

2.4 固有振動数と振動モードの決定 式(3)の運

動方程式が同定できれば、状態量 \$\mathbf{y} = [\mathbf{x}^T(i) \ \mathbf{x}^T(i-1)]^T\$ を使って

$$\mathbf{y}(i) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(i) \\ \mathbf{x}(i-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(i-1) \\ \mathbf{x}(i-2) \end{bmatrix} = \mathbf{D} \mathbf{y}(i-1) \quad (13)$$

と置き換え、離散正準方程式を作成する。ここで \$\mathbf{I}\$ は単位マトリックス、\$\mathbf{O}\$ は零マトリックスである。これを、

$$(\mathbf{zI} - \mathbf{D}) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (14)$$

の形の固有値解析を行うことで、\$z\$ 領域の固有値 \$z_i\$ と、対応する固有ベクトル \$\mathbf{y}_i\$ を求めることができる。この根 \$z_i\$ の中で、振動的で低次の根を選び

$$s_i T = \ln z_i, \quad z_i = \exp s_i T$$

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad \omega_{ni} = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}, \quad \zeta_i = \tan^{-1} \sigma_i / \omega_i \quad (15)$$

の変換によって、固有振動数 \$\omega_{ni}\$ と減衰率 \$\zeta_i\$ を得る。振動モードは、式(14)で求められた固有ベクトル

$$\mathbf{y}_i = [\mathbf{x}_i^T \ z_i \mathbf{x}_i^T]^T \quad (16)$$

のうち、上半部を取れば \$i\$ 次の固有モード \$\mathbf{x}_i\$ が求められる。この固有モードの \$k\$ 点の要素 \$x_{i,k}\$ の実数部 \$x_{Ri,k}(k)\$ と虚数部 \$x_{Ii,k}(k)\$ より、振幅と位相は

$$A_i(k) = \sqrt{x_{Ri,k}^2(k) + x_{Ii,k}^2(k)}$$

$$\phi_i(k) = \tan^{-1} \{x_{Ii,k}(k) / x_{Ri,k}(k)\} \quad (17)$$

と求められる。これを複素面内で描く平面ベクトルの、主軸への投影で実モード近似することができる。

3. 実験結果と考察

前述の実験モード解析手法の有効性を確かめるため、2種類の実験を行う。これらは前報と比較するため⁽⁹⁾、同じ係数を持つ5自由度のシミュレーションと、宙吊り平板の実験を取り上げる。

3.1 5自由度集中定数系のシミュレーション

図2に示す5自由度系をアナログ計算機にシミュレートし、前節の手法を適用する。外力は発振器より擬似インパルス入力を加え、その応答を取り込む。ここでは \$m_2\$ に力を加え、変位応答 \$x_1 \sim x_5\$ を2チャンネルA/Dコンバータでコンピュータに取り込む。加振力と応答から、式(6)でインパルス応答を抽出し、式(7)で5回平均化し、これを式(12)に代入して \$\mathbf{A}, \mathbf{B}\$ マトリックスを同定する。なお測定条件は各点で同じであり、式(7)のデータの分散は等しかったので、重み \$\mathbf{W}\$ は省略した。これより式(13)の \$\mathbf{D}\$ マトリックス (\$n=5\$ であるから \$10 \times 10\$ マトリックス)を作成し、2段QR法で固有値解析を行う。同定された固有値を、式(15)で固有振動数と減衰率(%)に直し図3の右に、また式

(16), (17)で求めたモードを図中の実験で示す。精度確認のため、シミュレーション設定値より求めた固有振動数と、減衰率(%)を同図左に、モードを点線で示す。割合に良い一致をみている。しかし27次の離散フィルタで同定し、十分に剰余項を考慮した前報の結果よりは誤差が増えている。これは本手法が、各質点に1自由度を与えて5自由度モデル(10次)で同定しており、いわゆる剰余項を考慮できないためである。アナログ計算機のシミュレーションは、実験よりは条件は良いとは言え、シミュレーション誤差やA/Dコンバータの変換誤差などが入る。集中定数系に本方式を適用する場合、剰余項を入れる妥当で簡便な方法はない。しかし実際の構造物の場合、測定点数は同定したいモード数の数倍で、この差が剰余項となるため、実用上の障害とはならないと考えられる。

次に点3の測定データ $g_3(i)$ を1.5倍して同定を試みる。実験モード解析では、測定面を直角にハンマリングできなかったり、加速度センサの感度が少し変化してしまうことは良く起こる。本手法は空間フィルタ的

図2 5自由度集中質量モデル

図3 同定されたモードと計算されたモードの比較
(同定条件: $T = 1.95$ ms, $n = 5$, $I = 100$)

特性を使っているので、低次モードに対し測定倍率の誤差に対する精度向上が期待できる。解析結果から求められたモードを、図4に示す。当初期待したような、低次モードに対して空間フィルタ的效果は残念ながら、点3の振幅が大きく現れている。逆に考えれば、測定が解析結果に良く反映されている。したがって、本方式でも従来方式同様に、測定感度などには十分に注意しなければならない。なお、図4の右側に示すように、固有振動数と減衰率は図3の場合と全く同一である。

3.2 宙吊り平板の実験 前述の実験では入れら

表1 同定された特性根の比較

No.	ω [Hz]	ζ [%]	prev. ω	F.E.M. ω
(1)	108.3040	90.283		
(2)	116.6249	96.493		
(3)	122.4305	93.522		
(4)	130.6777	105.923	130.65	133.3
(5)	163.9615	82.667		
(6)	167.2890	52.333		
(7)	173.7097	105.139	173.79	172.7
(8)	188.5720	55.385		
(9)	226.9803	43.747		
(10)	251.269	79.797		
(11)	267.320	24.473		
(12)	269.017	50.811		
(13)	270.360	101.716	270.43	263.2
(14)	307.440	13.212		
(15)	314.368	41.926		
(16)	320.876	102.500	321.02	321.6
(17)	329.410	68.633		
(18)	357.145	17.336		
(19)	367.346	104.451	367.55	363.6
(20)	450.263	47.527		
(21)	503.462	10.100		
(22)	508.405	104.046		
(23)	538.883	7.3592		
(24)	628.982	118.503		
(25)	635.909	4.1292

図4 測定感度のモードと固有振動数への影響

図5 同定された鋼板の振動モード (同定条件 $T=0.78$ ms, $n=30$, $I=250$)

れなかった剰余項が考慮でき、実際にハンマリング力を加える連続体のモード解析として、図1に示す宙吊り平板を取り上げる。厚さ4.5 mm、大きさ300×360 mmの鋼板をゴムで宙吊りとし、図1に示された点30に加速度計を取付け、点1より順にハンマリングを繰り返す。この加速度応答波形に、前述の手法を適用する。計算条件は $T=0.78$ ms, $n=30$, $I=250$ であり、8回の平均でインパルス応答を抽出し、マトリックス A , B を同定する。これより式(13)のマトリックス D (大きさ60×60) を作成し、固有値解析を行う。求められた固有振動数 [Hz] と減衰率 [%] を、表1に示す。25個の共役な振動根が求められている。残り10個はすべて、安定な実根である。本方式は、測定点を1自由度としてモデル化しており、応答が安定であれば基本的には不安定な根は同定されない。これはAR法やProny法では、次数の決定や不安定根の問題があるのに対し⁽⁸⁾⁽⁶⁾、本方式の優位性を示している。共振根の中でも、測定周波数500 Hz以内の共振根5個はすべて減衰が小さく、それ以外の根は、急速に減衰する根である。測定をやり直しても、この傾向は変わらず、簡単に真の振動根が抽出できる。表の右に前報⁽⁹⁾での結果と、有限要素法 (NASTRAN) の計算結果を、比較のために示す。FEMでは減衰の値は求められないが、5個の弾性モードの共振周波数はよく一致している。わずかな違いは測定誤差と言うよりは、FEM解析での板厚などが少し違ったためと思われる。

モード形の比較を図1 (モード1) と図5 (モード2から5) に示す。細い実線は変形前の形状で、太い実線が同定されたモード形、点線がFEMで求めたモード形である。加速度計を取付けた影響や、端の点でのハンマリングの誤差によって少し違いが現れるが、比較的良い精度のモード形を示している。この計算時間はHP330C BASICで15 minであり、計算効率も悪くない。

4. 結 論

ハンマリング応答の測定点に1自由度(2次)の離散モデルを当てはめ、多変数の離散方程式を同定し、その特性マトリックスを固有値解析するモード解析法を提案した。これをシミュレーションと実際のハンマリング実験に適用し、次の結論を得た。

(1) 本方式では測定点に1自由度を与え、測定点数の自由度で離散モデル化するので、応答が安定であれば基本的に安定な根が求まり、真の根の抽出が容易であり、固有値の同定精度も良い。

(2) モード形は測定データをよく反映しており、その精度は従来の方式とほぼ同じと考えられる。したがって、検出器の精度などには、十分注意しなければならない。

(3) 次数は測定点数によって決定されるため、極めて合理的に次数決定がなされる。反面、集中定数系に対しては、剰余項を考慮できない。

文 献

- (1) 大久保, 機械のモダラアナリシス, (1981), 47, 中央大学出版会.
- (2) 長松, モード解析, (1985), 99, 培風館
- (3) 日本機械学会編, モード解析の基礎と応用, (1986), 38 丸善.
- (4) Brown, D. L., ほか3名, Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis, SAE paper, No.790221, (1979).
- (5) 花田・安藤, 第6回日本地震工学シンポジウム資料, (1981), 905.
- (6) Mergeay M., Multi Degree of Freedom Parameter Estimation Methods for Modal Analysis, *Annals of the CIRP*, 31 (1982), 269.
- (7) Ibrahim, S. R. and Mikulcik, E. C., *The Shock and Vibration Bulletin*, 47-4(1977), 183.
- (8) 鈴木・河野辺, 機論, 53-496, C (1987), 2445.
- (9) 岡田・ほか2名, 機論, 54-507, C (1988), 2509.
- (10) Schmerr, L. W., A New Complex Exponential Frequency Domain Technique for Analyzing Dynamic

- Response Data, *Proc. of the 1st Int. Modal Analysis Conf.*, (1982), 183.
- (11) Coppolino, R. N., A Simultaneous Frequency Domain Technique for Estimating Modal Parameters from Measured Data, *SAE paper*, No.811046 (1981).
- (12) 大熊・長松, 機論, 52-478, C (1986), 1742.
- (13) 大熊・長松, 機論, 53-493, C (1987), 1913.
- (14) Leuridan, J. M., ほか2名, Direct Parameter Identification of Mechanical Structures with Application to Modal Analysis, *AIAA 82-0767-CP*, (1982), 497.

討 論

〔質問〕 鈴木浩平・吉村卓也

〔東京都立大学工学部〕

(1) 著者らの提案されている多変数離散モデルを用いたモード特性の同定法は、多点参照の曲線適合方法である時間領域データを用いたボルドの方法⁽²⁾（ポリリファレンス）において、同定自由度を測定点数に等しくおいて解く場合と一致する。

したがって、提案された方法はボルドの方法の特別な場合とみなすことができ、また、ボルドの方法では同定自由度を測定点数に必ずしも一致させる必要はないことから、後者のほうが同定法としては優れているのではないかと考えられるがいかがか。

(2) 上で述べたのと同様な理由により、式(14)の固有値解析によって得られた固有値から真の根を選択するのは、時間領域の一般の曲線適合と同様、必ずしも容易ではないのではないかと思われる。同定自由度が測定点数に等しいとき、真の根の抽出が容易であるとする根拠は何か。

(3) 著者の述べられている空間フィルタとは何か。

〔回答〕 (1) ボルドの方法との大きな違いは、多チャンネルのデータ収集システムが不要で、FFT演算誤差などが避けられることである。したがって一点加振、一点応答測定を繰返し、精度良いモード解析ができるように工夫している。

もう一点は、質問者のご指摘のように、同定自由度と測定自由度を一致させ、有限要素と同じようなモデ

ル化をしたことである。これは質問(2)と関連するので、以下のように回答させていただく。

(2) 同定されるべき根の数は、普通数～十数個であり、それ以上の共振はエイリアジング防止フィルタで測定されない。一方測定自由度は、モード形を作るためこれより多いことが一般的である。この差が剰余自由度となり、誤差を吸収する。剰余自由度は同定根の精度向上には役立つが、反面偽の根が入り真の根の選択を困難にする。本手法は同定自由度を測定自由度と一致させることで、同定モデルを有限要素モデルに選んでいる。そのため測定した波形が安定な波形であれば、不安定根や偽の共振根が混入しずらく、剰余自由度で同定される根はノイズなどによる減衰の良い根か、アンチエイリアジングなどの高次の根である。一般の時間領域同定法に比べて本手法は低次の共振根を選択することで、真の根を容易に分離することができ、優れていると考えるわけである。

(3) 例えば時間領域の離散方程式同定(AR法)であれば、同定された特性根の波形が抽出され、時間フィルタの役割をしてくれるわけである。本手法は空間的にも離散方程式を使っているのもので、特性根に対応した振動モードが、データのゆがみを訂正するような形で同定してくれないか、と期待したわけである。この空間的なモード形のフィルタ特性があれば、同定上はきわめて有利と考えられるが、残念ながらこの性質はなかった。