変形伝達影響係数法による可変パラメータ系の 自由振動解析* (変断面ばりに対する定式化)

近 藤 孝 広^{*1}, 末 岡 淳 男^{*2}
文 徳 弘^{*3}, 綾 部 隆^{*2}

Free Vibration Analysis of Systems with Variable Parameters by the Modified Transfer Influence Coefficient Method (Formulation for a Beam with Variable Cross-Sectional Area)

Takahiro KONDOU, Atsuo SUEOKA, Deok Hong MOON, and Takashi AYABE

The concept of the transfer influence coefficient method is extended and modified so that it is applied to the free vibration analysis of systems with variable parameters. In the present modified transfer influence coefficient method, four dynamic coefficient matrices are introduced to analyse the free vibration of a beam with a variable cross-sectional area. Since the solution of every differential equation for the dynamic coefficient matrices has poles in the domain of integration, the numerical integration of the field transfer rule is executed by selecting an adequate differential equation from among them, whose solution is not a pole at every integration point. The results of the simple computational examples on a personal computer demonstrate the validity of the present algorithm; that is, the high numerical accuracy and the high speed of the present method, as compared with the transfer matrix method.

Key Words: Vibration, Free Vibration, Natural Frequency, Vibration of Continuous System, System with Variable Parameters

1. 緒 言

著者らは、既報^{(1)~(6)}において、伝達影響係数法を新たに提案し、種々の基本的な構造物にその概念を適用して、自由振動解析アルゴリズムの定式化を行った。また、従来からよく利用されている伝達マトリックス法⁽⁷⁾との比較を通して、計算精度および計算速度の両面における本手法の優位性を実証してきた。

伝達影響係数法は、解析対象とする構造物をいくつかの基本要素に分割し、各分割点(節点)における動的影響係数マトリックスを逐次伝達計算するという概念に基礎を置いている。ただし、これまでに提案したアルゴリズムでは、各節点間(格間)の伝達計算の過程において、基本要素に対する運動方程式の一般解を必要としており、その適用範囲は、これが解析的に求められる構造物に限定されていた。

ところで、実際の構造物では、形状が連続的に変化する部分を含む場合のように、基本要素の運動方程式が変係数を有する微分方程式で表されることが多い。

このような系を本報では可変パラメータ系と呼ぶ。可変パラメータ系では、特別な場合を除いてその一般解を解析的に求めることは困難である⁽⁹⁾。伝達マトリックス法では、基本要素両端間の格間伝達マトリックスを数値的に求めることにより、このような系の解析を行っている⁽¹⁰⁾。すなわち、運動方程式を1階の連立常微分方程式に変換して、基本要素ごとに両端間の遷移マトリックスを数値的に計算すれば、これが求めるべき格間伝達マトリックスに一致する。

本報では、可変パラメータ系に伝達影響係数法の概念を拡張・変形して適用し、格間伝達マトリックスからの変換法⁽²⁾⁽⁵⁾を用いることなく、高速かつ高精度に自由振動解析を実行するアルゴリズムを、変断面ばりを例にとりて定式化する。本報で提案する手法を変形伝達影響係数法と呼ぶ。はり要素に対しては、動的影響係数マトリックスのほかに、新たに3種類の動的係数マトリックスが導入される。また、格間伝達則の計算は、状態量に関する運動方程式を4種類の動的係数に関する連立常微分方程式に変換し、これらの中のいずれかを基本要素の左端から右端にかけて数値積分することに帰着される。ただし、4種類の微分方程式の解には、後述のようにいずれも積分区間内に極が存在するので、1種類の微分方程式のみを対象とする限り

* 平成元年11月10日 機械力学講演会において講演、原稿受付 平成元年4月24日。

^{*1} 正員、福岡工業大学(〒811-02 福岡市東区和白東3-30-1)。

^{*2} 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

^{*3} 正員、九州大学大学院。

数値積分は実行不能となる。本報では、4種類の中から解が極とはならない微分方程式を、各積分点ごとに1種類ずつ選択しながら数値積分を実行するという方法で、この問題を克服している。

なお、変形伝達影響係数法の基本概念は、連立線形常微分方程式の二点境界値問題を高精度に解析する数値解法として開発されたりカッチ変換法⁽¹¹⁾やフィールド法⁽¹²⁾⁽¹³⁾と、形式的にはよく類似している。ただし、これらの適用対象は、積分区間中に上述のような極が存在しない静的問題に限定されているようである。しかし、これら三者の基本概念の類似性に注目するならば、変形伝達影響係数法は、リカッチ変換法およびフィールド法を動的問題にも適用可能となるように拡張した手法であるとみなすこともできる。

2. 変形伝達影響係数法

本報では、長手方向に断面積の変化する軸対称ばりに伝達影響係数法の概念を拡張・変形して適用し、面内曲げ自由振動の解析アルゴリズムを定式化する。ただし、その基本概念自体は可変パラメータ系全般に対してほとんどそのまま適用できる。解析にあたり、以下の仮定を置く。

(1) はりは、オイラばりとして取扱う。

(2) はりは、力ベクトル、断面積およびその変化率が不連続になるすべての点で n 個のはり要素に分割されており、各分割点を系の左端から右端にかけて節点0～節点 n と呼ぶ。節点 $j-1$ と節点 j 間の j 番めはり要素の長さは l_j である。

(3) はりの内部全域で変位ベクトルは連続である。

(4) 各節点 j には、質量 m_j 、慣性モーメント J_j の集中円板が剛に取付けられており、集中円板はさらに、せん断ばね定数 k_j および回転ばね定数 K_j のばね系で基礎に支持されている。

なお、本報で使用する記号に付された下添字 j は、節点 j または j 番めはり要素の物理量であることを示す。また、同じ記号で頭号「-」および「~」付きのものは、各々節点の左側および右側(隣接するはり要素の右端および左端)の物理量を表し、頭号のないものは、はり要素内部の物理量を意味する。

2.1 はり要素の面内曲げ自由振動の基礎式

図1に示すように、各 j 番めはり要素に節点 $j-1$ を始点とする局所座標 x_j を導入する。また、横変位 y_j 、角変位 θ_j 、せん断力 F_j およびモーメント N_j の正方向を図1のように定義すれば、はり要素の面内曲げ自由振動の基礎式は、次式のように表される⁽⁸⁾。

$$\frac{d}{dx_j} \begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix}_j \quad \cdots \cdots (1 \cdot a)$$

あるいは、

$$\frac{d}{dx_j} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 0_2 & B_{12} \\ B_{21} & 0_2 \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}_j \quad \cdots \cdots (1 \cdot b)$$

ここに、 0_2 は 2×2 零マトリックスであり、

$$\begin{aligned} d_j &= {}^t(y, \theta)_j, \quad f_j = {}^t(F, N)_j \\ g_j &= {}^t(y, N)_j, \quad h_j = {}^t(-F, \theta)_j \end{aligned} \quad \cdots \cdots (2)$$

また、はりがオイラばりの場合は、

$$\begin{aligned} (A_{11})_j &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A_{12})_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_j \end{bmatrix} \\ (A_{21})_j &= \begin{bmatrix} -a_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A_{22})_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ (B_{21})_j &= \begin{bmatrix} a_j & 0 \\ 0 & e_j \end{bmatrix}, \quad (B_{12})_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ a_j &= (\rho A)_j \omega^2, \quad e_j = 1/(EI)_j \end{aligned} \quad \cdots \cdots (3)$$

となる。ただし、 $(\rho A)_j$ は線密度、 $(EI)_j$ は曲げ剛性であり、いずれも x_j の関数である。また、 ω は求めるべき固有円振動数、「 t 」は転置を表す。

2.2 動的係数マトリックス j 番めはり要素内の任意の点 x_j における d_j と f_j および g_j と h_j の関係を、次のように定義する。

$$\begin{aligned} d_j &= T_j^1 f_j, \quad f_j = T_j^2 d_j, \quad T_j^1 = (T_j^2)^{-1} \\ g_j &= T_j^3 h_j, \quad h_j = T_j^4 g_j, \quad T_j^3 = (T_j^4)^{-1} \\ T_j^i &= {}^t T_j^i = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}_j, \quad (i=1, \cdots, 4) \end{aligned} \quad \cdots \cdots (4)$$

ここに、 $T_j^1 \sim T_j^4$ を、各々第1種～第4種の動的係数マトリックスと呼ぶ。なかでも T_j^1 は、これまで伝達影響係数法で一般に用いられてきた動的影響係数マトリックスに相当する。また、 T_j^2 は動的剛性係数マトリックス、 T_j^3 および T_j^4 は動的混合係数マトリックスを意味する。本報のはり要素の場合、この4種類の動的係数マトリックスを考慮すれば十分である。これらはいずれも 2×2 対称マトリックスであり、 x_j の関数となる。このことを明示する場合には、 $T_j^i(x_j)$ と表す。この記法は、 x_j の関数である他のすべての変数についても

図1 はり要素と集中円板

同様である。

互いに逆の関係である T_1^j と T_2^j 間、および T_3^j と T_4^j 間を除く各種動的係数の間の関係は、次式で与えられる。ただし、上添字の複号は両辺で同順である。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_j^{1,3} &= \begin{bmatrix} -D/\beta \\ 1/\beta \\ \gamma/\beta \end{bmatrix}_j^{3,1}, \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_j^{2,4} = \begin{bmatrix} -D/\beta \\ 1/\beta \\ -\gamma/\beta \end{bmatrix}_j^{4,2} \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_j^{1,3} &= \begin{bmatrix} -1/\alpha \\ D/\alpha \\ -\gamma/\alpha \end{bmatrix}_j^{4,2}, \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_j^{2,4} = \begin{bmatrix} -1/\alpha \\ D/\alpha \\ \gamma/\alpha \end{bmatrix}_j^{3,1} \\ D_j^i &= \det T_j^i = (\alpha\beta - \gamma^2)_j^i, \quad (i=1, \dots, 4) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

また、各 D_j^i 間の関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} D_j^1 &= 1/D_j^2 = -(\alpha/\beta)_j^3 = -(\beta/\alpha)_j^4 \\ D_j^3 &= 1/D_j^4 = -(\alpha/\beta)_j^1 = -(\beta/\alpha)_j^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

なお、節点 j の左側および右側、すなわち、 j 番めはり要素の右端および $j+1$ 番めはり要素の左端では、式(4)、(5)および(6)のすべての記号に、各々頭号「-」および「~」を付した関係が成立し、

$$\bar{T}_j^i = T_j^i(l_j), \quad \tilde{T}_j^i = T_{j+1}^i(0) \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。式(7)と同様の関係は、 x_j の関数であるすべての変数についても成立する。

2・3 格間伝達則 式(4)を式(1)に代入して、状態変数に関する微分方程式を動的係数マトリックスに関する微分方程式に変換すると、次のような4種類の常微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} dT_1^j/dx_j &= (A_{11}T_1^j + A_{12} - T_1^jA_{21}T_1^j - T_1^jA_{22})_j \\ dT_2^j/dx_j &= (A_{22}T_2^j + A_{21} - T_2^jA_{12}T_2^j - T_2^jA_{11})_j \\ dT_3^j/dx_j &= (B_{12} - T_3^jB_{21}T_3^j)_j \\ dT_4^j/dx_j &= (B_{21} - T_4^jB_{12}T_4^j)_j \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

式(8)を要素を用いて表すと、次の形式に整理できる。

$$\begin{aligned} d\delta_j^i/dx_j &= F_j^i(x_j, \delta_j^i) = F_j^i \\ \delta_j^i &= (\alpha, \beta, \gamma)_j^i \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} F_j^1 &= (2\gamma + \alpha\alpha^2, e + \alpha\gamma^2, \beta + \alpha\alpha\gamma)_j^1 \\ F_j^2 &= -(a + e\gamma^2, 2\gamma + e\beta^2, \alpha + e\beta\gamma)_j^2 \\ F_j^3 &= -(a\alpha^2 + e\gamma^2, \alpha\gamma^2 + e\beta^2, \alpha\alpha\gamma + e\beta\gamma - 1)_j^3 \\ F_j^4 &= -(2\alpha\gamma - a, 2\beta\gamma - e, \alpha\beta + \gamma^2)_j^4 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

いま、節点 $j-1$ 右側における動的係数マトリックス $\tilde{T}_{j-1}^i$ が既知として、 $T_j^i(0) = \tilde{T}_{j-1}^i$ を初期値とする式(8)あるいは式(9)の解を求めれば、 $T_j^i(l_j)$ が節点 j 左側の動的係数マトリックス $\bar{T}_j^i$ となる。本報の問題のように、式(8)および式(9)を解析的に解くことが

困難な場合には、 $x_j=0$ から l_j までの計算には数値積分を利用する。実際には式(9)を数値積分するのが効率的であり、この計算が可変パラメータ系における格間伝達則になる。そこで以下では、式(9)の各式を各々第1種～第4種の格間伝達式と呼ぶ。ただし、3章で詳しく検討するように、4種類の格間伝達式の解 δ_j^i には、いずれも積分区間 $(0, l_j)$ 内に極が存在するので、これを避けるためには、格間伝達式を適切に選択しつつ数値積分を実行する必要がある。

このように、変形伝達影響係数法における格間伝達則の計算は、三元連立常微分方程式(9)の中から一つの方程式を各積分点ごとに逐次選択しつつ、はり要素の全区間にわたって1回数値積分することに帰着される。一方、伝達マトリックス法における格間伝達則の計算では、上述のような極は存在しないものの、遷移マトリックスを得るためには、四次元連立常微分方程式(1)を同一区間にわたって4回数値積分する必要がある⁽¹⁰⁾。したがって、変形伝達影響係数法のほうが計算速度の点でかなり有利であることが予想される。

2・4 格点伝達則 節点 j の左右両側間における格点伝達則の計算には、既報⁽¹⁾と同様、動的影響係数(第1種の動的係数)を用いるのが合理的である。まず、節点 j 両側間の力の釣合いは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{f}_j &= \tilde{f}_j - P_j \bar{d}_j, \quad \bar{d}_j = \bar{d}_j \\ P_j &= \text{diag}(S_j, M_j) \quad \dots\dots\dots (11) \\ S_j &= k_j - m_j \omega^2, \quad M_j = K_j - J_j \omega^2 \end{aligned}$$

動的影響係数を用いた格点伝達則は、式(4)の第1式に頭号「-」を付した式と式(11)から求められ、

$$\bar{G}_j^i \bar{T}_j^i = \tilde{T}_j^i, \quad \bar{G}_j^i = I_2 + \bar{T}_j^i P_j \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。ここに、 I_2 は 2×2 単位マトリックスである。式(12)を要素表示すると、次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix}_j^i = \begin{bmatrix} (\bar{\alpha} + \bar{D}M)/\bar{G} \\ (\bar{\beta} + \bar{D}S)/\bar{G} \\ \bar{\gamma}/\bar{G} \end{bmatrix}_j^i \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$\bar{G}_j^i = \det \bar{G}_j^i = (M\bar{D}S + \bar{\alpha}S + \bar{\beta}M + 1)_j^i \quad \dots\dots\dots (14)$$

格点伝達則の計算に式(13)を利用すれば、中間に柔らかいばね支持から、半固定を含む極めて硬いばね支持が存在する場合まで、高精度で伝達計算が実行される⁽¹⁾。節点 j に集中円板もばね支持も存在しない場合には、いうまでもなく式(13)の計算は省略できる。

2・5 振動数方程式 振動数方程式は、系の右端の境界条件から求められる。ここでは、以下に示す二つの場合で大別して導出する。ただし、両者ともに節点 n の右側は自由とみなせるので⁽²⁾、 $\tilde{f}_n = 0$ とおく。

(1) $P_n = 0_2$ の場合 ($\bar{d}_n \neq 0 \wedge \tilde{f}_n = 0$)：これは、節

点 n が集中円板もばね支持も存在しない自由端である場合に相当する。このとき、式(4)の第2式において $j=n$ とおき、すべての記号に頭号「-」を付した式に $\bar{d}_n \neq 0 \wedge \bar{f}_n = 0$ の条件を適用すれば、振動数方程式として次式を得る。

$$\det \bar{T}_n^2 = \bar{D}_n^2 = 0 \quad \cdots \cdots (15)$$

(2) $P_n \neq 0_2$ の場合 ($\bar{f}_n \neq 0$): このときまず、節点 n 両側間の力の釣合いから、

$$\bar{f}_n = -P_n \bar{d}_n \quad \cdots \cdots (16)$$

を得る。さらに、式(4)の第1式で $j=n$ とおき、すべての記号に頭号「-」を付した式と式(16)から、

$$(I_2 + P_n \bar{T}_n^1) \bar{f}_n = \bar{G}_n^1 \bar{f}_n = 0 \quad \cdots \cdots (17)$$

を得る。したがって、今の場合 $\bar{f}_n \neq 0$ であるから、振動方程式は次式のようになる。

$$\det \bar{G}_n^1 = \det \bar{G}_n^1 = \bar{G}_n^1 = 0 \quad \cdots \cdots (18)$$

この特別な場合として、系の右端が固定端の場合には、 $\bar{d}_n = 0 \wedge \bar{f}_n \neq 0$ であるから、上と同様の操作を施した式(4)の第1式から、振動方程式は、

$$\det \bar{T}_n^1 = \bar{D}_n^1 = 0 \quad \cdots \cdots (19)$$

となる。これは、式(18)において、 $k_n \rightarrow \infty$ $K_n \rightarrow \infty$ とした結果と等価である。また、これと同様にして、ピン支持端およびロール端の場合には、振動数方程式は各々次式のようになる。

$$\det \bar{T}_n^3 = \bar{D}_n^3 = 0 \rightarrow \bar{a}_n^1 = 0 \text{ (ピン支持端)} \quad \cdots \cdots (20)$$

$$\det \bar{T}_n^4 = \bar{D}_n^4 = 0 \rightarrow \bar{\beta}_n^1 = 0 \text{ (ロール端)} \quad \cdots \cdots (21)$$

これらは式(18)において、各々 $k_n \rightarrow \infty$ $K_n \rightarrow 0$ および $k_n \rightarrow 0$ $K_n \rightarrow \infty$ とした結果と等価である。

このように、式(18)においてばね定数の値を適切に調整することにより、上記(1)以外の境界条件を統一的に取扱得る。ただし、実際の数値計算におけるばね定数無限大の取扱いは、既報¹⁾と同様である。

2・6 振動数方程式の偽の根の解消法 前節(2)の場合 ($P_n \neq 0_2$) の振動数方程式(18)を与える関数 $\bar{G}_n^1$ は、式(14)から次のように変形される。

$$\bar{G}_n^1 = (MS + \bar{\beta}S + \bar{a}M)_n^1 / \bar{D}_n^1 + 1 \quad \cdots \cdots (22)$$

すなわち、 $\bar{G}_n^1$ は $\bar{D}_n^1$ の零点で極となる。それゆえ、振動数方程式の解法として、振動解析の分野でよく利用される二分法を $\bar{G}_n^1$ に直接適用するとすれば、その零点(固有振動数)だけでなく、極をも解(偽の根)として求めてしまうことがある。このような偽の根を解消するためには、既報¹⁾と同様の概念に基づいて、 $\bar{D}_n^1$ の零点でのみ符号の変化する関数を $\bar{G}_n^1$ に乗じてやればよい。この操作により得られる関数を $\bar{H}_n^1$ とすれば、 $\bar{H}_n^1$ は次式で与えられる(付録参照)。

$$\bar{H}_n^1 = (-1)^r \text{sgn}(S_0 M_0) \prod_{j=1}^n \text{sgn}(\bar{G}_j^1) \quad \cdots \cdots (23)$$

ここに、 $\text{sgn}(0)=1$ と定義する。また r は、はり要素の内部に存在する D_j^1 の零点の総数であり、格間伝達式の計算過程で容易に求められる。すなわち、式(6)を考慮すれば、第1種以外の格間伝達式を数値積分に利用する領域において、第2種では D_j^2 の、第3種では β_j^3 の、第4種では a_j^4 の、各々符号変化の回数をカウントすればよい。この $\bar{H}_n^1$ に二分法を適用すれば、 $\bar{G}_n^1$ の真の根(固有振動数)のみが求められる。

一方、 $P_n = 0_2$ の場合には、明らかに $\bar{G}_n^1 = 1$ であるから、 $\bar{H}_n^1$ の零点は $\bar{D}_n^1$ の零点 ($P_n = 0_2$ の場合の固有振動数)に一致する。

すなわち、 $\bar{H}_n^1$ に二分法を適用すれば、偽の根の解消法とすべての境界条件の一本化が同時に組入れられたことになる。

3. 格間伝達式の選択

前章で述べたように、格間伝達則の計算過程では、格間伝達式を適切に選択しつつ数値積分を実行する必要がある。本章では、その理由について考察し、格間伝達式の合理的な選択の一方法を提案する。また、これに関連して、系の左端の取扱いについても検討する。

3・1 格間伝達式選択の必要性 まず、 p 番めはり要素内 ($1 \leq p \leq n$) の任意の点 P ($x_p = X_p$) を右端とし、系の左端から点 P までは、全系と同一な構造物を想定する。このような仮想的構造物において、点 P が仮に集中円板もばね支持も存在しない自由端であるとすれば、式(15)から、その固有振動数では点 P において $D_p^1(X_p) = 0$ となる。これと同様に、点 P が仮に固定端、ピン支持端およびロール端であるとすれば、それらの固有振動数では点 P において各々 $D_p^1(X_p) = 0$ 、 $D_p^3(X_p) = 0$ および $D_p^4(X_p) = 0$ となる。このことは逆に、任意の振動数に対して、 $D_q^1 = 0$ となるような q 番めはり要素内 ($1 \leq q \leq n$) の点 Q が各々存在し得るということを意味する。したがって、仮に点 Q で $D_q^1 = 0$ ($D_q^2 = 0$, $D_q^3 = 0$, $D_q^4 = 0$; 以下同順) であるとすれば、 $\delta_q^2(\delta_q^1, \delta_q^3, \delta_q^4)$ の各要素は点 Q で極となり、その近傍では、 $\delta_q^2(\delta_q^1, \delta_q^3, \delta_q^4)$ による数値積分は実行不能になる。このとき、極となる動的係数以外の係数は、点 Q で一般に通常点であるから、数値積分が可能である。ただし、 δ_q^1 と δ_q^2 の組および δ_q^3 と δ_q^4 の組において、極同士が各々極めて接近したり、特別な場合には一致することも起こり得る。それゆえ、種々の条件に対して数値積分を問題なく実行するには、上述の各組間だけでなく、4種題の中から最も適切な格間伝達式を選択する必要がある。

3・2 格間伝達式の方法 格間伝達式の数値

積分が不可能となる δ_j^i の各要素が極となる点の近傍では、 δ_j^i の各要素の積分軸方向への変化率は急激に増加する。逆に、変化率が小さいときには、その近傍に極は存在しないと考える。それゆえ、以下では、数値積分で計算される各点において、上の意味での変化率の最も小さい格間伝達式を逐次選択するという方法を利用する。この方法は、数値積分の安定化と高精度化という観点からも好ましい。

はり要素内部の任意の点における δ_j^i の各要素の変化率は、その点における $F_j^i(x_j, \delta_j^i)$ の δ_j^i に関するヤコビアンマトリックス $J_j^i(x_j, \delta_j^i) \equiv \partial F_j^i(x_j, \delta_j^i) / \partial \delta_j^i$ の固有値によって評価できる。すなわち、この固有値の最大絶対値が小さい格間伝達式ほど、一般に δ_j^i の変化率も小さいといえる。 J_j^i を要素表示すると、いずれも次の形式に整理できる。

$$J_j^i = \begin{bmatrix} 2P & 0 & 2W \\ 0 & 2Q & 2V \\ V & W & P+Q \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

$$\begin{aligned} (P, Q, V, W)_1^i &= (aa, 0, a\gamma, 1)_1^i \\ (P, Q, V, W)_2^i &= -(0, e\beta, 1, e\gamma)_2^i \\ (P, Q, V, W)_3^i &= -(aa, e\beta, a\gamma, e\gamma)_3^i \\ (P, Q, V, W)_4^i &= -(\gamma, \gamma, \beta, a)_4^i \end{aligned} \dots\dots\dots (25)$$

それゆえ、 J_j^i の固有値の最大絶対値を λ_j^i とすれば、 λ_j^i は式(24)から次のように陽に求められる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_j^i &= |P_j^i + Q_j^i| + (R_j^i)^{1/2} : R_j^i \geq 0 \\ \lambda_j^i &= 2|P_j^i Q_j^i - V_j^i W_j^i|^{1/2} : R_j^i < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここに、

$$R_j^i = (P_j^i - Q_j^i)^2 + 4 V_j^i W_j^i \dots\dots\dots (27)$$

すなわち、各積分点ごとに式(5)および(25)～(27)から λ_j^i を計算し、それが最小となる格間伝達式を逐次選択して、次のステップの数値積分を行えばよい。

3.3 系の左端の取扱い 系の左端がばね支持端のとき、節点0右側の動的係数マトリックスの要素は、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_0^1 &= \delta_1^1(0) = (1/S, 1/M, 0)_0 \\ \delta_0^2 &= \delta_1^2(0) = (S, M, 0)_0 \\ \delta_0^3 &= \delta_1^3(0) = (-1/S, M, 0)_0 \\ \delta_0^4 &= \delta_1^4(0) = (-S, 1/M, 0)_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

それゆえ、 $S_0 \neq 0$ 、 $M_0 \neq 0$ ならば、前節と同様に、式(25)～(28)から節点0右側における $\tilde{\lambda}_0^i = \lambda_1^i(0)$ を計算し、それが最小となる格間伝達式を利用して、1番めはり要素内の数値積分を開始すればよい。また、 $S_0 = 0$ 、 $M_0 = 0$ ならば、式(28)から、明らかに第2種の格間伝達式を利用すべきである。問題は、 S_0 と M_0 のい

れか一方のみが零である場合の取扱いである。

まず、 $S_0 \neq 0$ 、 $M_0 = 0$ の場合には、第2種と第3種の格間伝達式のいずれかを利用すべきかが問題となる。このとき、節点0右側では $\tilde{\lambda}_0^2 = 0$ 、 $\tilde{\lambda}_0^3 = 2|\tilde{a}_0/S_0|$ であるから、上の規準だと常に第2種の格間伝達式を選択すべきであるが、 $S_0 \rightarrow \infty$ (ピン支持端)のとき明らかに問題が生じる。一方、 $S_0 = 0$ 、 $M_0 \neq 0$ の場合にも、第2種と第4種の格間伝達式の選択に関して、系の左端において $\tilde{\lambda}_0^2 = 2|\tilde{e}_0 M_0|$ 、 $\tilde{\lambda}_0^4 = 0$ であるから、 $M_0 \rightarrow 0$ (自由端)のとき上と全く同様の問題が起こる。それゆえここでは、1番めはり要素内の $x_1 = h$ (h : 数値積分の刻み幅)の点における λ_1^i の一次近似値 $\hat{\lambda}_1^i(h)$ を推定し、その大小によって格間伝達式を選択する。これは、系の左端において、 $x_1 = h$ の点と同一種類の格間伝達式を利用することを意味する。

(1) $S_0 \neq 0 \wedge M_0 = 0$ の場合：式(10)、(24)～(28)から、 $\hat{\lambda}_1^2(h)$ 、 $\hat{\lambda}_1^3(h)$ は次のように推定される。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\lambda}_1^2(h) &= 2|\tilde{e}_0 S_0 h|^{1/2} \\ \hat{\lambda}_1^3(h) &= 2|(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_0' h + \tilde{a}_0'' h^2/S_0)/S_0| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 $\tilde{a}_0'$ は系の左端における a_1 の右側微係数である。それゆえ、 $\hat{\lambda}_1^2(h) \leq \hat{\lambda}_1^3(h)$ であれば第2種の格間伝達式を、そうでなければ第3種の格間伝達式を利用すればよい。

(2) $S_0 = 0 \wedge M_0 \neq 0$ の場合：上記(1)の場合と同様に、 $\hat{\lambda}_1^2(h)$ 、 $\hat{\lambda}_1^4(h)$ は次のように推定される。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\lambda}_1^2(h) &= 2|(\tilde{e}_0 + \tilde{e}_0' h - \tilde{e}_0'' h M_0) M_0| \\ \hat{\lambda}_1^4(h) &= 2|\tilde{a}_0' h/M_0|^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

ここに、 $\tilde{e}_0'$ は系の左端における e_1 の右側微係数である。それゆえ、 $\hat{\lambda}_1^2(h) \leq \hat{\lambda}_1^4(h)$ であれば第2種の格間伝達式を、そうでなければ第4種の格間伝達式を利用すればよい。

4. 固有モード

変形伝達影響係数法における固有モードの計算は、固有振動数が求められた時点で、系の右端から系の左端にかけて実行される。この計算には、数値計算のノウハウ的なものも含めていく通りかの方法が考えられるが、以下では、計算精度と必要な記憶容量等の観点から、最も適切と思われるものを示すことにする。

4.1 系の右端の状態量 計算の初期値である系の右端(節点 n)左側の状態量は、境界条件に対応して、次のように与えられる。

(1) $P_n = 0_2$ の場合： $\bar{F}_n = 0$ は明らかである。また、固有振動数が求められた時点では式(15)が成立しているので、式(4)の第2式において $j = n$ とおき、すべ

ての記号に頭号「-」を付した式から $\bar{d}_n (\neq 0)$ が求められる。

(2) $P_n \neq 0_2$ の場合：固有振動数が求められた時点では式(18)が成立しているの、式(17)から $\bar{f}_n (\neq 0)$ が求められる。さらに、上と同様の操作を施した式(4)の第1式から $\bar{d}_n$ が計算される。

4.2 はり要素内部の状態量の計算 各はり要素内部の状態量の計算には、式(9)および式(1)～(4)から求められる以下の諸式を利用する。

$$df_j/dx_j = (A_{21}T^1 + A_{22})_j f_j \quad (31)$$

$$dd_j/dx_j = (A_{12}T^2 + A_{11})_j d_j \quad (32)$$

$$dh_j/dx_j = (B_{21}T^3)_j h_j \quad (33)$$

$$dg_j/dx_j = (B_{12}T^4)_j g_j \quad (34)$$

すなわち、第1種の格間伝達式と式(31)、第2種の格間伝達式と式(32)、第3種の格間伝達式と式(33)および第4種の格間伝達式と式(34)を連立させた各々五元の微分方程式を、格間伝達則の計算過程と同様の方法で適切に選択しながら、節点 j 左側の状態量を初期値として $x_j = l_j$ から $x_j = 0$ (節点 $j-1$ 右側)まで数値積分すれば、 j 番めはり要素内の状態量が求められる。たとえば、第1種の格間伝達式と式(31)の連立式を利用すれば f_j と T_j^1 が計算され、式(4)の第1式から d_j が求められる。固有モードの数値積分過程は、格間伝達則のそれと逆方向であるが、数値積分の刻み幅が同一であれば、微分方程式の切替えを行うべき積分点は両者とも同一でよい。それゆえ、固有振動数の計算過程で利用した格間伝達式の情報を各積分点ごとに記憶しておけば、固有モードの計算過程において、3.2節で述べた格間伝達式を選択を行うための計算が省略できる。また、固有振動数の計算過程において、各節点の左側ではその節点の計算に利用した動的係数マトリックスを、右側では第1種の動的係数マトリックスを各々記憶しておくといふ。前者は、固有モードの計算過程の初期値としてそのまま利用できる。後者については次節で述べる。

4.3 節点における状態量の計算 $j+1$ 番めはり要素に前節の方法を適用して、節点 j 右側 ($x_{j+1} = 0$) の状態量が求められているとする。このとき、節点 j 左側 ($x_j = l_j$) の状態量は式(11)から計算できる。

一般には上の方法で十分高精度である。しかし、たとえば $k_j \rightarrow \infty$ とした中間半固定のような場合に、この計算が精度良く実行されるためには、 $\bar{g}_j \rightarrow 0$ でなければならないが、数値積分過程における種々の誤差の影響で、式(11)中に現われる $S_j \bar{g}_j$ の精度が極めて低下することがある。 $K_j \rightarrow \infty$ の場合にも、 $M_j \bar{\theta}_j$ に関して同様の問題が起こり得る。

このような精度低下を回避するには、前節の方法により求められた $\bar{f}_j$ と固有振動数の計算過程で記憶しておいた $\bar{T}_j^1$ から $\bar{d}_j = \bar{d}_j = \bar{T}_j^1 \bar{f}_j$ を再度計算し、これを用いて式(11)の計算を実行すればよい。

5. 数値計算結果と考察

本報で提案した変形伝達影響係数法(MTICM)の計算精度や計算速度を、緒言に示した方法を利用した伝達マトリックス法(TMM)と比較しつつ基本的な例題により検討する。ここでは、鋼製で長さ 450 mm、直径 10 mm の中実一様ばり (Model 1)、および鋼製で長さ 450 mm、両端直径 10 mm、50 mm の円すいばり (Model 2) の面内曲げ自由振動を取扱い、固有振動数や固有モードを計算した。使用した計算機は NEC PC 9801 RA 2 (数値演算プロセッサ搭載)、言語は FORTRAN 77 である。また、振動数方程式の求解法および数値積分には、MTICM、TMM とともに、二分法および Runge-Kutta-Gill(RKG)法を利用し、倍精度計算を行った。二分法における収束判定値は、固有振動数の相対誤差で 10^{-9} 以下とした。

5.1 格間伝達式を選択について 3章で示した格間伝達式を選択方法の有効性を検証するための具体例として、Model 1 において節点 0 および 1 の両端固定 ($k_j = 10^{20}$ N/m, $K_j = 10^{20}$ N·m/rad; $j=0, 1$)、振動数を 500 Hz としたときの格間伝達式を選択の様相を $D_i (i=1 \sim 4)$ と x_1 の関係により図 2 に示す。ただし、縦軸のスケールは、各 D_i ごとに異なっている。図中の実線および点線の領域は、各々実際に数値積分によって計算された結果、およびそれをもとに式(6)から計算された値を表す。図 2 から、4 種類の格間伝達式の

図 2 格間伝達式を選択の様相

解にはいずれも積分区間内に極が存在しているが、それを適切に回避しつつ、はり要素内において①～⑦と積分計算が逐次実行されていることがわかる。しかも、変動の比較的なだらかな格間伝達式が選択されているので、数値積分の精度向上に寄与するものと考えられる。この傾向は、種々の境界条件および中間条件に対して Model 1, Model 2 ともに同様であることを確認している。

5・2 計算精度 Model 1 において、両端および右端から 1/3 スパンの節点と同じせん断ばね定数 $k(\text{N/m})$ のばねで支持されている場合(回転ばね定数はすべて零)について、既報⁽²⁾で伝達影響係数法(TICM)により詳細な検討を行っている。ここではそれとの比較により MTICM の計算精度を検証する(例題 1)。表 1 に $k=10^7 \text{ N/m}$ のときの 20 次までの固有振動数の結果を示す。二分法の初期値と初期刻み幅は、いずれも 10 Hz とした。表中の TICM 欄の数値は既報⁽²⁾と同様の結果であり、この例題に対する正解である。MTICM 欄および TMM 欄の数値は、RKG 法の分割数を左スパン 300, 右スパン 150 として格間伝達式の計算を行ったときの結果である。また、「*」印は RKG 法の分割数を増やすことによって有効けた数内で正解が得られることを示しており、その個数は分割数の倍率を表す。TMM 欄の「-」印は、既報⁽¹⁾⁽²⁾で述べた数値的不安定現象が発生して、分割数を増やしても正解が求められないことを示す。表 1 から、MTICM および TMM の計算精度に関して、次のことがわかる。

(1) MTICM は、RKG 法の分割数が少なくても高次の固有振動数まで十分高精度であるが、高次になるにつれて精度が若干悪化する。これは、振動数が高くなるほど、こう配ベクトル F_j' の要素の絶対値が一般に増大することや、積分区間中に存在する極の数が多くなることなどが原因であると考えられるが、RKG 法の分割数を増やすことにより精度を確実に改善することができる。このことから、MTICM の計算精度は、主として数値積分法の計算精度に支配されることがわかる。

(2) TMM は、低次の固有振動数に関しては十分高精度であるが、高次になるにつれて精度が悪化し、ついには数値的不安定現象が発生して解が全く求められなくなる。ばね定数が大きくなるにつれて、同様の現象が発生する振動数は低下する。また、RKG 法の分割数の増大により精度が改善されるのはわずかな領域であり、支持条件が同じならば、数値的不安定現象が発生する振動数は、RKG 法の分割数によらずほぼ

定である。大形計算機における 4 倍精度計算では、TMM でも 20 次まで正解を求めることができた。このことから、TMM の計算精度は、単に数値積分法の計算精度だけでなく、伝達マトリックスの連乗過程で生じるけた落ちや丸め誤差、あるいは遷移マトリックス計算における両端間の相関関係の低下などの影響をも受けること、および数値的不安定現象についてはとくに後者が支配的であることがわかる。

表 2 に、Model 2 の両端のみがせん断ばね定数 $k=10^7 \text{ N/m}$ のばねで支持されている場合(回転ばね定数は零; 例題 2)に得られた 15 次までの固有振動数を示す。RKG 法の基本分割数は 450 であり、表中の数値や記号の意味は表 1 と同様である。ただし、大形計算機で 4 倍精度計算を行い、RKG 法の分割数の増大に関して飽和し、かつ MTICM と TMM の結果が一致した数値を本例題の正解とみなして Quadruple 欄に示している。表 2 から、例題 1 と全く同様の傾向がみて

表 1 例題 1 の固有振動数 ($k=10^7 \text{ N/m}$)

No.	TICM ⁽²⁾	MTICM	TMM
1	281.26019	281.26019	281.26019
2	875.61075	875.61075	875.61075
3	1072.9772	1072.9772	1072.9772
4	1906.3577	1906.3577	1906.3577
5	2705.7979	2705.7979	2705.7979
6	3254.0596	3254.0598 (**)	3254.0598 (**)
7	4409.8745	4409.8747 (**)	4409.8748 (**)
8	5347.0623	5347.0627 (**)	5347.0628 (**)
9	6489.3621	6489.3627 (**)	-
10	7956.0590	7956.0603 (**)	-
11	9492.3651	9492.3675 (**)	-
12	11381.742	11381.746 (**)	-
13	13520.106	13520.114 (**)	-
14	15784.745	15784.759 (**)	-
15	18339.547	18339.569 (***)	-
16	21104.917	21104.950 (****)	-
17	24018.826	24018.877 (****)	-
18	27187.761	27187.837 (****)	-
19	30558.548	30558.657 (****)	-
20	34092.184	34092.334 (****)	-

表 2 例題 2 の固有振動数 ($k=10^7 \text{ N/m}$)

No.	Quadruple	MTICM	TMM
1	198.40715	198.40715	198.40715
2	540.84025	540.84025	540.84025
3	1277.5604	1277.5604	1277.5604
4	2529.9464	2529.9464	2529.9464
5	4114.2506	4114.2506	4114.2506
6	6061.2394	6061.2396 (**)	6061.2396 (**)
7	8508.4264	8508.4268 (**)	8508.4269 (**)
8	11518.840	11518.841 (**)	11518.841 (**)
9	15087.484	15087.487 (**)	-
10	19200.124	19200.130 (**)	-
11	23847.247	23847.263 (**)	-
12	29023.347	29023.369 (**)	-
13	34725.224	34725.266 (****)	-
14	40950.951	40951.011 (****)	-
15	47699.318	47699.418 (****)	-

表 3 計算時間の比較(分:秒)

Example	MTICM	TMM	Note
1	5:26	12:35	5 Roots
2	7:24	17:08	5 Roots

とれる。

なお、結果は省略するが、固有モードも問題なく計算できることを確認している。

以上のように、MTICM は計算精度の点で TMM よりも信頼性の高い手法であるといえる。

5・3 計算時間 表 1 および表 2 から、RKG 法の全分割数が 450 のとき MTICM, TMM とともに五次まで正解が求められるので、この条件下で両例題(Example 1, 2)の一次から五次までの固有振動数と固有モードをいっせいに計算するのに要した時間(分:秒)を表 3 に示す。二分法の初期値および初期刻み幅はいずれも 10 Hz である。表 3 から、一様ばり、円すいばりともに MTICM は TMM の約 2.3 倍の計算速度を有していることがわかる。このように MTICM は計算時間の点でも非常に優れた手法であるといえよう。

6. 結 言

伝達影響係数法の概念を可変パラメータ系の基本である変断面ばりに拡張・変形して適用し、変形伝達影響係数法による自由振動解析アルゴリズムを定式化した。また、パーソナルコンピュータ上で簡単な例題により伝達マトリックス法との比較を行い、計算精度と計算時間の両面における変形伝達影響係数法の優位性を確認した。本報の手法の基本概念は、可変パラメータ系全般に対してほとんどそのまま適用できる。

なお、構造物の一部分が可変パラメータ系である場合や、それとは逆に一部分が可変パラメータ系でない場合には、既報⁽²⁾のアルゴリズムと本報のアルゴリズムを組合せることによって、より効率的に実際の系に即した振動解析を行うことができる。

付 録 振動数方程式の補遺

すべての節点に集中円板またはばね支持が存在するものとする。2 章の議論から、節点 0 を左端とし、節点 $j(\geq 2)$ の左側、 j 番めはり要素内の任意の点 $J(x_j =$

$X_j)$ および節点 $j-1$ の右側を右端とする仮想的な構造物の固有振動数は、各々 $\bar{D}_j^2$, $D_j^2(X_j)$ および $\bar{G}_{j-1}^2$ の零点として与えられる。とくに $D_j^2(X_j)$ の零点に注目すれば、点 J が節点 j 左側に位置するときには $\bar{D}_j^2 = D_j^2(l_j)$ であるから両者の零点は一致し、点 J が j 番め要素内を節点 $j-1$ 側に移動するにつれて $D_j^2(X_j)$ のすべての零点、すなわち仮想構造物のすべての固有振動数は単調に増大する。また、式(6), (13)から $\bar{D}_{j-1}^2 = \bar{G}_{j-1}^2 / \bar{D}_j^2$ となるので、点 J が節点 $j-1$ の右側に位置するときには $D_j^2(0) = \bar{D}_{j-1}^2$ と $\bar{G}_{j-1}^2$ の零点は一致する。したがって、円振動数が零から任意の値 $\bar{\omega}$ までの間に存在する $\bar{D}_j^2$ の零点の個数は、円振動数が零から $\bar{\omega}$ までの間に存在する $\bar{G}_{j-1}^2$ の零点の個数と $\bar{\omega}$ のときに j 番めはり要素の内部に存在する D_j^2 の零点の個数の和に等しい。 $j=1$ の場合には、 $\bar{D}_0^2 = S_0 M_0$ であるから、 $\bar{G}_{j-1}^2$ の零点の個数を $S_0 M_0$ の零点の個数で置き換えればよい。また、 $j \geq 1$ のとき、2・6 節と同様に D_j^2 の零点で $\bar{G}_j^2$ は極となる。

以上の議論を踏まえて既報⁽¹⁾と同様の概念を適用すれば、偽の根を解消した振動数方程式は式(23)で与えられる。集中円板もばね支持も存在しない節点を含む場合には、これらが存在する節点間に上述の議論を拡大して適用すればよい。これらが存在しない節点 p では $\bar{G}_p^2 = 1$ が恒等的に成立するので、結果は式(23)と一致する。

文 献

- (1) 末岡・ほか 4 名, 機論, 52-484, C(1986), 3090.
- (2) 末岡・ほか 4 名, 文献(1)の 3034 ページ.
- (3) 末岡・ほか 4 名, 機論, 54-504, C(1988), 1724.
- (4) 末岡・ほか 4 名, 文献(3)の 1732 ページ.
- (5) 近藤・ほか 4 名, 機論, 55-516, C(1989), 1948.
- (6) 末岡・ほか 4 名, 機論, 文献(5)の 1957 ページ.
- (7) Pestel, E. C. and Leckie, F. A., *Matrix Method in Elastomechanics*, (1963), 1, McGraw-Hill.
- (8) 文献(7)の 137 ページ.
- (9) Timoshenko, S. P., ほか 2 名, *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed., (1974), 464, John Wiley & Sons.
- (10) 例えば, 山田・ほか 3 名, 機論, 54-497, C(1988), 22.
- (11) Rybicki, G. B. and Usher, P. D., *Astrophysical J.*, 146-3(1966), 871.
- (12) Jordan, P. F. and Shelley, P. E., *AIAA J.*, 4-5(1966), 923.
- (13) Miller, R. E., *AIAA J.*, 5-4(1967), 811.