半径方向集中荷重がある円板の振動*

小 寺 忠*¹

Vibration Analysis of a Rotating Disc under a Static in-Plane Load

Tadashi KOTERA

In the present paper, vibrations in a rotating clamped-free disc under a static in-plane load and with constraint on the outer periphery are analyzed. A solution for the equation of motion is described by the series of orthogonal eigenfunctions of a nonrotating disc with the same boundary conditions. By the use of the orthogonality of the eigenfunctions a characteristic equation is obtained. The relations between the natural frequencies and an angular velocity are shown. Also, these between regions of instability of the free vibrations and the magnitude of the static load are shown.

Key Words: Theory of Vibration, Vibration of Rotating Disc, Natural Frequency, In-plane Load, Elastic Support, Centrifugal Force

1. 緒 言

最近、フロッピーディスクや鉄道車輪のような回転円板の振動を取扱った研究が多く発表され、その不安定挙動も解析されるようになってきている。フロッピーディスクは中央部固定・周辺自由・ある一点で質量ばね系で支持（単純支持、ばね支持であっても解析は同様）、というようにモデル化され、鉄道車輪の場合は周辺の一点で単純支持というようにモデル化される^{(1)~(3)}。

しかし鉄道車輪の場合、車輪とレールの間の半径方向荷重が存在するが、この荷重が車輪の固有振動数に及ぼす影響を扱った文献はまだないようである。ただし文献(4)では、このような半径方向荷重が固有振動数に及ぼす影響を丸のこについて解析しているが、非回転時を Hamilton の原理を用いて解析しているだけである。また、文献(6)は、文献(4)に示された応力分布を用いて拡張レイリー・リッツ法およびラグランジュ未定定数法によって固有振動モードを求めているが、やはり非回転の場合しか考慮に入れられていない。

い。また文献(5)は、文献(4)の結果を用いて二つ回転角速度について荷重と最小固有振動数の関係を、5環状要素による近似で求めているが、やはり回転時の解析は十分とは言えない。

そこで本報では、半径方向集中荷重が作用する中央固定・周辺自由の回転円板の固有振動数および不安定領域を求める。ただし支持条件としては、単純支持、ばね支持、質量ばね系による支持あるいは周辺自由のいずれであってもよい。

2. 記号と運動方程式

本報で取扱う系の模型図を図1に示す。またおもな記号は次のとおりである。

a : 円板の外半径

b : 円板の内半径（固定部半径）

r, ϕ : 空間に固定された極座標

ω : 円板の回転角速度

t : 時間

P : $\phi=0$ に作用する半径方向集中荷重

E, ν, ρ : 円板材料のヤング率, ポアソン比, 密度

h : 円板の厚さ

k : ばね定数

u : 円板の面外振動の変位

* 平成元年10月28日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 平成元年1月13日。

*¹ 正員、福井大学工学部（〒910 福井市文京3-9-1）。

$$c^4 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}$$

$$\varepsilon = \frac{a^2}{\rho c^4} \frac{P}{\pi ah}$$

$$\kappa = \frac{\pi \left(\frac{h}{a}\right)^2}{6} \frac{Eh}{k(1-\nu^2)}$$

$$\Omega = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \omega$$

$$\tau = \left(\frac{c}{a}\right)^2 t$$

$$\bar{r} = r/a$$

$\sigma_r, \sigma_\phi, \tau_{r\phi}$: P による応力⁽⁴⁾ (付録 1)

S_r, S_ϕ : 遠心力による応力 (付録 2)

回転時の運動方程式は

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 + c^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)^2 \right\} u \\ & - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} \left(S_r r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho r^2} S_\phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \\ & - \frac{1}{\rho} \left\{ \sigma_r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \sigma_\phi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) \right. \\ & \left. + 2\tau_{r\phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \phi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right\} = 0 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

となり、無次元化すれば

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)^2 \right\} u \\ & - \Omega^2 \left\{ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{S}_r \bar{r} \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \bar{S}_\phi \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right\} \\ & + \varepsilon \left\{ \bar{\sigma}_r \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{r}^2} + \bar{\sigma}_\phi \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) \right. \\ & \left. + 2\bar{\tau}_{r\phi} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{r} \partial \phi} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right\} = 0 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

となる、ただし P による応力の分布は非回転の場合と変わらないと仮定している。この方程式の一般解を直接的に式で表現することはできないので、同じ境界条件をもつ非回転無荷重円板の固有関数系 (直交系) で解 u を級数展開してみる。いま、点 $\bar{r}=1, \phi=0$ で支持されているとし、そのときの固有関数を

$$U_i = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\phi Z_{ni}(\lambda_i \bar{r}), \quad i=1, 2, \dots \dots\dots (3)$$

$$V_{ni} = \sin n\phi W_{ni}(\lambda_{ni} \bar{r}), \quad n, i=1, 2, \dots \dots\dots (4)$$

図 1 回転円板の模型図

とおいてみる。 λ_i, λ_{ni} は固有値である。ただし、支点が無い場合には、 U_i の代わりに

$$U_{ni} = \cos n\phi W_{ni}(\lambda_{ni} \bar{r}), \quad n=0, 1, 2, \dots; \\ i=1, 2, \dots \dots\dots (3)'$$

を用いる。(付録 3)

3. 振動数方程式

さて、支点がある場合の式(2)の一般解を

$$u = \cos Q\tau \sum_{i=1}^{\infty} c_i U_i + \sin Q\tau \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{ni} V_{ni} \dots\dots\dots (5)$$

と仮定する。ただし t 領域の求める固有振動数を q とおけば、 $Q=(a/c)^2 q$ である。この解(5)を式(2)に代入し、 $\cos Q\tau$ と $\sin Q\tau$ の係数をそれぞれ零とおくことにより

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} c_i \left[(\lambda_i^4 - Q^2) U_i + \Omega^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial \phi^2} \right. \\ & + \varepsilon \left\{ \bar{\sigma}_r \frac{\partial^2 U_i}{\partial \bar{r}^2} + \bar{\sigma}_\phi \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial U_i}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \phi^2} \right) \right. \\ & \left. + 2\bar{\tau}_{r\phi} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \bar{r} \partial \phi} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial U_i}{\partial \phi} \right) \right\} \\ & \left. - \Omega^2 \left\{ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{S}_r \bar{r} \frac{\partial U_i}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \bar{S}_\phi \frac{\partial^2 U_i}{\partial \phi^2} \right\} \right] \\ & - 2\Omega Q \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{ni} \frac{\partial V_{ni}}{\partial \phi} = 0 \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & 2\Omega Q \sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{\partial U_i}{\partial \phi} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{ni} \left[(\lambda_{ni}^4 - Q^2) V_{ni} + \Omega^2 \frac{\partial^2 V_{ni}}{\partial \phi^2} \right. \\ & + \varepsilon \left\{ \bar{\sigma}_r \frac{\partial^2 V_{ni}}{\partial \bar{r}^2} + \bar{\sigma}_\phi \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial V_{ni}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 V_{ni}}{\partial \phi^2} \right) \right. \\ & \left. + 2\bar{\tau}_{r\phi} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 V_{ni}}{\partial \bar{r} \partial \phi} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial V_{ni}}{\partial \phi} \right) \right\} \\ & \left. - \Omega^2 \left\{ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{S}_r \bar{r} \frac{\partial V_{ni}}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \bar{S}_\phi \frac{\partial^2 V_{ni}}{\partial \phi^2} \right\} \right] = 0 \\ & \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

が得られる。式(6)には $\bar{r} U_i$ を、式(7)には $\bar{r} V_{ni}$ をそれぞれかけて、 $\phi=0 \sim 2\pi, \bar{r}=a \sim 1$ で積分すれば、固有関数の直交性によって次式を得る。

$$\begin{aligned} & A_j(\lambda_j^4 - Q^2) c_j \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \{ \varepsilon D_{ji} - \Omega^2 (C_{ji} + G_{ji}) \} \\ & - 2\Omega Q \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{ni} B_{ji}^n = 0 \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_j^m(\lambda_{mj}^4 - Q^2 - m^2 \Omega^2) d_{mj} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{ni} \varepsilon E_{ji}^{mn} - \Omega^2 \sum_{i=1}^{\infty} d_{mi} F_{ji}^m \\ & - 2\Omega Q \sum_{i=1}^{\infty} c_i B_{ij}^m = 0 \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに

$$A_j = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \int_a^1 \bar{r} Z_{mj}^2 d\bar{r} \quad (\beta_0 = 2\pi, \beta_m = \pi; m \geq 1)$$

$$A_j^m = \pi \int_a^1 \bar{r} W_{mj}^2 d\bar{r}$$

$$B_{ji}^n = n\pi \int_a^1 \bar{r} Z_{nj} W_{mi} d\bar{r}$$

$$C_{ji} = \pi \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \int_a^1 \bar{r} Z_{mj} Z_{mi} d\bar{r}$$

$$D_{ji} = \int_0^{2\pi} \int_a^1 \bar{r} U_j \left\{ \bar{\sigma}_r \frac{\partial^2 U_i}{\partial \bar{r}^2} + \bar{\sigma}_\phi \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial U_i}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \phi^2} \right) + 2 \bar{\tau}_{r\phi} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \bar{r} \partial \phi} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial U_i}{\partial \phi} \right) \right\} d\bar{r} d\phi$$

$$E_{ji}^{mn} = \int_0^{2\pi} \int_a^1 \bar{r} V_{mj} \left\{ \bar{\sigma}_r \frac{\partial^2 V_{ni}}{\partial \bar{r}^2} + \bar{\sigma}_\phi \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial V_{ni}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 V_{ni}}{\partial \phi^2} \right) + 2 \bar{\tau}_{r\phi} \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 V_{ni}}{\partial \bar{r} \partial \phi} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial V_{ni}}{\partial \phi} \right) \right\} d\bar{r} d\phi$$

$$F_{ji}^m = \pi \int_a^1 \bar{r} W_{mj} \left\{ \left(\frac{C_{i0}}{\bar{r}} - \frac{C_{20}}{\bar{r}^3} + 3C_{30} \bar{r} \right) \frac{dW_{mi}}{d\bar{r}} + \left(C_{i0} + \frac{C_{20}}{\bar{r}^2} + C_{30} \bar{r}^2 \right) \frac{d^2 W_{mi}}{d\bar{r}^2} \right.$$

$$\left. - m^2 \left(\frac{C_{i0}}{\bar{r}^2} - \frac{C_{20}}{\bar{r}^4} + C_{40} \right) W_{mi} \right\} d\bar{r}$$

$$G_{ji} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \int_a^1 \bar{r} Z_{mj} \left\{ \left(\frac{C_{i0}}{\bar{r}} - \frac{C_{20}}{\bar{r}^3} + 3C_{30} \bar{r} \right) \right.$$

(a) $\kappa=0$ (b) $\kappa=1$ (c) $\kappa=\infty$ 図 2 Q と ε の関係 ($\Omega=0$) (a) $\kappa=0$ (b) $\kappa=1$ (c) $\kappa=\infty$ 図 3 Q - Ω 曲線 ($\varepsilon=10$)

$$\times \frac{dZ_{mi}}{d\bar{r}} + \left(c_{i0} + \frac{c_{20}}{\bar{r}^2} + c_{30}\bar{r}^2 \right) \frac{d^2 Z_{mi}}{d\bar{r}^2} - m^2 \left(\frac{c_{i0}}{\bar{r}^2} - \frac{c_{20}}{\bar{r}^4} + c_{40} \right) Z_{mi} \Big\} d\bar{r}$$

もし、支点がない円板ならば、式(8)、(9)の代わりに

$$A_j^m(\lambda_{mj}^4 - Q^2 - m^2\Omega^2)c_{mj} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_{ni} B_{ji}^{mn} - \Omega^2 \sum_{i=1}^{\infty} c_{mi} F_{ji}^m - 2\Omega Q m A_j^m d_{mj} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)'$$

$$A_j^m(\lambda_{mj}^4 - Q^2 - m^2\Omega^2)d_{mj} + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} d_{ni} E_{ji}^{mn} - \Omega^2 \sum_{i=1}^{\infty} d_{mi} F_{ji}^m - 2\Omega Q m A_j^m c_{mj} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)'$$

が得られる。ただし、

$$B_{ji}^{mn} = \int_0^{2\pi} \int_a^1 \bar{r} U_{mj} \left\{ \bar{\sigma}_r \frac{\partial^2 U_{ni}}{\partial \bar{r}^2} + \bar{\sigma}_\phi \times \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial U_{ni}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 U_{ni}}{\partial \phi^2} \right) + 2 \bar{\tau}_{r\phi} \times \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial^2 U_{ni}}{\partial \bar{r} \partial \phi} - \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial U_{ni}}{\partial \phi} \right) \right\} d\bar{r} d\phi$$

こうして連立方程式(8)、(9)あるいは(8)'、(9)'が非自明解をもつための必要十分条件によって、無限次元の行列式の形の振動数方程式が導かれる。これを解くことによって無次元固有振動数 Q と無次元回転角速度 Ω の関係が求められる。もし実根 Q のいくつかが消えるような Ω の領域があれば、それは不安定領域である。

4. 数値計算例

振動数方程式を解くにあたって独立に与えることのできるパラメータは、荷重の大きさを表す ε 、支持の剛性を表す χ 、半径比 α そしてポアソン比 ν の4個である。ここでは $\alpha=1/3$ 、 $\nu=0.3$ とし、 χ は0(単純支持)、1および ∞ (自由)の3種類とする。それぞれについて ε と不安定領域の関係を求める。ただし $\chi=0, 1$ の場合は U_i は $i=1\sim 6$ で、 V_{ni} は $n=1\sim 5$ 、 $i=1$ で近似し、 $\chi=\infty$ の場合は U_{ni} は $n=0\sim 5$ 、 $i=1$ で、 V_{ni} は $n=1\sim 5$ 、 $i=1$ で近似している。

まず図2は、非回転時の Q と ε の関係を示しており、 ε が大きくなれば第1モードが消えること、つまり座屈することがわかる。図2(c)の実線は $\cos n\phi$ 形の場合、破線は $\sin n\phi$ 形の場合である。

図3は、 $\varepsilon=10$ の場合の Q - Ω 線図を示しており、曲線が垂直接線をもつ Ω が不安定領域の境界になる。このような曲線を種々の ε について描くことにより、不安定領域図を得ることができる。図4(a)は $\chi=0$ 、図4(b)は $\chi=1$ 、図4(c)は $\chi=\infty$ の場合である。た

だし、図3に示した変数の範囲での曲線より求まる不安定領域だけを示しており、すべての不安定領域を示しているわけではない。図4(a)の場合、不安定領域の個数は少ないが、図4(b)、(c)の場合は、かなり多い。 $\chi=\infty$ の場合、不安定領域は $\varepsilon=0$ のときの曲線 Q - Ω の交点で発生し、 ε の増加とともにその幅は拡大しており、 $\chi=1$ の場合は、不安定領域ごとに発生する ε の値は異なっている。

(a) $\chi=0$

(b) $\chi=1$

(c) $\chi=\infty$

図4 不安定領域図

5. 結 言

半径方向集中荷重が作用する中央部固定・周辺自由 (ただし一点で支持) の円板の回転時の固有振動数を計算し, 不安定領域を求めた。それらを整理すると,

(1) 運動方程式の解を, 荷重がないときの同じ境界条件の非回転円板の固有関数系で級数展開すれば, 固有関数の直交性によって級数に関する連立方程式が得られ, それより振動数方程式が無限次元の行列式の形で得られる。

(2) 振動数方程式の解 Q と Ω の曲線を描くことにより, 不安定領域が存在することがわかる。

(3) ε が大きくなれば, 不安定領域は広がる。

(4) 単純支持 ($x=0$) の場合は, 不安定領域の数は少ないが, x が大きくなるにつれて, 不安定領域の数が増す。

〔付 録〕

(1)

$$\sigma_r = -P/(\pi ah) \cdot \bar{\sigma}_r$$

$$\sigma_\phi = -P/(\pi ah) \cdot \bar{\sigma}_\phi$$

$$\tau_{r\phi} = -P/(\pi ah) \cdot \bar{\tau}_{r\phi}$$

$$\bar{\sigma}_r = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k^1 \bar{r}^{k-2} + a_k^2 \bar{r}^k + a_k^3 \bar{r}^{-k-2} + a_k^4 \bar{r}^{-k}] \cos k\theta$$

$$\bar{\sigma}_\phi = \sum_{k=0}^{\infty} [b_k^1 \bar{r}^{k-2} + b_k^2 \bar{r}^k + b_k^3 \bar{r}^{-k-2} + b_k^4 \bar{r}^{-k}] \cos k\theta$$

$$\bar{\tau}_{r\phi} = \sum_{k=0}^{\infty} [c_k^1 \bar{r}^{k-2} + c_k^2 \bar{r}^k + c_k^3 \bar{r}^{-k-2} + c_k^4 \bar{r}^{-k}] \sin k\theta$$

(2)

$$S_r = \rho \omega^2 a^2 \bar{S}_r$$

$$S_\phi = \rho \omega^2 a^2 \bar{S}_\phi$$

$$\bar{S}_r = c_{i0} + c_{20}/\bar{r}^2 + c_{30} \bar{r}^2$$

$$\bar{S}_\phi = c_{i0} - c_{20}/\bar{r}^2 + c_{40} \bar{r}^2$$

$$c_{i0} = \frac{1+\nu}{8} \frac{3+\nu+(1-\nu)\alpha^4}{1+\nu+(1-\nu)\alpha^2}$$

$$c_{20} = \frac{1-\nu}{8} a^2 \frac{3+\nu-(1-\nu)\alpha^2}{1+\nu+(1-\nu)\alpha^2}$$

$$c_{30} = -\frac{3+\nu}{8}$$

$$c_{40} = -\frac{1+3\nu}{8}$$

(3) 固有関数 U_i, V_{ni} の定義

非回転・無荷重の円板の運動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^4 \nabla^4 u = 0$$

の固有振動の解を

$$u = U(r, \phi) \cos pt$$

とおき,

$$U(r, \phi) = \begin{cases} \cos n\phi \cdot Z_n(z) : \cos \text{モード} \\ \sin n\phi \cdot W_n(z) : \sin \text{モード} \end{cases}$$

$$z = r\sqrt{p}/c$$

とおくと, 境界条件から, $\cos$ モードに関しては n によらない固有値

$$\lambda_i = a\sqrt{p_i}/c$$

が決まり, $\sin$ モードに関しては各 n ごとに

$$\lambda_{ni} = a\sqrt{p_{ni}}/c$$

が決まる。そして, それぞれに対応する

$$Z_n(\lambda_i \bar{r}), W_{ni}(\lambda_{ni} \bar{r})$$

が定義される。境界条件から $\cos n\phi \cdot Z_n(\lambda_i \bar{r})$ は単独では固有関数にはならず,

$$U_i = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\phi \cdot Z_n(\lambda_i \bar{r})$$

が固有関数になり,

$$V_{ni} = \sin n\phi \cdot W_{ni}(\lambda_{ni} \bar{r})$$

は単独で固有関数になる。

文 献

- (1) 本田・ほか2名, 機論, 54-507, C (1988), 2610.
- (2) 江・長南, 機論, 54-507, C (1988), 2669.
- (3) 小寺, 機論, 55-516, C (1989), 1927.
- (4) Carlini, J. F., ほか3名, J. Eng. Ind., 97 (1975), 37.
- (5) Srinivasan, V. and Ramamurti, V., Comput. Struct., 12 (1980), 119.
- (6) Ferguson, N. S. and White, R. G., J. Sound Vib., 121-3 (1988), 497.