負荷トルクを受ける回転軸のふれまわり振動* (負荷トルクによる不安定化現象)

加 藤 正 義^{*1}, 太 田 博^{*2}

Whirling Vibrations of a Rotating Shaft with Load Torque (Instability due to Load Torque)

Masayoshi KATO and Hiroshi OTA

When a shaft rotates resisting a certain load, the rotating shaft must undergo bending and torsion simultaneously. The driving torque on such a rotating shaft influences the whirling motion of the shaft. This paper presents an analytical study of the effect of the load torque on the whirling vibration of the rotating shaft. Equations of motion are derived with an accuracy of the second order for the deflection and the torsion, and are analyzed by using the asymptotic method. The analyses produced the following results. The effective damping coefficient for the whirling vibration can become negative when the viscous damping coefficient of the torsional vibration is larger than that of the lateral-reciprocal vibration. In this case, the whirling vibration of the rotating shaft assumes an unstable state. The damping coefficient for whirling vibration of the shaft in an accelerated rotation differs from that in a decelerated rotation.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Load Torque, Whirling, Instability, Asymptotic Solution, Damping Characteristics

1. ま え が き

軸の回転に対してなんらかの負荷トルクが働くとき、回転軸には、一般に曲げとねじりのひずみが生じていると考えられる。このような回転軸における力およびモーメントの釣合いを考えると、駆動トルクは、軸のふれまわり運動に影響を与える旋回方向の力を生ずることがわかる。この駆動トルクによる旋回力は、軸にねじりとともにたわみがあって始めて生ずるものであり、その大きさは軸のたわみとねじれ角に関する 2 次の微小量の程度となる。

一方、粘性摩擦が作用する通常の回転軸系では、減衰比は振動変位 x の無次元量 x/l (l : 軸長) と同程度の微小量である場合が多い⁽¹⁾。このような場合には、粘性減衰力の無次元量 $c\dot{x}/(al)$ (a : たわみのばね定数) は $(x/l)^2$ 程度の大きさとなる。この粘性減衰力に駆動トルクによる旋回力の影響が加わると、結果的に軸の安定性に関する問題も生じてくることになる。とこ

ろが、これまでの研究で回転軸の振動を解析するにあたって用いられてきた運動方程式は、回転軸系に非線形性を生ずる特別な要因があることを前提にした場合⁽²⁾を除いて、線形近似に基づくものであり、座標の 2 次の微小量の精度で導かれた運動方程式は提示されていない。なお、Vance ら⁽³⁾は、たわみ継手で駆動される剛性軸の近似的なモデルとして片持弾性軸を扱い、負荷トルクによる不安定化力の発生を説明しているが、安定限界に対する定量的な表現は得ていない。

本論文では、回転軸がねじりを生ずる例として、軸の回転に対して粘性摩擦が作用する場合、および慣性負荷を持つ回転軸が角速度変化する場合を扱った。まず、軸が曲げとねじりのひずみを生じているときの復元力および復元モーメントを求め、軸のたわみ、たわみ角、ねじれ角の 2 次の微小量の精度で運動方程式を導いた。この運動方程式は厳密に解けないので、近似解をボグリュエボフ・ミトロポリスキーの漸近的方法⁽⁴⁾を用いて求め、ねじり振動の減衰係数あるいは角加速度がふれまわり振動の減衰係数に与える影響を明らかにした。

* 平成元年 10 月 14 日 第 67 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 63 年 11 月 4 日。

*¹ 正員、愛知教育大学教育学部 (〒448 刈谷市井ヶ谷町広沢 1)。

*² 正員、名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市中種区不老町)。

2. 回転体に作用する力 およびモーメント

図1に本研究で扱う回転軸系を示す。軸 S_h は一様な円形断面の弾性軸で、駆動端 A において固定支持されている。軸端 S には質量 m の対称回転体 D が取り付けられている。O-xyz は静止直交座標系であり、軸が微小な横振動をするとき、点 S は xy 平面上を運動する。z 軸は軸 S_h がたわんでいないときの軸の中心線と一致する。なお、軸の曲げおよびねじりは AS 部分においてのみ生ずるものとする。

まず、軸が回転しないように駆動端 A を固定し、回転体の取り付け位置 S に外から力 F_{sx} , F_{sy} とモーメント M_{sx} , M_{sy} , M_{sz} を加えたときを考え、このとき点 S に生ずるたわみおよびたわみ角の xz 平面, yz 平面への投影を x_s , y_s , および θ_{sx} , θ_{sy} とし、点 A に対する点 S のねじれ角を θ_{st} とする。すべての力とモーメントは図1に示された向きを正にとる。

ここで、軸の中心線に沿う座標 s を考える。図1において、弾性軸のある位置 s における断面の左側の部分が右側の部分に与える力のモーメントの主軸方向の成分を M_1 , M_2 , M_3 とし、主軸の角位置を表すオイラー角を θ , ϕ , ψ とすると、次の関係が成り立つ⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{M_1}{EI_0} &= \frac{\partial \theta}{\partial s} \sin \psi - \frac{\partial \phi}{\partial s} \sin \theta \cos \phi \\ -\frac{M_2}{EI_0} &= \frac{\partial \theta}{\partial s} \cos \psi + \frac{\partial \phi}{\partial s} \sin \theta \sin \phi \\ -\frac{M_3}{GI_z} &= \frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial s} \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここに、 EI_0 は軸の曲げ剛性、 GI_z はねじり剛性である。ただし、軸にひずみがないとき、主軸の方向は軸のどの位置についても同じであるとする。なお、図2を参照のこと。

軸の点 A における回転角を θ_a とすると、点 A に対する軸のある位置 s におけるねじれ角 θ_t は

図1 回転軸系

$$\theta_t = \phi + \psi - \theta_a \dots\dots\dots (2)$$

によって定義される。たわみ角 θ の xz 平面, yz 平面への投影を θ_x , θ_y とし、 θ の三乗以上の微小量を見捨てる、

$$\theta_x = \theta \cos \phi, \theta_y = \theta \sin \phi \dots\dots\dots (3)$$

が得られる。また、曲げモーメントの x, y, z 方向の成分をそれぞれ M_x , M_y , M_z とすれば、

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= (M_x + \theta_t M_y - \theta_x M_z) \cos \theta_a \\ &\quad + (M_y - \theta_t M_x - \theta_y M_z) \sin \theta_a \\ M_2 &= -(M_x + \theta_t M_y - \theta_x M_z) \sin \theta_a \\ &\quad + (M_y - \theta_t M_x - \theta_y M_z) \cos \theta_a \\ M_3 &= M_x \theta_x + M_y \theta_y + M_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

が成り立つ。 $ds = dz[1 + O(\theta^2)]$ [$O(\theta^2)$ は θ^2 程度の量を表す]であることを考慮して、式(2)~(4)を式(1)に代入すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta_x}{\partial z} + \theta_t \frac{\partial \theta_y}{\partial z} &= -\frac{1}{EI_0} (M_y - \theta_t M_x - \theta_y M_z) \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial z} - \theta_t \frac{\partial \theta_x}{\partial z} &= \frac{1}{EI_0} (M_x + \theta_t M_y - \theta_x M_z) \\ \frac{\partial \theta_t}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\theta_y \frac{\partial \theta_x}{\partial z} - \theta_x \frac{\partial \theta_y}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{GI_z} (\theta_x M_x + \theta_y M_y + M_z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

図1に示す境界条件のもとで式(5)を積分すれば、 $\theta_x(z)$, $\theta_y(z)$, $\theta_t(z)$ が求まる。たわみ $x(z)$, $y(z)$ は次式で与えられる。

$$x = \int_{-l}^z \theta_x dz, y = \int_{-l}^z \theta_y dz \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $l = AS$ である。点 S における軸のたわみ x_s , y_s , たわみ角 θ_{sx} , θ_{sy} , ねじれ角 θ_{st} は

$$\left. \begin{aligned} x_s &= x(0), y_s = y(0) \\ \theta_{sx} &= \theta_x(0), \theta_{sy} = \theta_y(0) \\ \theta_{st} &= \theta_t(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

によって与えられる。式(7)の右辺には、 M_{sx} , M_{sy} , M_{sz} , F_{sx} , F_{sy} が含まれており、式(7)をこれらについて解くと、

$$\left. \begin{aligned} M_{sx} &= -\gamma y_s - \delta \theta_{sy} \\ &\quad + \delta_t \theta_{st} (l \theta_{sx} + 2x_s) / (2l) \\ M_{sy} &= \gamma x_s + \delta \theta_{sx} \\ &\quad + \delta_t \theta_{st} (l \theta_{sy} + 2y_s) / (2l) \\ M_{sz} &= \delta_t \theta_{st} - (l\gamma + \delta_t)(x_s \theta_{sy} - y_s \theta_{sx}) / l \\ F_{sx} &= \alpha x_s + \gamma \theta_{sx} - \delta_t \theta_{st} \theta_{sy} / l \\ F_{sy} &= \alpha y_s + \gamma \theta_{sy} + \delta_t \theta_{st} \theta_{sx} / l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

が得られる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 12EI_0/l^3, \quad \gamma = -6EI_0/l^2 \\ \delta &= 4EI_0/l, \quad \delta_t = GI_z/l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

である。明らかに、 $-F_{sx}$ 、 $-F_{sy}$ 、および $-M_{sx}$ 、 $-M_{sy}$ 、 $-M_{sz}$ は、点 S における軸のたわみ、たわみ角、ねじれ角がそれぞれ x_s 、 y_s 、 θ_{sx} 、 θ_{sy} 、 θ_{st} であるときの、点 S に生ずる復元力および復元モーメントであり、これらが点 S に取付けられた回転体に作用する力およびモーメントとなる。

3. 運動方程式

ここでは、回転軸 S_h が駆動端 A において一定の角速度あるいは一定の角加速度で駆動されていて、回転体 D には粘性摩擦が極軸に垂直な方向の並進運動、極軸に垂直な軸まわりの傾き運動のほかに、極軸まわりの回転運動に対しても作用する場合を考える。なお、回転軸 S_h の分布質量および重力の影響は無視する。

図 2 に回転体 D の慣性主軸 x_1 、 x_2 、 x_3 の角位置を表すオイラー角 θ_r 、 ϕ_r 、 ψ_r と点 S における弾性軸 S_h の主軸の角位置を表すオイラー角 θ_s 、 ϕ_s 、 ψ_s を示す。G-XYZ は回転体の重心 G を原点とする運動座標系で、O-xyz に平行である。 x_3 軸は軸 S_h のたわみ曲線の点 S における接線に平行な直線 GT に対し小さな角 τ_0 だけ傾いている。この動不釣り合い τ_0 の方位方向は x_1 軸に一致しているとする。また回転体の重心 G は点 S から e_0 だけずれていて、その方向は x_1 軸から軸の回転方向に測って β であるとする。 I は回転体 D の x_1 、 x_2 軸まわりの慣性モーメント、 I_p は x_3 軸まわりの慣性モーメントである。 $\phi_s + \psi_s = \Theta_s$ は点 S における軸の回転角である。軸がねじれていないとき、 $\Theta_a = \Theta_s$ で

図 2 回転体の慣性主軸 x_1 、 x_2 、 x_3 の角位置を表すオイラー角 θ_r 、 ϕ_r 、 ψ_r と弾性軸の主軸の角位置を表すオイラー角 θ_s 、 ϕ_s 、 ψ_s

あり、時刻 $t=0$ において $\Theta_a=0$ とする。

図 2 において、 $\phi_r + \psi_r = \Theta_r$ とおき、 θ_r 、 θ_s の三乗以上の微小量を見捨て得られる関係

$$\left. \begin{aligned} \Theta_r &= \Theta_s + \tau_0(\theta_{sx} \sin \Theta_s - \theta_{sy} \cos \Theta_s)/2 \\ x_r &= x_s + e_0 \cos(\Theta_s + \beta) \\ y_r &= y_s + e_0 \sin(\Theta_s + \beta) \\ \theta_{rx} &= \theta_r \cos \phi_r = \theta_{sx} + \tau_0 \cos \Theta_s \\ \theta_{ry} &= \theta_r \sin \phi_r = \theta_{sy} + \tau_0 \sin \Theta_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

および式 (8) の結果を用いれば、オイラーの運動方程式、ニュートンの運動の第 2 法則から回転体の運動方程式が得られ、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + \alpha x + \gamma \theta_x &= -c_1\{\dot{x} - e_0 \omega \sin(\Theta + \beta)\} \\ &\quad + me_0\{\dot{\omega} \sin(\Theta + \beta) + \omega^2 \cos(\Theta + \beta)\} \\ &\quad + (\delta_t/l)\theta_t \theta_y \\ m\ddot{y} + \alpha y + \gamma \theta_y &= -c_1\{\dot{y} + e_0 \omega \cos(\Theta + \beta)\} \\ &\quad - me_0\{\dot{\omega} \cos(\Theta + \beta) - \omega^2 \sin(\Theta + \beta)\} \\ &\quad - (\delta_t/l)\theta_t \theta_x \\ I\ddot{\theta}_x + I_p \omega \dot{\theta}_y + \delta \theta_x + \gamma x \\ &= -c_2\{\dot{\theta}_x - \tau_0 \omega \sin \Theta\} \\ &\quad + \tau_0\{I\dot{\omega} \sin \Theta + (I - I_p)\omega^2 \cos \Theta\} \\ &\quad + \delta_t \theta_t (\theta_y/2 - y/l) \\ I\ddot{\theta}_y - I_p \omega \dot{\theta}_x + \delta \theta_y + \gamma y \\ &= -c_2\{\dot{\theta}_y + \tau_0 \omega \cos \Theta\} \\ &\quad - \tau_0\{I\dot{\omega} \cos \Theta - (I - I_p)\omega^2 \sin \Theta\} \\ &\quad - \delta_t \theta_t (\theta_x/2 - x/l) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} I_p \dot{\omega} &= T + M_e - c_3 \omega + I_p\{(\theta_x \ddot{\theta}_y - \theta_y \ddot{\theta}_x)/2 \\ &\quad + \tau_0\{(\ddot{\theta}_y - \omega \dot{\theta}_x) \cos \Theta - (\ddot{\theta}_x + \omega \dot{\theta}_y) \sin \Theta\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに、ドット記号は時間 t に関する微分を意味し、

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \dot{\Theta} = \omega_a + \dot{\theta}_t \\ \omega_a &= \dot{\Theta}_a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

であり、変数の添字 s は省略した。 T は駆動端 A におけるトルクを表し、次式で与えられる。

$$T = -\delta_t\{\theta_t + (\theta_{xy} - \theta_{yx})/l\} \dots\dots\dots (14)$$

M_e は、復元力 $-F_x$ 、 $-F_y$ が重心 G から e_0 だけ離れたところで作用することにより形成される力のモーメントであり、

$$\left. \begin{aligned} M_e &= e_0\{(\alpha y_s + \gamma \theta_{sy}) \cos(\Theta_r + \beta) \\ &\quad - (\alpha x_s + \gamma \theta_{sx}) \sin(\Theta_r + \beta)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。また、 c_1 は回転体の並進運動に関する減衰係数、 c_2 および c_3 は主軸 x_1 、 x_2 および x_3 まわりの回転運動に関する減衰係数である。

4. 漸近法による近似解析

回転軸のふれまわり振動の特性を明らかにするため、運動方程式(11)の近似解を求める。

式(11)で次の無次元量

$$\left. \begin{aligned} z &= (x + iy)/l, \quad \theta_z = \theta_x + i\theta_y, \quad e_0' = e_0/l \\ T' &= T/(al^2), \quad \gamma' = \gamma/(al), \quad \delta' = \delta/(al^2) \\ \delta_i' &= \delta_i/(al^2), \quad c_1' = c_1/\sqrt{ma} \\ c_2' &= c_2/(l^2\sqrt{ma}), \quad c_3' = c_3/(l^2\sqrt{ma}) \\ I' &= I/(ml^2), \quad I_p' = I_p/(ml^2) \\ \omega_a' &= \omega_a/\sqrt{a/m}, \quad \omega' = \omega/\sqrt{a/m} \\ t' &= t\sqrt{a/m}, \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

を導入すると、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + z + \gamma\theta_z &= -c_1\dot{z} - i\delta_i\theta_z\theta_z \\ &\quad + e_0\{\omega^2 - i(\dot{\omega} + c_1\omega)\}e^{i(\Theta+\theta)} \\ I\ddot{\theta}_z - iI_p\omega\dot{\theta}_z + \delta\theta_z + \gamma z \\ &= -c_2\dot{\theta}_z - i\delta_i\theta_i(\theta_z - 2z)/2 \\ &\quad + \tau_0\{(I - I_p)\omega^2 - i(I\dot{\omega} + c_2\omega)\}e^{i\Theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となる。ここに、無次元量を表すダッシュ記号は省略した。また、ドット記号は無次元時間 t に関する微分を意味する。

式(17)の右辺を零とおいた非摂動系の解は

$$\left. \begin{aligned} z &= \sum_{j=1}^4 A_j e^{i(p_j t + \Phi_j)} \\ \theta_z &= \sum_{j=1}^4 x_j A_j e^{i(p_j t + \Phi_j)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

の形で与えられる。 A_j, Φ_j は任意定数で、 p_j は次式

$$\begin{vmatrix} 1-p^2 & \gamma \\ \gamma & \delta + I_p\omega p - Ip^2 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

の p の根である。 x_j は $p=p_j$ に対する振幅比であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x_j &= -(1-p_j^2)/\gamma \\ &= -\gamma/(\delta + I_p\omega p_j - Ip_j^2) \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

$\omega \neq 0$ に対して一般に、

$$\left. \begin{aligned} p_1 > 1 > p_2 > 0 > p_3 > -1 > p_4 \\ p_1 > |p_4|, \quad p_2 > |p_3| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

が成り立つ。

式(17)において、軸のねじれ角 θ_i は $\theta_i\theta_z, \theta_i z$ のように座標の2次の微小量として現れている。したがって、 z, θ_z に対する解を求めるにあたって、ねじれ角 θ_i は1次の微小量の精度で与えられていれば十分である。式(14)、(15)を式(12)に代入し、2次の微小量を無視すると、

$$\delta_i\theta_i = -I_p\dot{\omega} - c_3\omega \dots\dots\dots (22)$$

となる。

このあと、駆動端 A の角加速度は一定であると仮定する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\Theta}_a &= \lambda = \text{一定} \\ \dot{\Theta}_a &= \lambda t + \omega_{a0} \\ \Theta_a &= \lambda t^2/2 + \omega_{a0}t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

である。式(13)、(22)、(23)および $\theta_i = \Theta - \Theta_a$ の関係から、 θ_i に関する微分方程式が得られ、その特解を求めると、

$$\theta_i = -\frac{c_3\lambda}{\delta_i}t - \frac{1}{\delta_i}(I_p\lambda + c_3\omega_{a0}) \dots\dots\dots (24)$$

となる。このとき、 $\Theta, \omega = \dot{\Theta}, \dot{\omega} = \ddot{\Theta}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \lambda t^2/2 + (\omega_{a0} - c_3\lambda/\delta_i)t + \Theta_0 \\ \omega &= \lambda t + \omega_{a0} - c_3\lambda/\delta_i \\ \dot{\omega} &= \lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここに、

$$\Theta_0 = -(I_p\lambda + c_3\omega_{a0})/\delta_i \dots\dots\dots (26)$$

である。

ここで、正の小さいパラメータ ε およびゆるやかな時間

$$\tau = \varepsilon t \dots\dots\dots (27)$$

を導入し、 $\lambda, e_0, \tau_0, c_1, c_2, c_3$ は ε と同程度の微小量とする。 p_j, x_j は ω の関数であるので、

$$\dot{p}_j = \lambda \frac{dp_j}{d\omega}, \quad \dot{x}_j = \lambda \frac{dx_j}{d\omega} \dots\dots\dots (28)$$

も ε 程度の微小量となる。

回転軸は振動数 p_k の単一周期振動を行うものとし、非共振から共振を含む領域に対する近似解を求めるため、式(17)の解を次の漸近展開の形におく⁽⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} z &= A_k e^{i\psi_k} + \varepsilon z^{(1)}(\tau, A_k, \Theta, \psi_k) + \dots \\ \theta_z &= x_k A_k e^{i\psi_k} + \varepsilon \theta_z^{(1)}(\tau, A_k, \Theta, \psi_k) + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ここに、

$$\psi_k = \Theta + \Phi_k \dots\dots\dots (30)$$

であり、 A_k, Φ_k は次式で定められる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_k &= \varepsilon R_k^{(1)}(\tau, A_k, \Phi_k) \\ &\quad + \varepsilon^2 R_k^{(2)}(\tau, A_k, \Phi_k) + \dots \\ \dot{\Phi}_k &= p_k(\tau) - \omega(\tau) + \varepsilon S_k^{(1)}(\tau, A_k, \Phi_k) \\ &\quad + \varepsilon^2 S_k^{(2)}(\tau, A_k, \Phi_k) + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ただし、 ω は必ずしも p_k に近い値をとるとは限らないとする。ここでは第1近似解を扱う。式(29)を式(17)に代入し、 ε^1 の係数を等置すると、次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \omega^2 \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \Theta^2} + 2p_k \omega \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \Theta \partial \Psi_k} + p_k^2 \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \Psi_k^2} \\ & + z^{(1)} + \gamma \theta_z^{(1)} = h_{xz} e^{i\Psi_k} \\ & I \left(\omega^2 \frac{\partial^2 \theta_z^{(1)}}{\partial \Theta^2} + 2p_k \omega \frac{\partial^2 \theta_z^{(1)}}{\partial \Theta \partial \Psi_k} + p_k^2 \frac{\partial^2 \theta_z^{(1)}}{\partial \Psi_k^2} \right) \\ & - iI_p \omega \left(\omega \frac{\partial \theta_z^{(1)}}{\partial \Theta} + p_k \frac{\partial \theta_z^{(1)}}{\partial \Psi_k} \right) \\ & + \delta \theta_z^{(1)} + \gamma z^{(1)} = h_{\theta z} e^{i\Psi_k} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} h_{xz} &= 2p_k S_k^{(1)} - (p_k - \omega) \frac{\partial R_k^{(1)}}{\partial \Phi_k} + \frac{e_0}{\varepsilon} \omega^2 e^{i(\beta - \Phi_k)} \\ & - i \left[2p_k R_k^{(1)} + (p_k - \omega) A_k \frac{\partial S_k^{(1)}}{\partial \Phi_k} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{c_1}{\varepsilon} p_k + \frac{\delta_t \theta_t}{\varepsilon} x_k + \frac{dp_k}{d\tau} \right\} A_k \right] \\ h_{\theta z} &= (2I p_k - I_p \omega) x_k A_k S_k^{(1)} \\ & - I x_k (p_k - \omega) \frac{\partial R_k^{(1)}}{\partial \Phi_k} + \frac{\tau_0}{\varepsilon} (I - I_p) \omega^2 e^{-i\Phi_k} \\ & - i \left[(2I p_k - I_p \omega) x_k R_k^{(1)} \right. \\ & \left. + I x_k A_k (p_k - \omega) \frac{\partial S_k^{(1)}}{\partial \Phi_k} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{c_2}{\varepsilon} x_k p_k + \frac{\delta_t \theta_t}{2\varepsilon} (x_k - 2) \right. \right. \\ & \left. \left. + (2I p_k - I_p \omega) \frac{dx_k}{d\tau} + I x_k \frac{dp_k}{d\tau} \right\} A_k \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (33)$$

式(32)において、 $z^{(1)}$ 、 $\theta_z^{(1)}$ の解が永年項を持たないための条件は

$$h_{xz} + x_k h_{\theta z} = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

で与えられる。式(34)を $R_k^{(1)}$ 、 $S_k^{(1)}$ について解き、これを式(31)に代入すれば、次の第1近似解を得る。

$$\left. \begin{aligned} z &= A_k e^{i\Psi_k} \\ \theta_z &= x_k A_k e^{i\Psi_k} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_k &= -\zeta_k A_k + \mu_k \sin(\Phi_k - \beta) + \nu_k \sin \Phi_k \\ \dot{\Phi}_k &= p_k - \omega + \frac{\mu_k}{A_k} \cos(\Phi_k - \beta) + \frac{\nu_k}{A_k} \cos \Phi_k \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここに,

$$\zeta_k = \frac{2(c_1 + c_2 x_k^2) p_k - c_3 x_k^2 \omega + \lambda \eta_k}{H_k} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$H_k = 2x_k^2 (2I p_k - I_p \omega) + 4p_k$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= -\frac{e_0 \omega^2}{x_k^2 \{ I(p_k + \omega) - I_p \omega \} + p_k + \omega} \\ \nu_k &= -\frac{\tau_0 (I - I_p) x_k \omega^2}{x_k^2 \{ I(p_k + \omega) - I_p \omega \} + p_k + \omega} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_k &= 2 \left\{ 1 + I x_k^2 + \frac{2p_k x_k}{\gamma} (2I p_k - I_p \omega) \right\} \frac{dp_k}{d\omega} \\ & - I_p x_k^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (39)$$

式(35)、(36)から明らかなように、 ζ_k は、回転軸が

固有角振動数 p_k に近い振動数 Ψ_k でふれまわり振動をするときの減衰係数を表している。

なお、以上の解析結果は第1近似によるものであるので、この近似式に基づく議論は、 λ 、 e_0 、 τ_0 、 c_1 、 c_2 、 c_3 の2次の微小量の誤差を伴う。

5. 減衰特性

5.1 ねじりの減衰係数 c_3 の影響

式(36)から回転軸系の安定条件を求めると、

$$\zeta_k > 0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

となる。式(37)の右辺の中の $2(c_1 + c_2 x_k^2) p_k / H_k$ は、軸がねじりを生じていないときの振動数 p_k のふれまわり振動すなわち基準振動に対する減衰係数であり、常に正となる。したがって、 H_k は p_k と同符号である。このことから、ねじりの減衰係数 c_3 の、回転軸のふれまわり振動に対する物理的効果は明らかである。すなわち、 c_3 は前向き（のふれまわり様式）の振動に対する減衰係数 ζ_k を小さくし、後向き（のふれまわり様式）の振動に対する減衰係数 ζ_k を大きくする。 $\omega \rightarrow \infty$ のとき、 $p_1 \rightarrow (I_p/I)\omega$ 、 $p_2 \rightarrow 1$ 、 $p_3 \rightarrow 0$ 、 $p_4 \rightarrow -1$ となることと、式(19)の関係を考慮すると、 $x_k^2 \omega / H_k$ は、 $k=1, 2, 3, 4$ の場合に対して、それぞれ $1/(2I_p)$ 、 0 、 $-1/(2I_p)$ 、 0 に収束することがわかる。したがって、角速度 ω のかなり大きいところでは、 c_3 は ζ_2 、 ζ_4 にほとんど影響を与えないが、 ζ_1 と ζ_3 に対しては一定の割合で影響する。

特に角速度 ω が一定 ($\lambda=0$) で、 $p_k < 0$ ($k=3, 4$) の場合、減衰係数 ζ_k は常に正であるが、 $p_k > 0$ ($k=1, 2$) の場合は、

$$c_3 > 2(c_1/x_k^2 + c_2) p_k / \omega \quad \dots\dots\dots (41)$$

が成り立つとき、減衰係数 ζ_k が負となり、回転軸系は不安定となる。すなわち、ねじりの減衰係数 c_3 が、たわみ、たわみ角の減衰係数 c_1 、 c_2 に比べて大きい場合には、回転軸系は不安定となる可能性があることがわかる。

以下に、 p_2 のふれまわり振動を例にとりて数値計算を行って見た結果を示す。

図3は、回転軸の角速度 ω が一定の時のねじり振動の減衰係数 c_3 がふれまわり振動の減衰係数 ζ_2 に及ぼす影響を調べたものである。 c_3 が約0.002以下の値に対しては、減衰係数 ζ_2 は常に正であるが、 $c_3=0.003$ のときには、 ω がおよそ0.6から4.1の範囲において負となる。すなわち、不安定領域が存在する。

図4に式(40)から求めた不安定領域を示す。安定と不安定の境界線は $\omega=1.7$ 付近で極小値をとり、この付近で最も不安定となりやすいことがわかる。

静不釣合い $e_0=0$, 動不釣合い $\tau_0=0$ として, 運動方程式(11)を直接数値積分してみたところ, 図5のような振動波形が得られた。これは, 図4の不安定な領域 ($c_3=0.005$) における結果であって, 固有角振動数 p_2 (≈ 0.584) に近い振動数の不安定振動が発生している。なお, 図には示していないが, $c_3=0$ の場合は自由減衰振動の波形が得られた。

ねじりの減衰係数 c_3 を大きくすると減衰係数 ζ_2 が小さくなることから予想されることであるが, 角速度 ω が一定の時の静不釣合い e_0 と動不釣合い τ_0 による強制振動は c_3 の増加に伴い大きくなることが確かめられる。図6は, 式(36)において $A_2=\phi_2=0$ において得られる定常解に対する拡大率 $M_f=A_2/e_0$ を示したものである。ここで $e_0=\tau_0$ とした。拡大率 M_f は, 特に

共振点近傍で c_3 の増加とともに大きくなっている。

5.2 角加速度 λ の影響 式(37)の $\lambda\eta_k/H_k$ は増速中 ($\lambda>0$) であるか減速中 ($\lambda<0$) であるかによって符号が異なり, 減衰係数 ζ_k の大きさに影響する。 η_k/H_k の符号については数値計算をする以外わからないが, η_k/H_k は, 角速度 ω の増加とともに零に収束するので, 角速度 ω の大きいところでは, ζ_k は角加速度 λ の影響をほとんど受けないことがわかる。 η_k は角速度 ω が変化することによる固有角振動数の変化 $dp_k/d\omega$ にも依存しているため, λ の減衰係数 ζ_k に及ぼす物理的效果は c_3 のそれとは定性的に異なる可能性がある。

図7は, 角加速度 λ の減衰係数 ζ_2 に及ぼす影響を調べたものである。角速度 ω の低いところほど λ の影

図3 ねじり振動の減衰係数 c_3 がふれまわり振動の減衰係数 ζ_2 に与える影響

図4 不安定領域

図5 数値積分によって得られた振動波形

図6 ねじり振動の減衰係数 c_3 が不釣合いによる強制振動の振幅に与える影響 (共振点 $\omega=p_2$ 付近)

($I=0.136$, $I_p=0.271$, $\delta=1/3$,
 $\gamma=-1/2$, $c_1=c_2=c_3=0.001$)

図7 角加速度 λ がふれまわり振動の減衰係数 ζ_2 に与える影響

響が大きく現れ、 λ の増加に伴って、減衰係数 ζ_2 は小さくなる。 $\lambda=0.01$ の場合には、 ω が約1.6以下に対して ζ_2 は負となり、回転軸系は不安定となることがわかる。式(37)によると、 ζ_2 （一般に ζ_k も）は λ の1次関数で与えられるので、 λ の負の値に対しては、その絶対値の増加と共に減衰係数 ζ_2 は大きくなる。なお、 $\omega \rightarrow \infty$ に対して、 ζ_2 は $c_1/2=0.0005$ に収束する。

図7の数値計算結果は、一般的な減衰特性を表しているのではなく、種々のパラメータについて式(37)の λ の係数 η_k/H_k を数値計算してみると、 η_k/H_k は、振動モードの違い(k の値)により、また系のパラメータにより、大きさはもちろん、符号も異なることがわかる。したがって、例えば角加速度 λ を増加させたとき、系のパラメータによっては ζ_k が大きくなる場合もあれば小さくなる場合もある。

6. 結 論

(1) 回転軸が曲げと同時にねじりのひずみを伴ってふれまわり振動をしているとき、固有角振動数 p_k でふれまわる振動の減衰係数 ζ_k ($k=1, 2, 3, 4$)は、軸のたわみ、たわみ角、ねじれ角の2次の微小量の精度で導かれた運動方程式を考察することにより正しく見積ることができる。

(2) 減衰係数 ζ_k は、ねじりの減衰係数 c_3 によって大きさが異なる。 c_3 は前向き（のふれまわり振動に対する減衰係数 ζ_k ($k=1, 2$))を小さくし、後向きのそれ ζ_k ($k=3, 4$)を大きくする。特に回転軸の角速度 ω が一定で、 c_3 がある値以上になると、 ζ_k ($k=1, 2$)は負となり、回転軸系は不安定となる。

(3) 角速度 ω のかなり大きいところでは、 c_3 は ζ_2, ζ_4 にほとんど影響を与えないが、 ζ_1 と ζ_3 に対しては一定の割合で影響する。

(4) ねじりの減衰係数 c_3 が不釣合いによる強制振動の振幅に及ぼす影響は、主危険速度付近において顕著に現れ、 c_3 が大きくなるほど振幅は大きくなる。

(5) 減衰係数 ζ_k は、加速時と減速時とで異なり、角加速度が減衰係数 ζ_k に及ぼす影響は角速度の低いところで顕著に現れる。

文 献

- (1) 山本・太田, 機論, 39-209 (1964), 149.
- (2) 山本, 機論, 26-164 (1960), 612.
- (3) Vance, J. M. and Laudadio, F. J., Trans. ASME, J. Eng. Power, 103-2 (1981), 289.
- (4) Bogoliubov, N. and Mitropolsky, Y. (益子訳), 非線型振動論, (1965), 312, 共立出版.
- (5) Love, A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, (1927), 381, Dover Publications.
- (6) 加藤・太田・加藤, 機論, 53-495, C (1987), 2257.