弾性回転板の有限要素モデリングと周波数応答*

小 島 宏 行^{*1}Finite Element Modeling and Frequency Response of
a Flexible Rotating Plate

Hiroyuki KOJIMA

In this paper, the finite element modeling of a flexible rotating plate, in consideration of both the bending vibration and the rotating motion, is presented. The frequency responses of the system consisting of the flexible rotating plate and the rotating axis with a torsional spring and damper are investigated. In the finite element modeling of the rotating flexible plate, the element mass matrix of the rectangular plate element is formulated by use of the shape function derived by Melsoh. This element mass matrix, consists of three parts that correspond to the bending vibration, the interaction between the bending vibration and the rotating motion, and the moment of inertia. By using the element mass matrix, the equation of motion is obtained. Furthermore, the effects of the rigidity of the torsional spring on the frequency responses are demonstrated.

Key Words: Dynamics of Machinery, Flexible Plate, Rotating Motion, Bending Vibration, Finite Element Modeling, Mass Matrix

1. 緒 言

宇宙構造物やロボットなどの FA 機器についての軽量化ならびに高速化に関する数多くの研究が、報告されている。これらの研究の一部を挙げると、たとえば、フレキシブルアームのモデリングと制御^{(1)~(10)}ならびに太陽電池パドルの制御⁽¹¹⁾⁽¹²⁾などに関する研究があり、運動方程式のモデリングの手法としては、固有関数展開法や Rayleigh-Ritz の方法^{(7)~(12)}および有限要素法^{(1)~(6)}が用いられている。他方、回転軸に取付けられた板構造物は、種々の機器においてしばしば見受けられるが、このような回転軸と弾性板との相互作用による動力学的特性を調べた研究は、極めて少ないように思われる。この場合、運動方程式のモデリングの手法として、フレキシブルアームの場合と同様、固有関数展開法ならびに有限要素法が考えられるが、形状の変化や集中質量の有無などに対して比較的容易に対処できる有限要素法を用いることのほうが、実用上望ましいように思われる。しかしながら、回転運動を伴わない場合の動的な長方形の板曲げ要素については、す

で Dawe により理論的に定式化され、広く用いられているが⁽¹³⁾、回転運動と曲げ振動が連成する場合の板曲げ要素に対する有限要素モデリングについては、まだ報告されていないように思われる。

本研究は、回転軸に取付けられた弾性板の有限要素モデリングについて述べるとともに、ねじりばねとダンパが回転軸に取付けられた場合の系の周波数応答について調べたものである。有限要素モデリングにおいては、Melsoh が導いた長方形の板曲げ要素に対する形状関数⁽¹⁴⁾を用いて、回転運動と曲げ振動との両方を考慮した要素質量マトリックスを、理論的に定式化している。この長方形板曲げ要素の要素質量マトリックスは、Dawe の導いた曲げ振動に対応するマトリックス、回転運動と曲げ振動の相互作用を表すベクトル、ならびに回転運動に対応する慣性モーメントから構成されることが、示されている。つづいて、定式化された要素質量マトリックスを用いて、系の運動方程式が導かれている。さらに、回転軸に取付けられたねじりばねの剛性の大小が系の周波数応答に及ぼす影響の一端を、調べている。

* 平成元年 8 月 25 日 東北支部盛岡地方講演会において講演、原稿受付 昭和 64 年 12 月 6 日。

*1 正員、群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町 1-5-1)。

2. 有限要素法による運動方程式のモデリング

2.1 弾性回転板の要素質量マトリックスの導出

図1は、回転軸に固定された長方形の弾性板の有限要素分割図を示したものであり、弾性板は6個の長方形の板曲げ要素に分割されている。また、回転軸には、図2のように、ねじりばねならびにダンパが取付けられている。これらの板曲げ要素③の任意の点Pの曲げ振動による速度 $\dot{w}$ は、曲げ変位 w が比較的小さい範囲においては、図2のように、板固定部の接平面に垂直であるものと近似できる。したがって、板曲げ要素③の運動エネルギー T_e は、図2中の記号を用いると、次式のように表すことができる。

$$T_e = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{2} \rho h \dot{z}^2 dx dy \quad (1)$$

ここに

$$z = w + (r_e + x)\theta \quad (2)$$

ただし、 $2a, 2b$ は板曲げ要素の寸法、 ρ は密度、 h は厚み、 w は曲げ変位、 z は移動距離、 r_e は回転軸と板要素との距離、 x, y は板曲げ要素の中心を原点とする座標を表している。

一方、板の曲げ変位 w は、Melsohが導いた形状関数⁽¹⁴⁾⁽¹⁶⁾を用いると、次式のように記述できる。

$$w = N_e L' \phi_e \quad (3)$$

ここに

$$N_e = \{N_i, N_j, N_k, N_l\} \quad (4)$$

$$L' = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2b \end{bmatrix} \quad (6)$$

図1 弾性回転板の有限要素分割図

$$\phi_e = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{Bmatrix}, \phi_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}, \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

$$N_i = X_1 Y_1 \{2(X_1 Y_1 - X_2 Y_2) - 4X_1 X_2 - 4Y_1 Y_2, 2Y_1 Y_2, -2X_1 X_2\} / 32 \quad (9)$$

$$N_j = X_1 Y_2 \{2(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) + 4X_1 X_2 + 4Y_1 Y_2, 2Y_1 Y_2, 2X_1 X_2\} / 32 \quad (10)$$

$$N_k = X_2 Y_1 \{2(X_2 Y_1 - X_1 Y_2) + 4X_1 X_2 + 4Y_1 Y_2, -2Y_1 Y_2, -2X_1 X_2\} / 32 \quad (11)$$

$$N_l = X_2 Y_2 \{2(X_2 Y_2 - X_1 Y_1) - 4X_1 X_2 - 4Y_1 Y_2, -2Y_1 Y_2, 2X_1 X_2\} / 32 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= X - 1, & X_2 &= X + 1, & X &= x/a \\ Y_1 &= Y - 1, & Y_2 &= Y + 1, & Y &= y/b \end{aligned} \quad (13)$$

なお、式(3)～(8)において、 ϕ_e は板曲げ要素③の変位ベクトル、 ϕ_i は節点 i の変位ベクトル、 θ_x, θ_y はたわみ角を表している。式(3)～(13)を用いると、式(2)は次式のように書くことができる。

$$z = N_e L \phi_e \quad (14)$$

ここに

$$N_e = \{N_e, N_\theta\} \quad (15)$$

$$\phi_e = \begin{Bmatrix} \phi_e \\ \theta \end{Bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L' & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$$

$$N_\theta = Re + (X/2), Re = r_e/2a \quad (16)$$

式(14)を式(1)に代入すると、長方形板曲げ要素③の運動エネルギー T_e は、次式のように得られる。

図2 弾性回転板の曲げ要素

$$T_e = \frac{1}{2} \phi_e^T M_e \phi_e \quad (17)$$

ここに

$$M_e = \rho h a b L \bar{M}_e L \quad (18)$$

$$\bar{M}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_e^T N_e dX dY \quad (19)$$

式(17)～(19)の M_e , $\bar{M}_e$ は、回転軸の回転角 θ と板の曲げ振動変位 w との相互作用を考慮した場合の要素質量マトリックスならびに無次元表示の要素質量マトリックスを表している。式(19)の二重積分を実行したところ、無次元表示の要素質量マトリックス $\bar{M}_e$ は、次式のように導かれた。

$$\bar{M}_e = \begin{bmatrix} \bar{M}_{e1} & \bar{M}_{e2} \\ \bar{M}_{e2}^T & M_{e3} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\bar{M}_{e2} = \frac{Re}{6} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{180} \begin{bmatrix} -36 \\ 5 \\ -3 \\ -36 \\ -5 \\ -3 \\ 36 \\ -5 \\ 36 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$M_{e3} = 4Re^2 + \frac{1}{3} \quad (22)$$

ただし、 $\bar{M}_{e1}$ は回転運動を伴わない場合の板曲げ要素の質量マトリックスを示しており、すでに Dawe により報告されているので⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾、ここでは省略する。また、 $\bar{M}_{e2}$ は、回転軸の回転運動と板の曲げ振動との相互作用を表すベクトルであり、 M_{e3} は、弾性板を剛体とみなした場合の長方形の板曲げ要素の慣性モーメントを表している。

2.2 力学系の運動方程式 図1の回転軸にトルク T_0 が作用するものとする。力学系のラグランジュアン L は、Zeinkiewicz らにより導かれた要素剛性マトリックス K_e ^{(15)～(17)} ならびに式(17)の要素質量マトリックスを用いると、次式のように書くことができる。

$$L = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \sum_{e=1}^{\bar{n}} \left[\frac{1}{2} (\phi_e^T M_e \dot{\phi}_e + \phi_e^T K_e \phi_e) - \frac{1}{2} K_0 \theta^2 - \frac{1}{2} C_0 \dot{\theta}^2 + T_0 \theta \right] \quad (23)$$

ここに

$$K_e = \frac{Eh^3}{720ab(1-\nu^2)} L^T \{K_1 + K_2 + \nu K_3$$

$$+ \frac{(1-\nu)}{2} K_4\} L' \quad (24)$$

ただし、 J_0 は回転軸の慣性モーメント、 $K_0 (=a\bar{K}_0)$ はねじりばね定数、 $C_0 (=a_0\bar{C}_0)$ は減衰係数、 a_0 は回転軸の半径、 E は板曲げ要素の縦弾性係数、 h は厚み、 ν はポアソン比、 $\bar{n}$ は板曲げ要素の総数を示しており、 $K_1 \sim K_4$ は Zeinkiewicz らにより報告されているマトリックス^{(15)～(17)}である。

他方、弾性板の境界条件は

$$\phi_i = 0, i = n+1, \dots, n+m \quad (25)$$

ここに、 m は固定端における節点の総数、 n はそれ以外の節点の総数である。式(25)を考慮すると、式(23)のラグランジュアンは、次式のように書き改めることができる。

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\phi}^T M \dot{\phi} - \phi^T K \phi - \dot{\phi}^T C \dot{\phi}) + T_0 \phi^T b \quad (26)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \phi^T M \dot{\phi} &= J_0 \dot{\theta}^2 + \sum_{e=1}^{\bar{n}} \phi_e^T M_e \dot{\phi}_e \\ \dot{\phi}^T C \dot{\phi} &= C_0 \dot{\theta}^2 \\ \phi^T K \phi &= \sum_{e=1}^{\bar{n}} \phi_e^T K_e \phi_e + K_0 \theta^2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \{\phi_1^T, \phi_2^T, \dots, \phi_n^T, \theta\}^T \\ b &= \{0, \dots, 0, 1\} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式(26)にハミルトンの原理

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (29)$$

を適用すると、図1の力学系の運動方程式は、次式のとおりとなる。

$$M \ddot{\phi} + C \dot{\phi} + K \phi = T_0 b \quad (30)$$

3. 周波数応答

図3～6は、式(30)を用いて周波数応答ならびに弾性板の振動形状についての数値計算を行った結果を示したものである。数値計算に用いた弾性板の諸元は、 $E=206$ GPa, $\rho=7700$ kg/m³, $L_x=400$ mm, $L_y=200$ mm, $h=1$ mm, $\nu=0.3$ のとおりであり、回転軸については、 $a=20$ mm, $J_0=5.81 \times 10^{-4}$ kg・m² の値を用いた。また、弾性板を剛体とみなした場合の慣性モーメントを J_p とすると、系の固有振動数 f_0 ならびに減衰係数 μ_0 は

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_0}{J_0 + J_p}}, \mu_0 = \frac{1}{2\sqrt{K_0(J_0 + J_p)}} \quad (31)$$

で与えられる。まず図3、4からは、回転軸に取付けられたねじりばねの剛性が小さい場合のほうが、高次振動数成分が大幅に小さくなっていることがわかる。なお、記号 θ_s は、回転軸に作用するトルク T_0 による静的回転角 ($\theta_s = T_0/K_0$) を示している。たとえば、回転

($K_0=13.7 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$, $C_0=0.147 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s/rad}$,
 $f_0=3 \text{ Hz}$, $\mu_0=0.1$, $\theta_s=1^\circ$)

($K_0=1.52 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m/rad}$, $C_0=4.85 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s/rad}$,
 $f_0=100 \text{ Hz}$, $\mu_0=0.1$, $\theta_s=0.1^\circ$)

図 3 回転軸に取付けられたねじりばねの剛性が比較的小さい場合の周波数応答

図 4 回転軸に取付けられたねじりばねの剛性が比較的大きい場合の周波数応答

軸に取付けられたねじりばねとダンパを、位置制御システムに基づく制御剛性ならびに制御減衰とみなすと、位置フィードバックのゲインを大きくすると、高振動数成分が大となり、系が発振し不安定となるスピンドルオーバー現象が生じやすくなることを示している。また、図4のねじり剛性の大きい場合の第一次共振点は約5.44 Hzであるが、この値は、一端固定の板

の第一次共振振動数5.41 Hz⁽¹⁸⁾にほぼ一致している。つぎに図5は、ねじりばねの剛性が小さくダンパの減衰係数を大とした場合の周波数応答を示したものであるが、低次共振におけるものほど、振幅の減衰量が大きいことがわかる。さらに図6は、図4の各共振点近傍における弾性板の振動形状を図形出力したものであるが、高次共振点近傍におけるものほど、より複雑な

($K_0=13.7 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad}$, $C_0=1.02 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$, $f_0=3 \text{ Hz}$, $\mu_0=0.7$, $\theta_s=1^\circ$)

図5 回転軸に取付けられたねじりばねの剛性が比較的小さく、ダンパの減衰力が比較的大きい場合の周波数応答

図6 図4の周波数応答の各共振点近傍の弾性板の振動形状

形状となっていることが示されている。

4. 結 言

本研究は、回転軸に取付けられた弾性板の有限要素モデリングの手法を提示するとともに、ねじりばねとダンパが回転軸に取付けられた場合の系の周波数応答の一端について調べたものである。得られた知見を要約すると、以下のとおりである。

(1) 回転運動と曲げ振動との相互作用を考慮した弾性回転板の要素質量マトリックスを、既報の長方形板曲げ要素に対する形状関数を用いて定式化するとともに、この結果を用いて系の運動方程式を導いた。

(2) 回転軸に取付けられたねじりばねの剛性が小さい場合、高次振動数成分は大幅に小さくなるが、ねじりばねの剛性を大きくすると、高次振動数成分が大きくなることが確かめられた。また、回転軸に取付けられたダンパは、低次共振に対しより大きな減衰効果を有する傾向が、見られた。

文 献

- (1) Sunada, W. H. and Dubowsky, D., *Trans. ASME, J.*

- Mech. Transm. Autom. Des.*, **106**-2(1984), 183.
 (2) Tompson, B. S. and Sung, C. K. *Trans. ASME, J. Mech. Transm. Autom. Des.*, **106**-2(1984), 183.
 (3) Usoro, P. B., ほか2名, *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Control*, **108**-3(1986), 198.
 (4) 小島・ほか3名, 計論, **23**-12(1987), 1283.
 (5) 小島・機論, **54**-499, C(1988), 529.
 (6) 小島・機論, **55**-513, C(1989), 1221.
 (7) Book, W. J., ほか2名, *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Control*, **97**-4(1975), 424.
 (8) 福田, 機論, **51**-468, C(1985), 2140.
 (9) 坂和・松野, 計測と制御, **25**-1(1986), 64.
 (10) Hastings, G. G. and Book, W. J., *IEEE Control Syst. Mag.*, **7**-1(1987), 61.
 (11) 福田・ほか3名, 機論, **53**-487, C(1987), 744.
 (12) 福田・ほか3名, 機論, **54**-499, C(1988), 630.
 (13) Dawe, D. J., *J. Mech. Eng. Sci.*, **7**-1(1965), 28.
 (14) Melosh, R. J., *J. A. I. A. A.*, **1**(1963), 1631.
 (15) Zeinkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **28**(1964), 471.
 (16) Zeinkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K. (吉織鑑訳), マトリックス有限要素法, (1972), 185, 培風館.
 (17) 谷口・ほか37名, 振動工学ハンドブック, (1976), 260, 養賢堂.
 (18) 文献(17)の102ページ.