非線形ばね特性をもつ回転軸系の危険速度通過時の振動*

(第 3 報, 和差調波振動の共振点)

石 田 幸 男^{*1}, 池 田 隆^{*1}
山 本 敏 男^{*2}, 村 上 新^{*3}Nonstationary Vibration of a Rotating Shaft with Nonlinear Spring
Characteristics during Acceleration through a Critical Speed
(3rd Report, Critical Speed of a Summed-and-Differential Harmonic Oscillation)Yukio ISHIDA, Takashi IKEDA,
Toshio YAMAMOTO, and Shin MURAKAMI

Nonstationary vibrations of a flexible rotating shaft with nonlinear spring characteristics during acceleration through a critical speed of a summed-and-differential harmonic oscillation were investigated. In numerical simulations, we investigated the influences of the angular acceleration λ , the initial angular position of the unbalance ψ_0 , and the initial rotating speed ω_s on the maximum amplitude. We performed experiments with various angular accelerations. The following results were obtained: (1) The maximum amplitude depends not only on λ but also on ψ_0 and ω_s . (2) When the initial angular position ψ_0 changes, the maximum amplitude varies between two values. The maximum and the minimum values of the maximum amplitude do not change monotonously for the angular acceleration. (3) In order to always pass the critical speed with a finite amplitude during acceleration, the value of λ must exceed a certain critical value.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Transient Response, Critical Velocity, Nonlinear Vibration, Summed-and-differential Harmonic Oscillation.

1. 緒 言

非線形ばね特性をもつ回転軸系の危険速度通過時の振動に関するこれまでの研究は、極めて少ない。Mitropol'skii⁽¹⁾は、主危険速度通過時の振動を彼の提案する漸近法を用いて計算しており、また、Evan-Iwanowski⁽²⁾, Agrawal⁽³⁾らは各種の和差調波振動の共振点通過時の振動の解を漸近法によって求めている。しかし、いずれも解析的に過渡振動の振幅変化を求めたもので、危険速度通過時の特性を十分に明らかにしていない。また、後者の研究では、漸近法によって得られた基礎式の形が、共振領域内の和差調波振動の定常振動が発生している状態から加速を開始しなければ振幅変化が求まらないようになっているため、実機のように共振点の低速側から増速して通過する場合の解が得られていない。

著者らは、これまで非線形ばね特性をもつ回転軸系において、危険速度を一定角加速度で通過するときの

過渡振動を数値シミュレーションと実験によって調べ、二つの報告をした。主危険速度に関する第 1 報⁽⁴⁾では、非線形系では共振曲線が傾くため、線形系に比べ危険速度を超え難く、超えるためにはある値以上の角加速度が必要であることを明らかにした。また前向き歳差運動様式の 1/2 次分数調波振動 (記号 $[(+1/2)\omega]$ で表す。 ω : 軸回転速度) に関する第 2 報⁽⁵⁾では、危険速度通過時の最大振幅が、角加速度のみでなく加速開始時の不釣り合いの角位置にも依存するため、同一の角加速度で通過する場合でも運転のたびに最大振幅が異なることを明らかにした。

本論文では、非線形系の副共振点の一つである和差調波振動の共振点を、一定角速度で増速・減速して通過する際の過渡振動について調べる。各種の和差調波振動⁽⁶⁾の中で、ここでは前報⁽⁵⁾の 1/2 次分数調波振動と同様な非対称非線形ばね特性に起因するものを取り上げる。その和差調波振動では、定常状態においては軸回転速度 ω が系の二つの固有振動数の差に等しくなる付近で、調和振動成分 $[+\omega]$ に加え、それぞれ固有振動数に近い二つの振動成分が同時に発生する。その定常振動の共振曲線の形状は 1/2 次分数調波振動と似ていることが知られているが⁽⁷⁾、同時に発生する振動成分の数も増えるので、過渡振動特性は異なる性質

* 平成元年 11 月 11 日 機械力学講演会において講演、原稿受付 平成元年 3 月 27 日。

*¹ 正員、名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)。

*² 正員、名城大学理工学部 (〒464-01 名古屋市天白区塩釜 1-1-501)。

*³ 名古屋大学大学院。

をもつと予想される。そこで、本研究では、この和差調波振動の共振点を通過するときの過渡振動特性（振幅変化に対する角加速度、初期角位置、初期角速度すなわち加速開始角速度などの影響）を調べるとともに、既報⁽⁴⁾⁽⁵⁾の主危険速度と1/2次分数調波振動の共振点の通過の場合との違いを明らかにする。

2. 運動方程式と定常応答

理論解析では既報⁽⁴⁾⁽⁵⁾と同様、回転体のたわみと傾きが連成しない系の傾き振動を扱う。その無次元表示の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \ddot{\Psi} \theta_y + i_p \ddot{\Psi} \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x + N_{ax} \\ = (1 - i_p) \tau (\dot{\Psi}^2 \cos \Psi + \ddot{\Psi} \sin \Psi) \\ \ddot{\theta}_y - i_p \ddot{\Psi} \theta_x - i_p \ddot{\Psi} \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y + N_{ay} \\ = (1 - i_p) \tau (\dot{\Psi}^2 \sin \Psi - \ddot{\Psi} \cos \Psi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。ここに、 z 軸を軸受中心線に一致させた直交座標系 $O-xyz$ を考え、 θ_x, θ_y はそれぞれ軸の傾き θ の $x-z$ 平面、 $y-z$ 平面への投影角とする。さらに、 i_p は回転体の主慣性モーメント I_p と I の比、 τ は動不釣合いで Ψ は x 軸から測った τ の方向角、 c は減衰係数、 N_{ax}, N_{ay} は非線形項であり、その具体的な形は既報⁽⁴⁾⁽⁵⁾と同様である。

本章では、軸回転速度が一定 ($\dot{\Psi} = \omega$) の場合の応答について検討する。このとき、 $t=0$ における動不釣合 i の初期角位置を Ψ_0 とすると、

$$\Psi = \omega t + \Psi_0, \quad \dot{\Psi} = \omega, \quad \ddot{\Psi} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。前報⁽⁵⁾で述べたように、この系は二自由度系であり、その振動数方程式は $G(p) = 1 + i_p \omega p - p^2 = 0$ となる。この式は2根 $p_f (>0)$ 、 $p_b (<0)$ をもち、それぞれ前向き歳差運動様式の固有振動数と、後向き歳差運動様式の固有振動数を表す。 $i_p = 0.25$ の場合についての固有振動数 p の変化を図1に示す。図1中の曲線 $p_f - p_b$ と直線 $p = \omega$ との交点Aで与えられる回転速度を ω_0 、また $\omega = \omega_0$ のときの固有振動数を p_{f0}, p_{b0} とする。この ω_0 付近では、調和振動成分 $[+\omega]$ に加え、固有振動数 p_f, p_b に近い振動数をもつ定常振動が大きく発生し、この振動を $[p_f - p_b]$ 様式の和差調波振動と呼ぶ⁽⁷⁾。これらの振動成分の全位相を $\theta_\omega, \theta_f, \theta_b$ で表すとき、振動数 $\dot{\theta}_f, \dot{\theta}_b$ は、 $O(\epsilon^0)$ 精度 (ϵ : 微小量を表すパラメータ) では次のように近似できる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_f &\doteq (p_{f0}/\omega_0) \omega = (p_{f0}/\omega_0) \dot{\Psi} \quad (\equiv \omega_f) \\ \dot{\theta}_b &\doteq (p_{b0}/\omega_0) \omega = (p_{b0}/\omega_0) \dot{\Psi} \quad (\equiv \omega_b) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

この式を参照して、全位相 θ_f, θ_b を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \theta_f &= (p_{f0}/\omega_0) \Psi + \delta_f = \omega_f t + (p_{f0}/\omega_0) \Psi_0 + \delta_f \\ \theta_b &= (p_{b0}/\omega_0) \Psi + \delta_b = \omega_b t + (p_{b0}/\omega_0) \Psi_0 + \delta_b \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(3)、(4)を比較すると、実際の振動数 $\dot{\theta}_f, \dot{\theta}_b$ と近似の振動数 ω_f, ω_b の差 $\dot{\theta}_f - \omega_f, \dot{\theta}_b - \omega_b$ はそれぞれ δ_f, δ_b となる。 δ_f, δ_b は $O(\epsilon)$ の大きさであるため、 δ_f, δ_b は時間とともにゆっくり変化する量である。また、調和振動成分については、式(2)で与えられる τ の角位置 Ψ との位相差を β とすると、全位相 θ_ω は

$$\theta_\omega = \Psi + \beta = \omega t + \Psi_0 + \beta \quad \dots\dots\dots (5)$$

で与えられる。したがって、和差調波振動の解は、 $O(\epsilon)$ の精度で次のように置ける⁽⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R_f \cos \theta_f + R_b \cos \theta_b + P \cos \theta_\omega \\ &\quad + \epsilon (a_f \cos \theta_f + b_f \sin \theta_f + a_b \cos \theta_b + b_b \sin \theta_b) \\ \theta_y &= R_f \sin \theta_f + R_b \sin \theta_b + P \sin \theta_\omega \\ &\quad + \epsilon (a'_f \sin \theta_f + b'_f \cos \theta_f + a'_b \sin \theta_b + b'_b \cos \theta_b) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、上式中の ϵ を係数にもつ項は $O(\epsilon)$ の大きさの補正項であり、定常振動が非線形項に起因して、半径 R_f, R_b の円軌道からわずかにひずんでだ円になっていることを示している。式(6)を式(1)に代入し、振幅 R_f, R_b, a_f などは、ゆっくり変化する量であると仮定して、 $O(\epsilon)$ 精度で調和バランスをとると次式を得る。

図1 二自由度系の $p-\omega$ 線図

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}_f &= (1/A_f)(-c\omega_f R_f - 2\varepsilon^{(1)} R_b P \sin \psi) \cdots (7 \cdot a) \\ \dot{R}_b &= (1/A_b)(-c\omega_b R_b + 2\varepsilon^{(1)} R_f P \sin \psi) \cdots (7 \cdot b) \\ \dot{\psi} &= (1/A_f)\{G_f + 4\beta^{(0)}(R_f^2 + 2R_b^2 + 2P^2) \\ &\quad - 2\varepsilon^{(1)} P(R_b/R_f) \cos \psi\} \\ &\quad - (1/A_b)\{G_b + 4\beta^{(0)}(2R_f^2 + R_b^2 + 2P^2) \\ &\quad - 2\varepsilon^{(1)} P(R_f/R_b) \cos \psi\} \cdots (7 \cdot c) \end{aligned} \right\}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A_f &= (2\omega_f - i\rho\omega), \quad A_b = (2\omega_b - i\rho\omega), \\ G_f &= G(\omega_f), \quad G_b = G(\omega_b), \quad \psi = \delta_f - \delta_b, \\ P &= -(1 - i\rho)\tau\omega^2/G(\omega) \end{aligned} \right\} \cdots (8)$$

である。また、 $\varepsilon^{(1)}, \beta^{(0)}$ は極座標表示をしたときの非線形項の係数である。定常解 $R_f = R_{f0}, R_b = R_{b0}, \psi = \psi_0$ は、この式で $\dot{R}_f = 0, \dot{R}_b = 0, \dot{\psi} = 0$ とおけば得られる。また、定常解の安定性の判別は既報⁽⁸⁾と同様に行うことができる。

3. 共振点通過時の過渡応答

3.1 解析方法 本論文では一定角加速度の条件で加速することにする。 λ を角加速度、 ω_s を加速開始時の軸回転速度、 ψ_0 を加速開始時の動不釣り合い τ の角位置とすると、 τ の角位置 ψ は

$$\psi = (1/2)\lambda t^2 + \omega_s t + \psi_0 \cdots (9)$$

となる。この条件を式(1)に代入し、ルンゲ・クッタ・ヴァーナ法により θ_x, θ_y の過渡振動波形を求める。加速は和差調波振動の共振点より低速で、調波振動のみが起こっている状態から開始する。得られる過渡振動波形は、軸回転速度 ψ に近い振動数をもつ成分と二つの固有振動数 p_f, p_b に近い振動数をもつ成分が共存し、その振幅(ふれまわりの半径) $\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$ を図示すると、図2(a)のような複雑な変化をする。この波形をFFT処理⁽⁵⁾し、得られたスペクトルを図2(b)に示す。ここで和差調波振動に対応する範囲の成分のみを抽出し、逆FFT処理を行うことによって、図3に示すような各成分の振幅変化を得る。なお、実際の計算では、 ω_s での1週りを20等分する時間間隔で振幅変化の波形をサンプリングし、その2¹⁴個のデータをFFT処理した。例えば図2, 3の $\lambda = 3.0 \times 10^{-4}$ の場合では、 $\psi = 2.0 \sim 2.77$ の範囲となる。また図2(b)のスペクトルの周波数0.75~1.1, 1.3~1.8の範囲を抽出して逆FFT処理した。

3.2 共振点通過時の最大振幅 図3に、2章で計算した定常解(共振曲線) R_{f0}, R_{b0} 、および初期角位置 ψ_0 を変えたときの危険速度通過時の振幅変化 r_f, r_b の計算例を示す。定常解については実線が安定解、

破線が不安定解を表す〔図2(a)では、定常解のうち振幅変化曲線 $\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}$ と重なった部分を白抜きで表示した〕。なお、振幅零の定常時も常に存在するが、そ

(a) 共振曲線と危険速度通過時の振幅変化

(b) スペクトル

図2 FFT処理(数値計算)

図3 共振曲線と危険速度通過時の振幅変化(増速、数値計算)

の解は共振曲線が ψ 軸と交わる2点 A_1, A_2 の間で不安定、それ以外は安定である。危険速度通過時の振幅変化は、1/2次分数調波振動と同じく、振幅が共振曲線に沿って増大し危険速度を超えられない場合 ($\psi_0 = 0^\circ$ の例) と、小振幅で超えられる場合 ($\psi_0 = 120^\circ$ の例) の2種類に分けられる。いずれの場合も A_1 点を通り、振幅零の解が不安定である区間に入って、しばらくしてから振幅が増大し、振動数が p_f, p_b に近い成分の振幅 r_f, r_b はほぼ同じ速度で大きくなり始める。その後、超えられない場合では r_f, r_b ともほぼ同時に同程度の極大値をとった後、同じ周期で変動しながら、それぞれの定常解へと向かう。ここで定常解とのずれは、定常解を求める際の近似による誤差である。一方、超えられる場合は、ほぼ同時に最大値 $(r_f)_{\max}, (r_b)_{\max}$ をとった後、振幅零の定常解に漸近する。本論文では、超えられない場合は便宜上 $(r_f)_{\max} = \infty, (r_b)_{\max} = \infty$ と表現する。

以下、加速条件を決める三つの量、すなわち、角加速度 λ 、加速開始回転速度 ω_s 、初期角位置 ψ_0 と最大振幅 $(r_b)_{\max}$ の関係を調べる。なお、 $(r_f)_{\max}$ に関しては、 $(r_b)_{\max}$ と同じ傾向を示すので略した。図4(a)は、増速時 ($\lambda > 0$) における最大振幅 $(r_b)_{\max}$ に対する角加速度 λ の影響を ψ_0 をパラメータとして示したものである。 $\omega_s = 2.0$ に固定した。このうち、実線と一点鎖線はそれぞれ一定の初期角位置 $\psi_0 = 120^\circ$ および 180° の場合の変化を示し、破線は ψ_0 を $0^\circ \sim 360^\circ$ まで 30° おきに变化させたときの最大値と最小値を示している。したがって、 $(r_b)_{\max}$ はこの破線で囲まれた影を付けた領域内にのみ存在する。また、 $(r_b)_{\max}$ の最大値と最小値はいくつかの極大値、極小値をもち、 λ の小さいところで $(r_b)_{\max}$ の最大値は無限大となっている。この $(r_b)_{\max}$ の最大値が無限大となる角加速度 λ では、初期角位置 ψ_0 の値によって、有限振幅で超えられる場合と超えられない場合があることがわかる。その λ の中の最大値を λ_1 で表す。また、逆に $(r_b)_{\max}$ の最大値が有限値をとれば、その角加速度 λ では ψ_0 によらず、必ず有限振幅で超えられる。第2報の1/2次分数調波振動の場合は、最大振幅 $r'_{\max}$ の最大値は角加速度 λ に対して単調減少しており、常に有限振幅で超えられる範囲と ψ_0 の値によっては無限大となる範囲は臨界値 λ_0 により二分され、それより大きい λ では必ず超えられる結果を得ている。しかし、和差調波振動ではそれと異なり、ある角加速度の範囲で超えられないことがあっても〔例えば図4(a)で $\lambda = 2.98 \sim 3.03$ 〕、さらにそれより小さい値 ($\lambda = 2.91 \sim 2.98, 2.79 \sim 2.83$) でも超えられる範囲が存在する。

次に、図4(b)は最大振幅 $(r_b)_{\max}$ に対する角加速度 λ の影響を、加速開始回転速度 ω_s をパラメータとして示したものである。 $\psi_0 = 180^\circ$ に固定してある。この図から、加速開始回転速度 ω_s が2.0からわずかに $\pm 0.1\%$ 変化しただけで、曲線は大きく変わることがわかる。しかし、この差異は個々の振幅変化曲線の間の違

(a) 角加速度 λ と初期角位置 ψ_0 の影響

(b) 角加速度 λ と初期角速度 ω_s の影響

(c) 初期角位置 ψ_0 と角加速度 λ の影響

図4 最大振幅に対する各パラメータの影響
(増速、数値計算)

いであり、図4(a)の影をつけた領域内で振幅が無限大となる最も大きな角加速度 λ_1 の差異を直接示すものではなく、それぞれの ω_s で ψ_0 を変化させた図4(a)に相当する図を描くと、最大角加速度 λ_1 についてはそれほど大きな差はない。後述の実験装置では、回転速度の設定精度は $\pm 0.1\%$ 程度の誤差をもつので、 ω_s を一定にして最大振幅に対する角加速度の影響を調べた図4(a)を描くときには、設定誤差に伴う図4(b)のような ω_s の影響も含まれるため、図4(a)の影を付けた領域のくぼみは現れなくなる。実験結果との比較のため、理論において、図4(a)、(b)を同時に考慮して振幅変化曲線を描き、それらの包絡線をたどれば、1/2次分数調波振動と同様に最大振幅 $(r_0)_{\max}$ の最大値は λ に対して単調減少するので、有限振幅で危険速度を超えるための臨界値 λ_0 ($\lambda_0 \geq \lambda_1$) が得られる。

この臨界値 λ_0 は、回転速度 ω_s とその変動幅によって変化する。ここでは、 ω_s がわずかに変動する状態で λ_0 を定義しているが、 ω_s を大きく変えたと別の振動の共振点の影響を受けるため、 ψ_0 と ω_s によらず常に通過できる角加速度の最小値として臨界値 λ_0 の大きさを決めることはあまり意味がない。なお、図4以外の ω_s の値でも有限な臨界値 λ_0 が存在することは、 ω_s を他の共振点の影響を受けない範囲で変えて代表的な値に対して同様な計算をすることで確認した。

図4(c)は、加速開始回転速度 $\omega_s=2.0$ に固定して、最大振幅 $(r_0)_{\max}$ に対する初期角位置 ψ_0 の影響を角加速度 λ をパラメータとして示したものである。角加速度は超えられない領域には含まれた $\lambda=2.94 \times 10^{-4}$ 、超えられない領域の $\lambda=3.00 \times 10^{-4}$ 、超えられるが振幅の大きい $\lambda=3.16 \times 10^{-4}$ の三つの場合について示した。1/2次分数調波振動の場合は、どの角加速度 λ についても、最大振幅 $(r_0)_{\max}$ がほとんど零となるよ

うな ψ_0 が必ず存在し、これらの曲線は ψ_0 軸と接していたが、和差調波振動の場合は、多くの場合、 $\lambda=3.00 \times 10^{-4}$ 、 $\lambda=3.16 \times 10^{-4}$ の例のように、 ψ_0 を変えても、最大振幅 $(r_0)_{\max}$ が零となることはなく曲線は常に ψ_0 軸から離れている。

次に、図5に減速時($\lambda < 0$)の最大振幅 $(r_0)_{\max}$ と角加速度の関係を示す。ここで $\omega_s=2.55$ に固定してある。図5中で実線は $\psi_0=90^\circ$ の場合を表しており、パラメータ ψ_0 を変えれば、この実線は上下に移動する。破線はその最大値と最小値を示す。この図5から、減速時の最大振幅の存在範囲は帯状になることがわかる。これについても、1/2次分数調波振動の場合と様子が異なる。

4. 状態空間と解軌道

4.1 回転速度一定のときの状態空間 式(7)に示したように、和差調波振動の定常振動は三つの状態量、すなわち振幅 R_f 、 R_b および、位相差 ψ によって表される。この解は状態空間とよばれる三次元空間内の点によって表されるが、その位置は R_f を動径、 R_b を高さ、 ψ を x 軸から測った角度とする円筒座標で表現できる。この円筒座標と三次元空間の直交座標 (x, y, z) との間には

$$\begin{cases} x = R_f \cos \psi \\ y = R_f \sin \psi \\ z = R_b \end{cases} \quad \dots\dots\dots (10)$$

の関係がある。この状態空間内の解軌道は、式(7)を

(b) 立体図

(a) 三面図

図6 状態空間と解軌道 ($\omega = \text{一定}$)

図5 最大振幅に対する角加速度 λ と初期角位置 ψ_0 の影響 (減速, 数値計算)

数値積分して R, R_0, ψ の時間的変化を計算すれば求まる。なお、 $R_0 > 0$ であるから、解軌道は xy 平面より上に存在する。例えば、 $\omega = 2.80$ における状態空間を、三面図および立体図で表すと図6のようになる。図3からわかるように、この回転速度では二つの安定解（振幅零の解も含む）と一つの不安定解が存在するので、状態空間内には三つの特異点 A, B, C が現れる。図6で、●印は安定な定常解を表す特異点、○印は不安定な定常解を表す特異点である。この空間内の解軌道のうち、不安定な特異点を通る解軌道のみを細線で図6(a)に示す。この解軌道は本来6本あるが、そのうち3本はこの図6でほとんど重なって不安定特異点に向かう1本の線のように見えている。前報⁽⁵⁾で用いた二次元の状態平面では、不安定な特異点を通る解軌道は、状態平面をそれぞれ安定解に向かう領域に分ける分離枝（セパトリクス）となる。三次元の状態空間では、セパトリクスに相当する曲面が存在し、それらの交線が図6(a)に示す解軌道であるが、その曲面を具体的に図示することは難しい。図6(a)の解軌道を時間的にたどると、不安定な特異点、あるいは二つの安定な特異点のいずれかに到達する。これらの曲線から状態空間内の任意の点を初期値として与えられたときどのように移動するかある程度予想がつく。例として図6(a)の×印で表される点 P, Q から出発する状況点の移動する経路を図6(b)に示す。

4・2 通過時の状態空間における解軌道 一定角加速度 ($\ddot{\psi} = \lambda$) で加速して危険速度を通過するときは、図6に示される特異点 A, B は状態空間中を移動し、過渡振動解を表す状況点は、安定な特異点 A 、または C に向かって動いてゆく、この過渡振動解の解軌道は、式(1)を用いた数値シミュレーションの結果を、3・1

節のようなFFT処理してそれぞれの成分の振幅と位相差を求め、それをもとに描くことができる。図7にその解軌道の例を、危険速度を有限振幅で超えられる場合（解軌道Ⅰ）と超えられない場合（解軌道Ⅱ）について示す。危険速度より低速側から増速する場合を考えると、図3の点 A_1 までは原点に安定な特異点があり、点 A_1 と点 A_2 の間では原点に不安定な特異点、それから離れたところに安定な特異点がある。さらに点 A_2 以上では原点に安定な特異点、それから離れたところに安定な特異点と不安定な特異点が例えば図6のように存在する。低速側で調和振動だけが起きている状態から加速すると、和差調波振動成分の過渡解を表す状況点は、最初のうちは原点付近にあり、回転速度 $\dot{\psi}$ が点 A_1 を超えると原点が不安定に変わり、そのときの状況点と原点のずれが初期外乱となって解軌道は原点から離れていく。その離れる速度は状況点と不安定である原点の相対的な位置関係（初期外乱の大きさと方向）によって決まる。その後、 $\dot{\psi}$ が点 A_2 を超えると、図6のように特異点は原点を含め三つとなるが、そのときの状況点の状態空間における位置に依存して、解軌道は二つの安定の特異点のいずれかに向かう。原点 C に向かえばこれまでに述べた通過できる場合であり、原点から離れた安定な特異点 A に向かえば通過できない場合となる。初期角位置 ψ_0 や加速開始角速度 ω_s によって点 A_1 を超えたときの原点に対する状況点の相対的位置はいろいろと変わるから、図4に示すように最大振幅 $(r'_0)_{\max}$ が ψ_0 や ω_s に影響されることになる。

図4, 5に示すように、最大振幅 $(r'_0)_{\max}$ の最大値、最小値と角加速度 λ との関係は前報⁽⁵⁾と異なっている。この違いは、和差調波振動の場合は三次元の状態空間であり、1/2次分数調波振動の場合は二次元の状態平面であることに起因している。例えば前報⁽⁵⁾では ψ_0 を 0° から 360° まで変化させると、それに対応する点 A_1 を超えた直後の状況点は、二次元の状態平面上で不安定特異点（原点）を囲む閉曲線を描く。したがって、どのような角加速度 λ で増速しても、点 A_1 を通過したときに与えられる初期外乱は、原点付近のすべての状態が実現し、その結果として与えられる状況点が原点を離れるときの速度の変動範囲に λ の違いによる差は現れない。最大振幅の最大値は、(1)振幅の増加する速さと(2)回転速度が、原点が再び安定に変わる点 A_2 にどれだけ速く到達するかということの二つの要因によって支配されるので、結局この1/2次分数調波振動の場合は後者のみによって、すなわち角加速度 λ のみによって決まり、最大振幅の最大値は λ

図7 状態空間と解軌道（危険速度通過時）

に対して単調減少するようになる〔前報⁽⁵⁾図5(a)を参照〕。一方、和差調波振動の場合にも、 ψ_0 を 0° から 360° まで変化させたとき、これに対応する点 A_1 を超えた直後の状況点は、三次元の状態空間内で原点付近の閉曲線となる。しかし、初期外乱として、三次元の状態空間で原点付近のすべての状態を実現するためには、原点を囲む閉曲面にならなければならないが、この状況点の閉曲線は、原点付近のごく一部の状態しか実現していない。状況点が ψ_0 の値によって、この閉曲線上で変化するとき、それに対応する原点を離れるときの速度の変動範囲は、原点に対するこの閉曲線の位置関係によって決まる。原点付近の任意の位置に対しては、その点を通る解軌道の方が決まっているので、角加速度 λ と加速開始回転速度 ω_s が一定であるとき、この閉曲線が原点に向かう位置だけを通っていれば、原点を離れるときの速度の分布はすべてゆっくりしたものとなり、 ψ_0 を変えても最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ はいつも小さくなる。またいろいろな方向に向かう位置を通るならば、その変動範囲は大きいものとなる。

図8 和差調波振動の共振曲線 (実験結果)

図9 危険速度通過時の振幅変化 (増速, 実験結果)

5. 実験装置および実験結果

5.1 実験装置 実験装置と計測システムの構成は前報⁽⁵⁾とほぼ同様である。円形断面の弾性回転軸に円板が取付けられ、軸の上端は複列自動調心玉軸受(#1200)、下端は単列深溝玉軸受(#6204)により支持されている。非線形ばね特性は下部軸受のがたに起因している。また、円板は直径300 mm、厚さ14 mmで質量7.78 kg、軸は直径12 mm、上下軸受中心間距離は700 mmである。円板は軸下端から175 mmの位置に取付けられている。

5.2 実験結果 実験装置は、回転体のたわみと傾きが連成する四自由度系であり、その固有振動数を p_i ($i=1\sim4$, $p_1 > p_2 > 0 > p_3 > p_4$)とする。図8は $\omega \approx p_2 - p_3$ となる回転速度付近で発生した和差調波振動の定常振動の一例である。図8中○, ●, および○, ●印は、それぞれx方向, およびy方向の振幅を示す。

図10 角加速度 λ の最大振幅に対する影響 (増速, 実験結果)

図11 角加速度 λ の最大振幅に対する影響 (減速, 実験結果)

ただし、縦軸の振幅は、変位の最大値を表す。また、矢印は跳躍現象が生じたことを示し、回転数が約 1730~1820 rpm の間は和差調波振動の振動零の解は不安定であることがわかる。

図 9 は増速時における危険速度通過時の振幅変化についての実測結果を、理論計算と同様に FFT 処理して固有振動数 ρ_2, ρ_3 に近い振動数をもつそれぞれの成分について示したものである。初期角速度はいずれも 1500 rpm である。 $\lambda=18.1$ rpm/s の同じ角加速度で、越えられる場合とそうでない場合の 2 とおりの振幅変化を示した。また定常時の共振曲線を近似的に示すため、本実験装置で可能な限り小さい角加速度 ($\lambda=4.1$ rpm/s) を与えたときの振幅変化も併せて示してある。

次に、最大振幅に対する角加速度の影響を調べる。本実験装置では、軸の回転速度に対して約 $\pm 0.1\%$ の誤差がある (例えば $\omega_s=1500$ rpm に対し、約 ± 2 rpm)。また、モータが加速を開始して一定角加速度になるまで多少の時間遅れがあり、角加速度も完全にステップ関数的に与えられない⁽⁴⁾。このようなことから、実験では初期角速度 ω_s は設定値付近で $\pm 0.1\%$ 程度の誤差を含み、初期角位置 ψ_0 も $0\sim 360^\circ$ の間でランダムに与えられることになる。図 10 は増速時の角速度と最大振幅の関係を表したものである。ここで、矢印は振幅が共振曲線に沿って増大し、共振点を越えられない場合が生じたことを示す。破線は最大振幅の包絡線を示し、理論計算における最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ の最大値に相当している。したがって、最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ の取り得る値は、破線より下の影の付けた領域である。前述のように、本実験装置では加速開始回転速度 ω_s の設定値にわずかな誤差が存在するので、この図 10 では、理論計算 [図 4 (a)] で得られたような最大振幅の存在可能領域のくぼみ [($r'_3)_{\max}$ の最大値の谷と最小値の山]を確認することができなかった。しかし、3 章での考察のとおり、実験結果は 1/2 次分数調波振動のときと似ており、角加速度の臨界値 λ_0 以上では常に有限振幅で通過可能であり、それ以下では、越えられる場合とそうでない場合が混在している。

図 11 は減速時の角速度と最大振幅を示したものであるが、理論計算と定性的によく一致し、最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ の存在範囲が帯状になっているのがわかる。これは、減速時は増速時のくぼみのような急激な変化がないので、加速開始回転速度の影響があまり現れないためである。また、減速時に関しては、最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ の最小値が零となる 1/2 次分数調波振動の実

験結果とは明らかな違いがある。

6. 結 論

非線形ばね特性をもつ回転軸系において、和差調波振動の共振点を通過するときの非定常振動について調べた結果、以下のことが明らかになった。

(1) 共振点通過時の最大振幅は、角加速度 λ だけでなく、初期角位置 ψ_0 、加速開始回転速度 ω_s によって大きく変化する。

(2) 1/2 次分数調波振動の場合と異なり、初期角位置 ψ_0 を $0\sim 360^\circ$ 変化させたとき最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ には最大値と最小値が存在し、その二つの値の間でさまざまな値をとる。角加速度 λ に対しこの最大値と最小値は単調減少しない。

(3) 増速時には、1/2 次分数調波振動の場合と異なり、初期角位置によらず振幅が小さいまま通過できる角加速度の値がいくつも存在する。

(4) 実験装置における加速開始回転速度の設定誤差約 0.1% を考慮し、 ψ_0 をパラメータとしたときの最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ と角加速度 λ の関係を調べると 1/2 次分数調波振動のときと同様に、最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ の最大値は角加速度 λ に対し単調減少し、危険速度を有限振幅で超えるための角加速度の臨界値 λ_0 が存在する。

(5) 減速時は、常に有限振幅で越えられるが、1/2 次分数調波の場合と異なり、最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ は最大値と最小値をもつ。

(6) 実験において、増速時には、上述の (4) の最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ の最大値は角加速度 λ に対して単調減少し、臨界値 λ_0 が存在することを確認した。また、減速時には上述 (5) の最大振幅 $(r'_3)_{\max}$ の最大値、最小値の存在を確認した。

文 献

- (1) Mitropol'skii, Yu. A., Problems of the Asymptotic Theory of Nonstationary Vibrations, *English Translations*, (1965), 256, D. Davey & Co., New York.
- (2) Evan-Iwanowski, R. M., *Appl. Mech. Rev.*, **22** (1969), 213.
- (3) Agrawal, B. N. and Evan-Iwanowski, R. R., *AIAA J.*, **11**-7 (1973), 907.
- (4) 石田・ほか 2 名, 機論, **52**-478, C (1986), 1764.
- (5) 石田・ほか 3 名, 機論, **55**-511, C (1989), 636.
- (6) 山本・石田, 機論, **41**-354 (1975), 1374.
- (7) 山本・石田, 機論, **41**-341 (1975), 133.
- (8) 山本・石田・池田, 機論, **50**-456, C (1984), 1390.