モデル予測制御による空気圧力制御系の シミュレーションと実験*

石原 弘一^{*1}, 山本 透^{*1}, 真山 修二^{*2}

Simulation and Experimental Study on an Air Pressure Control System by Using a Model Prediction Control

Hirokazu ISHIHARA, Toru YAMAMOTO, and Syuji MAYAMA

In this paper, we deal with the process control system (SISO) and model prediction control (MPC) algorithm. The control results of MPC for a standard performance index do not behave as one expect. We study the MPC algorithm on a performance index with the control energy constraint. Furthermore, we propose an adaptive MPC algorithm with an estimation of the impulse response function by means of least squares. The steady state error is improved by the proposed method. The method is examined by simulation and experimental studies on the air pressure control plant.

Key Words: Model Prediction Control, Process Control, Steady State Error, Adaptive MPC, Input Smoothing

1. 緒 言

プラントの制御方法について、古くから PID 制御が利用され、近年になって、適応制御やファジー制御などのアルゴリズムが用いられるようになった。そのような状況の中で、モデル予測制御がそのアルゴリズムの容易さや、ロバスト性を有しているために、注目され、利用されるようになってきた^{(1)~(5)}。

本論文では、通常のモデル予測制御アルゴリズムに適応機能を付加し、すなわち、プラントのパラメータを未知と仮定し、最小二乗法によって、それらのパラメータを逐次オンラインで推定し、プラントのインパルス応答関数を推定して、モデル予測制御を実施するという方法を提案している。エネルギー消費を考慮した評価規範を用いているため、モデル予測制御による定常偏差のうえに評価規範による定常偏差が生じる。そのため、定常偏差の改善法および行列の非正則性による計算続行不能状態の回避のための対策や制御器の出力の振動問題についても解決できる方法を提案して

いる。

そのアルゴリズムの有効性をシミュレーションと学生実験用空気圧力プラントによる実験によって確認している。

2. モデル予測制御^{(4),(5)}

モデル予測制御とは、制御対象の動的モデルを用い出力の現在値より未来の出力の値を予測し、その予測値が目標値に近づくように入力を決定するという方法であるが、ここでは、その概要について簡単に述べる。

まず、考察する系は一入力一出力系と仮定し、プロセスのインパルス応答モデルを次式とする。

$$y_M(t+j) = \sum_{k=1}^s \hat{h}_k u(t+j-k) \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ただし、 $\hat{h}_k$ はモデルのインパルス応答列であり、 $y_M(t+j)$ は時刻 $t+j$ におけるその出力、 $u(t+j-k)$ は時刻 $t+j-k$ における制御器の出力をそれぞれ表す。また、 s は無限和を必要な精度に合せて打ち切った上限を表す。 L ステップ先の $t+L$ から P ステップ先までのプロセスの出力の予測値 $y_P(t+j)$ ($L \leq j \leq L+P-1$) を

$$y_P(t+j) = y(t) + \{y_M(t+j) - y_M(t)\} \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

とし、希望の目標値軌道 $y_R(t+j)$ ($L \leq j \leq L+P-1$)

* 平成元年3月10日 東海支部第38期総会講演会において講演、原稿受付 平成元年4月3日。

^{*1} 正員、高松工業高等専門学校 (〒761 高松市勅使町355)。

^{*2} 学生員、豊橋技術科学大学大学院 (〒440 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1)。

を

$$y_R(t+j) = \alpha^j y(t) + (1-\alpha^j)R \quad \dots\dots\dots (3)$$

で表す。ただし、 $y(t)$ は観測時刻におけるプロセス出力であり、 R は一定目標値であり、 $0 < \alpha < 1$ である。時間区間 $[t+L, t+L+P-1]$ において y_P が式(3)の y_R に近づくように現在時刻 t 以降より M ステップ先までの入力列 $u(t) \sim u(t+M-1)$ を決定する。すなわち、次の評価関数 J を最小にするように決定する。

$$J := \min_{u(t) \dots u(t+M-1)} \sum_{j=L}^{L+P-1} \{y_P(t+j) - y_R(t+j)\}^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。このとき、 J を最小にする $u(t) \dots u(t+M-1)$ を求めると

$$u_n = (H_M^T H_M)^{-1} H_M^T [Y_R - Y - H_0 u_0] \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。ただし

$$u_n := [u(t), u(t+1), \dots, u(t+M-1)]^T \quad \dots\dots\dots (6)$$

であり、 H_M, Y_R, Y_0, H_0, u_0 は文献(4)により得られる。このようにして得られたベクトル u_n の第1成分の $u(t)$ だけを実際のプラントに印加し、次の観測値を得て、 u_n を決定してゆくことを繰返し、プロセス出力 $y(t)$ を目標値 R に近づける方法がモデル予測制御である。

さらに、次のような、制御エネルギーの変動量を考慮に入れた評価規範 J_1 や制御エネルギーの消費量を考慮に入れた評価規範 J_2 に対するモデル予測制御を考えることができる。

$$J_1 := \min_{u_n} \{\|Y_P - Y_R\|^2 + \|u_n - u_{n-1}\|^2\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$J_2 := \min_{u_n} \{\|Y_P - Y_R\|^2 + \|u_n\|^2\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $\|x\|_\Lambda^2 := x^T \Lambda x$ であり、 $\Lambda = \text{diag}[\lambda^2]$ とし、 u_{n-1} は1段前の最適制御ベクトルとする。

ここで、 J_2 に対する u_n を求めてみよう。 J_2 は

$$J_2 = [Y + H_0 u_0 - Y_R + H_M u_n]^T [Y + H_0 u_0 - Y_R + H_M u_n] + u_n^T \Lambda u_n \quad \dots\dots\dots (9)$$

と表すことができる。式(9)を最小にする u_n は先と同様にして

$$u_n = (H_M^T H_M + \Lambda)^{-1} H_M^T [Y_R - Y - H_0 u_0] \quad \dots\dots\dots (10)$$

と求まる。同様に、 J_1 を最小にする u_n は

$$u_n = (H_M^T H_M + \Lambda)^{-1} \{H_M^T [Y_R - Y - H_0 u_0] + \Lambda u_{n-1}\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

と求まる。

式(5)より明らかなように u_n は $H_M^T H_M$ が正則行列でなければ求まらない。特に $M > P$ の場合 $H_M^T H_M$ は $M \times M$ 行列であり、 $\text{rank}(H_M^T H_M) \leq P < M$ であるから、正則行列ではない。また、 $P \geq M$ であっても、 $H_M^T H_M$ が正則行列でない場合もある。それに対して、

評価関数 J_1, J_2 に基づく最適制御ベクトルは式(10)、(11)より明らかなように $H_M^T H_M$ が正則でなくても Λ によって逆行列が存在し、 u_n を算出できることがわかる。

以下では u_n の算出の容易さと同時にエネルギー消費を考慮できるという観点から J_2 の評価関数に関する場合を考察する。式(10)の u_n に基づいて、モデル予測制御を実施した場合、評価関数の Λ の影響から、STCの場合と同様に定常偏差が生じ、 λ^2 を大きくとれば、その定常偏差も大きくなるという問題がある。また、 $\Lambda=0$ の場合には、逆行列の正則度が小さくなれば0割の状態に近くなり、制御器の出力波形が振動的になりやすく、制御量の追従性も悪くなる。したがって、 Λ を考慮してかつ定常偏差を除去できれば、制御器の出力が滑らかでしかも定常特性の良い制御器を設計できることになる。

3. 定常偏差について

モデル予測制御の定常偏差の除去については、すでに、目標値補正器およびオフセット補償器を用いた制御則が開発されている⁽⁵⁾。その場合、閉ループ内(コントローラの前)のオフセット補償器のゲインの大きさと目標値補正器によって定常偏差を除去している。それに対し、ここでは、定常誤差解析に基づいて制御器の出力を目標値にフィードバックすることによって、すなわち、目標値補正器のみによって、定常偏差が除去できることを示す。

まず、評価関数 J における定常偏差を求めてみよう。ベクトル c を $c := (1, 0, 0, \dots, 0)^T$ と定義し、文献(5)と同様にして、式(5)の両辺に左から c^T を掛けて次の関係を得る。

$$\begin{aligned} u(t) + \sum_{j=1}^S \delta_j u(t-j) \\ = \sum_{l=1}^P \nu_l [y_R(t+L+l-1) - y(t)] \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ただし、 δ_i, ν_i は次式のように定義した。

$$(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_S) := c^T (H_M H_M)^{-1} H_M^T H_0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_P) := c^T (H_M H_M)^{-1} H_M^T \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(13)、(12)より、 y_R を消去し、 Z 変換して

$$D_c(z) U(z) = \gamma [R(z) - Y(z)] \quad \dots\dots\dots (15)$$

を得る。ただし

$$D_c(z) := 1 + \delta_1 z^{-1} + \delta_2 z^{-2} + \dots + \delta_S z^{-S} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$N_c(z) := \nu_1 + \nu_2 z + \dots + \nu_P z^{P-1} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\gamma := N_c(1) - \alpha^L N_c(\alpha) \quad \dots\dots\dots (18)$$

である。ここで $\tilde{h}_k = h_k$ と仮定し、 $Y(z) = H(z) U(z)$ を用いて、式(15)より $U(z)$ を消去し

$$Y(z) = \frac{\gamma R(z)}{D_c(z)/H(z) + \gamma} \quad \dots\dots\dots (19)$$

を得る。したがって、ステップ状目標値に対する定常位置偏差は

$$e_\infty = \frac{D_c(1)R}{D_c(1) + \gamma H(1)} \quad \dots\dots\dots (20)$$

となり、 J を最小にする $u(t)$ は定常偏差を生じることがわかる。

この定常偏差は、目標値 $R(z)$ を見掛け上の目標値に修正することによって除去でき、定常偏差の生じない制御系を構成することができる⁽⁶⁾。すなわち、目標値を

$$R(z) \rightarrow R(z) + \frac{D_c(1)z^{-1}U(z)}{\gamma} \quad \dots\dots\dots (21)$$

と修正し、式(21)の右辺を式(15)の $R(z)$ に代入し、 $E(z)$ を求めると

$$E(z) = \frac{D_c(z)(1-z^{-1})R}{[\gamma H(z) + D_c(z)(1-z^{-1})](1-z^{-1})} \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、定常位置偏差は零となる。このように式(21)を用いて目標値だけを補正することにより定常位置偏差を除去できる。

次に、 J_2 に対する定常位置偏差について検討する。 J_2 に対する定常位置偏差は J に対する定常位置偏差の計算と同様な手順で求めることができる。すなわち、式(10)の両辺に左から c^T を掛けて

$$\begin{aligned} u(t) + \sum_{j=1}^s \xi_j u(t-j) \\ = \sum_{l=1}^p \eta_l [y_R(t+L+l-2) - y(t)] \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

を得る。ただし、 ξ_i, η_i は次式のように定義した。

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s) = c^T (H_M H_M + \Lambda)^{-1} H_M^T H_0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p) = c^T (H_M H_M + \Lambda)^{-1} H_M^T \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(3)、(23)より、 y_R を消去し、 Z 変換して

$$D_{c2}(z)U(z) = \gamma_2 [R(z) - Y(z)] \quad \dots\dots\dots (26)$$

を得る。ただし

$$D_{c2}(z) := 1 + \xi_1 z^{-1} + \xi_2 z^{-2} + \dots + \xi_s z^{-s} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$N_{c2}(z) := \eta_1 + \eta_2 z + \dots + \eta_p z^{p-1} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\gamma_2 := N_{c2}(1) - \alpha^L N_{c2}(\alpha) \quad \dots\dots\dots (29)$$

を得る。したがって、ステップ状目標値に対する定常位置偏差は先と同様に

$$e_\infty = \frac{D_{c2}(1)R}{D_{c2}(1) + \gamma_2 H(1)} \quad \dots\dots\dots (30)$$

となり、定常偏差が生じることがわかる。

ここで、目標値を

$$R(z) \rightarrow R(z) + \frac{D_{c2}(1)z^{-1}U(z)}{\gamma_2} \quad \dots\dots\dots (31)$$

と修正し、式(31)の右辺を式(26)の $R(z)$ に代入し、 $E(z)$ を求めると

$$E(z) = \frac{D_{c2}(z)(1-z^{-1})R}{[\gamma_2 H(z) + D_{c2}(z)(1-z^{-1})](1-z^{-1})} \quad \dots\dots\dots (32)$$

となり、定常位置偏差を零とすることができる。このようにして得られる制御則は、 J_2 を用いているため、エネルギー消費を考慮し、 L, P, M の選び方に柔軟に対応でき、しかも定常特性も良いという優れた性質を持っていることがわかる。

4. 適応モデル予測制御

プラントのパラメータが未知の場合、それらのパラメータを過去の $\{u_j | j=t-1, t-2, \dots\}$ と現在までの観測データ $\{y_j | j=t, t-1, \dots\}$ に基づいて最小二乗法によって推定し、推定されたパラメータを用いて u_n を決定し、逐次推定と制御を実施する方法が考えられる。

プラントのパラメータが推定できるとその推定されたパラメータに基づいて、系のインパルス応答系列を求めることができる。したがって、推定値に $\wedge$ 記号をつけて表すと式(5)に対して、制御則は

$$\hat{u}_n = (\hat{H}_M^T \hat{H}_M)^{-1} \hat{H}_M^T (Y_R - Y - \hat{H}_0 u_0) \quad \dots\dots\dots (33)$$

と求まる。また、 J_2 に対する修正目標値に関する推定制御則は、次のように求まる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_n = (\hat{H}_M^T \hat{H}_M + \Lambda)^{-1} \hat{H}_M^T \left[A \left\{ Y - \bar{R} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{D_{c2}(1)}{\gamma_2} U(t-1) \right\} - \hat{H}_0 u_0 \right] \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} A := \text{diag}[\alpha^{L+j-1} - 1] (P \times P \text{ 対角マトリックス}) \\ (j=1, \dots, P) \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

$$\bar{R} := [R, R, \dots, R]^T \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$U(t-1) := [u(t-1), u(t-1), \dots, u(t-1)] \quad \dots\dots\dots (37)$$

とそれぞれ定義した。

5. シミュレーションと実験

プラントの伝達関数を一次遅れ+むだ時間により近似し、 $G(s) = Ke^{-\tau s}/(s + \mu)$ と表すと、サンプルホールドをする離散時間系のパルス伝達関数 $H(z)$ は

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1}} \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる⁽⁷⁾。ただし

$$a_1 = e^{-\mu T} \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$b_1 = \frac{K}{\mu} \left(1 - e^{\mu(T_L + T_c)} e^{-\mu T} \right) \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$b_2 = \frac{K}{\mu} \left(1 - e^{\mu(T_L + T_c)} \right) e^{-\mu T} \quad \dots\dots\dots (41)$$

であり、 T はサンプリング時間、 T_c は計算時間をそれぞれ表し、無駄時間 τ は $\tau = n_L T + T_L$ とおき、ここでは $T_c < T - T_L, n_L = 0$ と仮定する。時刻 t における

インパルス応答の推定値を求めると

$$\hat{h}(t) = \hat{b}_1(t)[\hat{a}_1(t)]^{t-1} + \hat{b}_2(t)[\hat{a}_1(t)]^{t-2} \dots \dots (42)$$

となる。したがって、式(42)を用いて、 $\hat{H}_M, \hat{H}_0$ などを計算し、式(33)あるいは式(34)に代入すると適応モデル予測制御を実施することができる。

シミュレーションでは $T=6s$ とし、 $T_c=4s$, $T_L=1s$ と近似して、あらかじめパラメータ推定区間を設けてプラントのパラメータを推定しておいて、シミュレーションを開始した。シミュレーション開始後は、サンプリングごとに、パラメータをオンラインで計算し直し、制御器の出力 $u(t)$ を求めた。その制御結果を図1, 2に示す。 $a(t)$ が1を超えると系が不安定となるため、超えた場合は $a(t)=1$ と保持することにした。また、観測ノイズとして $-0.1 \sim 0.1$ の一様乱数を用いた。図1は、評価関数 J に対するシミュレーション結果であり、パラメータの設定値は図1中に示すとおりである。制御量と目標値の間に定常位置偏差が生じていて、制御器の出力は振動的であることがわかる。こ

の振動を滑らかにするために、 $J_2(\lambda^2=0)$ に対するシミュレーションを行ったところ、さらに定常偏差が生じた。そこで、式(34)のアルゴリズムにより、目標値を修正して定常偏差を除去したのが図2である。図2では、定常偏差もなく、制御器の出力の高周波振動成分も少し除去され、良好な結果が得られていて、アルゴリズムの有効性がシミュレーションにより検証できた。た

図3 実験装置の概略

図1 従来の MPC によるシミュレーション結果

図4 従来の MPC による実験結果

図2 提案した手法によるシミュレーション結果

図5 提案した手法による実験結果

だし、実際のシミュレーションの場合初期パラメータの推定不良や、目標値の修正の影響により、系の速応性が悪くなったため、図2では $R-y(t) > 2$ ならば $u(t)=10$ として、シミュレーションを行った。

図3に、実験装置の概略を示す。水の入った圧力容器の、上部空気室の圧力を制御する簡単な学生実験用圧力制御系である。図4に評価関数 J に対する実験結果を示す。図4では、図1のように $u(t)$ に高周波振動は発生しなかったが定常偏差が生じていることがわかる。さらに、後半の目標値を下げたあたりでは制御弁の非線形特性の影響が現れた。この定常偏差を除去するために、提案したアルゴリズムを用いて実験した結果を図5に示す。図5から定常偏差を除去できていることがわかる。しかし、 $u(t)$ に低周波成分が含まれるため、速応性が悪くなっている。これは図5中のパラメータの選び方に問題があると思われる。

6. 結 言

モデル予測制御に適応機能をもたせ、エネルギー消費を考慮にいれて定常位置偏差の生じないアルゴリズム

を提案した。このアルゴリズムでは、制御器の出力を目標値にフィードバックし、定常誤差解析によりそのフィードバックゲインを決定している。

また、一般に、適応機能をもった制御アルゴリズムは制御器の出力波形が振動的になりやすいが評価規範に含まれる重み係数の選び方によってその高周波成分を除去できる方法を提案した。

シミュレーション実験と学生実験用圧力プラントについての実験によりアルゴリズムの有効性を検証した。

文 献

- (1) Richalet, J., Rault, A. and Testud, J. L., *Papon, J. Automatica*, 14(1976), 413-428.
- (2) Mehra, R. K., Rouhani, R. and Praly, L., *Joint Automatic Control Conference Proceedings*, FA 9-B(1980), San Francisco, CA.
- (3) Rouhani, R. and Mehra, R. K., *Automatica*, 18(1982), 401-414.
- (4) 大嶋・大野・橋本・高松, 化学工学, 52-1(1988), 62-65.
- (5) 西谷, システムと制御, 30-1(1986), 16-25.
- (6) 山本・大松・石原, システムと制御, 32-3(1988), 207-208.
- (7) 市川, 計測と制御, 23-11(1984), 959-967.