インボリュート歯形の円弧近似*

丘 華^{*1}有浦泰常^{*2}A Method of Approximation by a Circular Arc
for the Involute Tooth Profile

Hua CHIU and Yasutsune ARIURA

How to determine the parameters of a circle arc, which has a better accuracy of approximation to an involute tooth profile, is an interest theme up to the present, because the circle arc is simpler than the involute in manufacturing and measurement of inspection. But it is not considered that this problem has been completely solved and its application may be limited. In this paper, a convenient method to determine the optimum parameters of a circle arc is proposed and the effect of the errors of the parameters on the accuracy of approximation is clarified, too.

Key words: Involute Tooth Profile, Approximation of Circle Arc, Optimum Value, Approximation Accuracy, Tooth Profile Error

1. 緒言

歯車の加工と測定を簡便に行なうために、従来よりインボリュート歯形を円弧で近似することが研究されている^{(1)~(6)}。いかに近似円弧を最適に決定するかに関して、Dudleyは原理的に説明しているが、その計算は非常に複雑であるので試行錯誤的に決定することをすすめた⁽¹⁾。津田らはインボリュート歯形上に適当に数点を取って、最小自乗法で近似円弧を決定する方法を提案し、当時最も良い近似を行なっている⁽⁴⁾。その後、銭は三つのパラメータを最適化することにより、数値計画法で近似円弧を決定する方法を提案して、最適値に非常に近い結果を得ているが、その計算は面倒で応用の面からやはり不便である⁽⁶⁾。また、これらの研究では近似精度に関して、円弧を表わすパラメータの誤差の影響は明らかにされていない。

本報告では、近似円弧を表わすパラメータの最適値を簡便に求める方法を提案し、近似精度に及ぼすそれらのパラメータの誤差の影響も明らかにした。

2. 近似円弧を表わすパラメータの最適値の決定

曲率半径の特徴から、インボリュート歯形とその最適円弧において、図1に示すような関係が存在すると考えられる。すなわち、円弧とインボリュートは三つの点B, C, Dで交わり、歯形の各部分(AB, BC, CD, DE)上

の最大近似誤差(これらはそれぞれ各部分の歯形誤差となる) f_{r1} , f_{r2} , f_{r3} , f_{r4} は次式の関係を満足する。A点とE点はそれぞれ歯形のインボリュート開始点と終点である。

$$f_{r1} = f_{r3} = -f_{r2} = -f_{r4} \quad (1)$$

ここで、インボリュート歯形より突出した誤差を正、凹んだ誤差を負とする。図1において、原点Oは歯形基礎円の中心であり、x軸は基礎円上のインボリュートの開始点を通るとする。近似円弧の中心 O_c とOとの距離を R_{00c} がx軸に対する角度を θ とする。この座標系において、インボリュートの方程式は

$$\begin{cases} x = r_b(\cos\phi + \phi\sin\phi) \\ y = r_b(\sin\phi - \phi\cos\phi) \end{cases} \quad (2)$$

その接線の傾きは

図1 インボリュート歯形とその近似円弧

* 原稿受付 平成元年3月27日。

^{*1} 准員、九州大学大学院 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

^{*2} 正員、九州大学工学部。

$$dy/dx = \tan \phi \quad (3)$$

円弧の方程式は

$$(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 = \rho^2 \quad (4)$$

インボリュート歯形上の一点 H について、そのインボリュート展開角を ϕ 、その点における法線と円弧との交点を H' とする。H' 点の接線の傾きは次式で表わされる。

$$dy/dx = \tan[\phi + \tan^{-1} \{ (r_b - R \cos(\phi - \theta)) / \sqrt{\rho^2 - \{r_b - R \cos(\phi - \theta)\}^2} \}] \quad (5)$$

歯形の BC 部分と CD 部分上に近似円弧によって最大歯形誤差を生ずる点 F と G において、インボリュート歯形と円弧は接線の傾きが同じになる。式 (3) と式 (5) から F 点と G 点で次式が成り立つ。

$$r_b - R \cos(\phi - \theta) = 0 \quad (6)$$

すなわち、F 点と G 点におけるインボリュート展開角 ϕ_F と ϕ_G は次式を満足する。

$$\begin{cases} \phi_F = \theta - \cos^{-1}(r_b/R) = \theta - \beta \\ \phi_G = \theta + \beta \end{cases} \quad (7)$$

なお、F 点と G 点の法線の交点は近似円弧の中心 O_c となる。

一方、図 1 からインボリュート歯形上の一点 H において、近似円弧の歯形誤差 HH' は次式で表わされることがわかる。

$$HH' = R \sin(\phi - \theta) - r_b \cdot \phi + \sqrt{\rho^2 - \{r_b - R \cos(\phi - \theta)\}^2} \quad (8)$$

式 (6) と式 (7) を式 (8) に代入して、 $f_{r2} + f_{r3} = 0$ から、次式が得られる。

$$\rho = r_b \cdot \theta \quad (9)$$

従って、 f_{r2} と f_{r3} は次式で表わされる。

$$f_{r3} = \sqrt{R^2 - r_b^2} - r_b \cos(r_b/R) = -f_{r2} \quad (10)$$

式 (8) ~ (10) から最適円弧を決めるためには、式 (1) を満足するように二つのパラメータ R と ρ を次式から求めれば良いことがわかる。

$$\begin{cases} f_1(R, \rho) = R \sin(\phi_a - \theta) - r_b \cdot \phi_a + \sqrt{\rho^2 - \{r_b - R \cos(\phi_a - \theta)\}^2} - \sqrt{R^2 - r_b^2} + r_b \cos^{-1}(r_b/R) = 0 \\ f_2(R, \rho) = r_b \cdot \phi_g - R \sin(\phi_g - \theta) - \sqrt{\rho^2 - \{r_b - R \cos(\phi_g - \theta)\}^2} - \sqrt{R^2 - r_b^2} + r_b \cos^{-1}(r_b/R) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

ただし、 ρ と θ の間に式 (9) の関係がある。上式をニュートン法で解けばその収束は非常に速い。付録に示す初期値から、4 回の反復計算で $|f_{r1}|$ は 10^{-3} mm まで一致している ($m=1$, $\alpha=20^\circ$)。

図 2 に $m=1$, $\alpha=20^\circ$, $Z=20 \sim 100$ の標準平歯車の歯形を円弧で近似するときの $|f_{r1}|_{max}$ を示す。同図には津田らの結果と銭の結果も示した。津田らの結果

図 2 近似円弧による $|f_{r1}|_{max}$ ($m=1$, $\alpha=20^\circ$, $\beta=0^\circ$)

と比べて、本方法の近似誤差は半分以下になる。銭の結果は本方法の結果（転位係数 $X=0$ ）とほとんど同じであるが、銭の方法で求めた誤差はインボリュートに対する円弧の誤差ではなく、円弧に対するインボリュートの誤差である。インボリュート歯形に対する誤差に変換すると、銭の結果は本方法の結果より近似誤差がやや大きい。例えば、 $m=1$, $\alpha=20^\circ$, $Z=20$ のとき、詳細に計算すると、銭の $|f_{r1}|_{max} = 5.90 \mu\text{m}$ 、本方法の結果は $5.87 \mu\text{m}$ である。同図には $X=\pm 0.5$ (標準歯) の場合の結果も示している。歯数が小さいとき負転位によって歯形のインボリュート部分が短くなる場合を除いて、一般的に正転位の場合には円弧による近似誤差は小さくなる。なお、全歯形の歯形誤差としては図示した $|f_{r1}|_{max}$ の 2 倍になる。

3. 近似精度に及ぼすパラメータ R , ρ の誤差の影響

前述したように近似円弧を表わすパラメータは R と ρ である。歯形の BD 部分、AB 部分と DE 部分における歯形誤差 f_{rBD} , f_{rAB} , f_{rDE} はそれぞれ次式で表わされる。

$$\begin{cases} f_{rBD} = 2 \{ \sqrt{R^2 - r_b^2} - r_b \cos^{-1}(r_b/R) \} \\ f_{rAB} = R \sin(\phi_a - \theta) - r_b \cdot \phi_a + \sqrt{\rho^2 - \{r_b - R \cos(\phi_a - \theta)\}^2} - \sqrt{R^2 - r_b^2} + r_b \cos^{-1}(r_b/R) \\ f_{rDE} = r_b \cdot \phi_g - R \sin(\phi_g - \theta) - \sqrt{\rho^2 - \{r_b - R \cos(\phi_g - \theta)\}^2} - \sqrt{R^2 - r_b^2} + r_b \cos^{-1}(r_b/R) \end{cases} \quad (12)$$

上式から、 f_{rBD} は R のみの関数で、 f_{rAB} と f_{rDE} は ρ と関連していることがわかる。 R と ρ の最適値から偏りがあるとき、それが近似精度に及ぼす影響を考察するために、 f_{rBD} , f_{rAB} , f_{rDE} を R , ρ について微分すれば良い。これらの微分を図示すると図 3 となる。図 3 から、次のことがわかる。

(1) 近似精度に対して、最適値から R の変化の影響が ρ の方よりはるかに大きい。

図3 歯形誤差に対するRと ρ の誤差の影響

(2) 歯数の増加につれて、最適値から R と ρ の変化の影響は両方とも鈍感になる。

(3) R が最適値に偏っているとき、 f_{rBD} の増減は R の増減と同じであり、 f_{rAB} と f_{rDE} の増減は逆になる。R の同じ変化量に対して、 f_{rBD} の変化量が f_{rAB} と f_{rDE} のそれより大きい。

(4) 最適値から R の偏差が負側にあるとき、近似精度に及ぼす R の誤差の影響は鈍感になる。この場合、歯形誤差の増加量は R の偏差量の15%よりも小さい。

4. 結言

本報告では、インボリュート歯形を円弧で近似するとき、簡便に最適円弧を決定する方法を述べた。円弧を表わすパラメータとしては基礎円の中心と円弧の中心との距離 R 及び円弧の半径 ρ の二つである。近似精度に対して R と ρ の誤差の影響も明らかにした。

付録. R と ρ の初期値について

近似円弧とインボリュート歯形との交点 B, C, D (図

1 を参照) によって、インボリュート歯形は AB, BC, CD, DE の四つの部分に分けられる。各部分のインボリュート曲線の長さがそれぞれ全歯形のインボリュート曲線長さの 1/6, 1/3, 1/3, 1/6 になるように R と ρ の初期値 $R^{(0)}$, $\rho^{(0)}$ を設定する。このとき、

$$\begin{cases} \phi_B = \sqrt{(\phi_E^2 - \phi_A^2)/6 + \phi_A^2} \\ \phi_C = \sqrt{(\phi_E^2 - \phi_A^2)/2 + \phi_A^2} \\ \phi_D = \sqrt{5(\phi_E^2 - \phi_A^2)/6 + \phi_A^2} \end{cases} \quad (13)$$

ϕ_B , ϕ_C , ϕ_D を式 (2) に代入して、B, C, D 点の座標 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) が求められる。これから、円弧の中心 $O_c (x_c, y_c)$ は

$$\begin{cases} x_c = \{a(y_2 - y_3) - b(y_2 - y_1)\}/c \\ y_c = \{b(x_2 - x_1) - a(x_2 - x_3)\}/c \end{cases} \quad (14)$$

ただし、

$$\begin{cases} a = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \\ b = x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 \\ c = 2\{(x_2 - x_1)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_2 - y_1)\} \end{cases} \quad (15)$$

式 (14) から、

$$\begin{cases} R^{(0)} = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \\ \rho^{(0)} = r_b \cdot \theta^{(0)} = r_b \cdot \tan^{-1}(y_c/x_c) \end{cases} \quad (16)$$

参考文献

- (1) D.W.Dudley: Gear Handbook, 23-19, McGraw-Hill, (1962).
- (2) 会田, ほか 2 名: 精密機械, 20-8(1954-8), 285.
- (3) 斎藤, 石川: 機論 C, 35-275(1969-7), 1545.
- (4) 津田, ほか 2 名: 精密機械, 40-8(1974-8), 666.
- (5) W.König, H.M.Meijboom: VDI-Z, 121-21(1979-11), 1087.
- (6) 銭: 機械工程学報(中国語), 19-1(1983-3), 58.