モーダル荷重変換を用いた周波数応答解析*

安井良次^{*1}, 八坂哲雄^{*2}

Modal Frequency Response Analysis Using Modal Load Transformation Method

Yoshitsugu YASUI and Tetsuo YASAKA

In the stress analysis of sinusoidal vibration response under the base excitation, a modal analysis combined with an attached large mass called the large-mass method is widely used. The problems associated with this method are the truncation errors and evaluation of the arbitrary nature of the attached mass. The proposed method employs the modified mode acceleration method considering load equilibrium and the modal transformations. This method has no large arbitrary coefficients of mass and can estimate the excitation reaction force effects. Examined for a simplified spacecraft model, the proposed method needs only 10 modes to achieve satisfactory accuracy; with the conventional method, more than 60 modes are necessary for the same.

Key Words: Vibration, Modal Analysis, Finite Element Method, Base Excitation, Modal Truncation, Mode-Acceleration Method

1. 緒 言

宇宙構造物などは、近年、大形で柔軟な構造となつてゆく傾向にあり、動的な応答解析は設計時に非常に重要になっている。構造の動的挙動を把握するために有限要素法が広く用いられているが、計算機の容量や計算時間には制限があるため、精度のよい効率的な使用方法が必要である。モーダル自由度による解析は、その意味で非常に有効な手段と考えられる。しかし、モーダル自由度に変換すれば、解析自由度を大幅に縮小することができるが、解析自由度としてある限られた自由度を用いるため、モードの打ち切りによる影響を受ける。特に、応答解析では、計算した応力などが実際とはかなり違って見積もられたりする場合がある。そこで、モードの打ち切りによる誤差を補償できる有効な方法が必要となる。さて、振動荷重に対する構造の強度特性を把握するために、一定加速度の正弦波入力による応答解析が実施される。この解析をモーダル自由度で行うモーダル周波数応答解析にはラージマス法と

呼ばれる方法⁽¹⁾が広く用いられている。ラージマス法は簡単で使いやすい方法であるが、付加するラージマスの大きさが任意であることや、前記したような採用モード数による解析結果への影響があるため、それらをあらかじめ解析者の経験などによって決定するか、試行錯誤的にマスの大きさやモードの数を変えて再解析しなくてはならない。モードの打ち切りによる荷重・応力への効果を補償する方法として、加速度モード法⁽²⁾が提案され、解析精度の向上の方法が示されたが、これを変位励振の解析にそのまま用いることはできない。また、自由状態での扱いや減衰行列の取扱いにおいて計算上の問題が残されている。そこで本稿では、モード合成法の変換手法⁽³⁾を応用して、内力の釣合いに着目したモーダル周波数応答解析法を提案する。本方法は、高次モード補正の効果も有するとともに、慣性荷重を正確に算出することができる。また、この方法は同時に、従来のラージマス法におけるマスの大きさの選定のような不確定要素のない周波数応答解析法の改良法として用いることができる。提案する方法の理論を述べ、本方法によって応力や荷重の計算がどのように改善できるかを明らかにする。

* 平成元年10月15日 第67期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成元年2月16日。

^{*1} 正員、日本電信電話(株)無線システム研究所 (〒238-03 横須賀市武1-2356)。

^{*2} 日本電信電話(株)無線システム研究所。

2. 従来の方法

ラージマス法を使うモーダル周波数応答解析では、加振点が一定加速度になるように構造物のいかなる応答に対してもほとんど影響を受けない程度の非常に大きな質量 M を加振点に与え、これを加振する。例えば、図 1 に示す、構造物の質量 M_0 、加振点の質量を M とした 2 質点系の振動を考えてみる。この系の運動方程式は、

$$\begin{bmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} B & -B \\ -B & B \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_b \end{Bmatrix} \quad (1)$$

となる。 s はラプラスの演算子である。

ここで、式 (1) を解くと、

$$F_b = Ms^2 u_b + M_0 s^2 u_a \quad (2)$$

となる。ここで、 u_a の応答値に無関係に u_b に一定加振加速度を得るように、ラージマス M および加振力 F_b を決定する。すなわち、 $M_0/M \approx 0$ となることが必要条件である。

次に、一般には構造は多自由度系であって、式 (1) に相当する運動方程式をモーダル自由度に変換し、ここにモーダル減衰を代入する。

$$[m_i] s^2 \{q_i\} + [b_i] s \{q_i\} + [k_i] \{q_i\} = [f_b]^T \{F\} \quad (3)$$

ここに先ほど決定した $\{F_b\}$ の外力を加えて、式 (3) の応答解析を実施する。

$[m_i]$, $[b_i]$, $[k_i]$ は一般化質量、モーダル減衰、一般化剛性である。

ここで、解析結果の $\{q_i\}$ とモード $[\phi_a]$ から、変位 $\{u_a\}$ を求める。このため、多自由度系の場合、いくつモードを採用するかで解析結果が違ってくる。さらに、式 (1) の固有値解析時に非常に大きな任意のマトリックス成分 M が含まれるため、計算機の打ち切り誤差によって解析精度が劣化する可能性がある。以上のように、ラージマス法は方法としては簡単で使いやすいが、解析精度に留意して用いる必要がある。

図 1 ラージマス法概念

3. モード変換を応用した方法

3.1 拘束モード変換 さてここで、加振点 b を固定点とした拘束モードを用いるモード合成法の変位変換を考える。すなわち、全体を一括解析して得たモードを用いるかわりに、加振点で拘束した弾性モード $[\phi]$ と静的なモード $[G]$ を用いる。

変位変換式は、

$$\begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & G \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ u_b \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $[G] = -[K_{aa}]^{-1}[K_{ab}]$ であり、点 a は加振点以外の点である。

さて、拘束モード変換式を用いた場合、一般の減衰系についての運動方程式は、式 (4) を用いて運動方程式を変換すると、

$$\begin{bmatrix} m_i & M_{ib} \\ M_{bi} & M_{bb} \end{bmatrix} s^2 \begin{Bmatrix} q_i \\ u_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_i & B_{ib} \\ B_{bi} & B_{bb} \end{bmatrix} s \begin{Bmatrix} q_i \\ u_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_i & 0 \\ 0 & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_b \end{Bmatrix} \quad (5)$$

となる。式 (5) の上半分より、

$$\begin{aligned} \{m_i\} s^2 \{q_i\} + [b_i] s \{q_i\} + [k_i] \{q_i\} \\ = -[M_{ib}] s^2 \{u_b\} - [B_{ib}] s \{u_b\} \\ = \{f_i\} \end{aligned} \quad (6)$$

として、ここで右辺を荷重 $\{f_i\}$ と考え、非連成の振動方程式とする。

本方法の利点として、正弦波の加振であることを考えれば、点 b は正弦波運動をするため、加速度 $s^2 \{u_b\}$ と、速度 $s \{u_b\}$ の位相は 90° ずれており、最大加速度を生ずる位相では、加振速度が $[B_{ib}] s \{u_b\} = 0$ となる。そこで、 $s^2 \{u_b\}$ に一定の加速度入力を与えることによって、荷重 $[M_{ib}] s^2 \{u_b\}$ によるモーダル自由度の非連成方程式を解いて応答値 $\{q_i\}$ を求めることとする。この場合、荷重 $\{F_b\}$ との連成がなく、ラージマスおよび物理自由度の減衰行列を与える必要もない。

3.2 モーダル荷重変換による高次モード補正

加速度モード法 (Mode-Acceleration Method)⁽²⁾ はモードの打ち切りの影響を軽減する方法として知られているが、これは内部応力を慣性荷重を含めた外力と静的に釣り合うように求める方法とみなすことができる。そこで、高次モードの加速度・速度への影響は無視し、外力と低次モードの加速度および速度によって加わる力に対して、完全系の剛性を介して力が静的に釣り合うように新たに変位 $\{u\}$ を求めれば、

$$\begin{aligned} [K] \{u\} &= \{F\} - [M] [\phi_i] s^2 \{q_i\} \\ &\quad - [B] [\phi_i] s \{q_i\} \end{aligned} \quad (7)$$

となる。自由状態では $[K]^{-1}$ の扱いに工夫がいる。ま

た、減衰行列 $[B]$ は多くの場合現実的には与えることができないため、現在のところ式(7)の減衰項を無視して解析されている。

この方法は外荷重に対する応答を補正する方法であるが、式(7)の表現が有効な高次モード補正となることに着目し、これを応用した変位(加速度)励振の解析法を提案する。

正弦波加振の運動方程式の変位を、式(4)の弾性モードと静的モードによって書き換える。ここで、変位については、打ち切りのない完全系を用いて、モード加速度・速度による力と釣り合う変位を求める。

$$\begin{bmatrix} M_{aa}\phi_i & M_{aa}G + M_{ab} \\ M_{ba}\phi_i & M_{ba}G + M_{bb} \end{bmatrix} s^2 \begin{Bmatrix} q_i \\ u_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{aa}\phi_i & B_{aa}G + B_{ab} \\ B_{ba}\phi_i & B_{ba}G + B_{bb} \end{bmatrix} s \begin{Bmatrix} q_i \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_b \end{Bmatrix} \quad (8)$$

となる。加振点以外の点では外力が働かないので、 $\{F_a\}=0$ である。式(8)より、

$$\begin{aligned} \{u_a\} = & -[K_{aa}]^{-1}([M_{aa}][G] + [M_{ab}])s^2\{u_b\} \\ & -[K_{aa}]^{-1}([M_{aa}][\phi_i]s^2\{q_i\} + [B_{aa}][\phi_i]s\{q_i\}) \\ & + [G]\{u_b\} \quad (9) \end{aligned}$$

とすることができる。

ここで、完全系の変位のうち弾性モードに関するものは、以下のように低次のモード $[\phi_i](q_i)$ と打ち切った剰余分 $\{u_h\}$ とで構成されると考える。

$$\{u_a\} = [\phi_i](q_i) + \{u_h\} + [G]\{u_b\} \quad (10)$$

式(10)の両辺から $[\phi_i](q_i)$ と $[G]\{u_b\}$ を引くと、打ち切った剰余分の変位は、

$$\begin{aligned} \{u_h\} = & -[K_{aa}]^{-1}([M_{aa}][G] + [M_{ab}])s^2\{u_b\} \\ & -[K_{aa}]^{-1}([M_{aa}][\phi_i]s^2\{q_i\} + [B_{aa}][\phi_i]s\{q_i\}) \\ & + [K_{aa}][\phi_i](q_i) \quad (11) \end{aligned}$$

とすることができる。

また、加えた外力についても、低次モードを励起する成分と高次モードを励起する成分とを分離して考える。低次モードを励起する成分を $\{F_i\}$ 、高次モードを励起する成分を $\{F_h\}$ とすると、

$$\{F\} = \{F_i\} + \{F_h\} \quad (12)$$

であって、低次モードによって励起される内部荷重は、

$$\begin{aligned} \{F_i\} = & [M_{aa}][\phi_i]s^2\{q_i\} + [B_{aa}][\phi_i]s\{q_i\} \\ & + [K_{aa}][\phi_i](q_i) \quad (13) \end{aligned}$$

となる。

また、減衰項も含めてモードの直交性を保証してやれば、荷重をモードごとに分離して、モーダル荷重 $\{f\}$ とすることができる。

$$\begin{Bmatrix} f_i \\ f_h \end{Bmatrix} = [\phi]^T \{F\} \quad (14)$$

$\{f_i\}$ 、 $\{f_h\}$ はそれぞれ、低次と高次のモーダル荷重である。ここで、Hansteen が導いた方法⁽⁴⁾で低次モードによる荷重分布 $\{F_i\}$ を表現する。すなわち、完全系のモーダル質量 $[\phi]^T[M][\phi]=I$ を式(14)の両辺に掛けて、 $[\phi]^T$ を両辺の前から作用させる。その後、 $\{f_h\}=0$ として低次モードの成分のみとしたものを $\{F_i\}$ とすれば、

$$\{F_i\} = [M_{aa}][\phi_i]\{f_i\} \quad (15)$$

となる。

低次モードの荷重分布 $\{F_i\}$ は式(13)の右辺より与えることができるため、式(11)の右辺は、以下のようになることができる。

$$\begin{aligned} \{u_h\} = & -[K_{aa}]^{-1}([M_{aa}][G] + [M_{ab}])s^2\{u_b\} \\ & -[K_{aa}]^{-1}[M_{aa}][\phi_i]\{f_i\} \quad (16) \end{aligned}$$

モーダル荷重 $\{f_i\}$ は式(6)から既知である。式(4)で $[K_{aa}]^{-1}$ が求まっているため、全体の変位は式(10)に、式(6)の非連成の応答解析値と式(16)の代数演算から簡単に与えられ、減衰行列を与える必要もない。

本方法はモーダル荷重を用いて内力の釣合いを満足するように変位を求めるため、Modal Load Transformation Method(M. L. T Method)と呼ぶことにする。

4. 解析モデル

提案した方法を解析モデルに適用する。著者らの対象としているのは衛星搭載用構造物であり、その形状は複雑である。またロケットからの外力の周波数特性も複雑に規定されているため、全体の解析時には無視されそうなローカルなモードによる応力が設計上必要になったりする。そのためモードの打ち切りの影響を補償する方法が重要となっている⁽⁵⁾。ここでは解析方法の比較のためモデルを単純化したものと、搭載用アンテナを用いた解析を示す。単純モデルは図2のような板要素の組合せとローカルなモードを励起させるためのはり要素を与えている。応答解析に用いる採用モード数は10個とする。表1に各モードの固有振動数とモード形状を示す。一方、搭載用アンテナの構造は図3に示すもので、解析モデルは千数百点の節点から成り、100 Hz までの解析周波数範囲のモードをすべて採用して解析を行った。

5. 従来の方法との比較

5.1 マトリックス成分比による誤差 一般のラージマス法では、前記したような解析の不確実性があ

るが、ラージマスが存在することによる固有値解析への影響をまとめて表2に示す。ラージマスの大きさは自重との比を示す。単純モデルに対して実施した例であるが、計算は倍精度演算で行っている。このように、ラージマスの大きさによって高次の固有値に影響がでる。当然ながら、本方法では固有振動数は一意である。ただし、低次のモードに対する演算にはラージマスの大きさは、さほど敏感ではない。

5・2 慣性荷重 剛体モードは、要素内部に応力を生じないことを仮定しているが、加速度運動する物体は質量分布に従って内部応力を生ずるはずである。この効果を考える。物体を非常にゆっくりと加振した場合には、弾性モードは励起されずに、構造物全体が加振点の加速度で追従する剛体加速度運動をする。この加速度によって生ずる内力による変位 $\{u_R\}$ は、

$$\{u_R\} = -[K_{aa}]^{-1}([M_{aa}][G] + [M_{ab}])s^2\{u_b\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

となる。すなわち、加振点の変位に追従する静的な変形モード $[G]$ の加速度モードを用いて、式(7)と同様の手続きで変位を求める。このようにして、剛体変位の慣性力による効果を解析に含むことができる。特に、一定加速度加振における解析の場合、この慣性荷重は

重要となる。提案した方法は式(16)に、この項を含んでいるため、慣性荷重が問題となる解析周波数においても実際に近い応答値が得られる。

5・3 応答関数の比較 従来のラージマス法では、加振点と構造をつなぐ要素の加振方向の力が、図4のようになる。ここで縦軸の要素力は自重に加振加速度をかけた剛体慣性荷重で無次元化してある。

さて、従来の方法において0 Hz近傍の解析を考えると、式(3)のモーダル自由度の質量項と減衰項を無視することができるため、変位は剛性項のみから、

$$\{u_i\} = [\phi_i]\{q_i\} = [\phi_i][k_i^{-1}][\phi_i]^T\{F_b\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

として与えられる。このように、従来の方法においては採用モード数によって0 Hz近傍の応答値が違ってくる。また、剛体運動は、 k_i が零であるためこれには含まれない。

0 Hz近傍を非常に低周波の加速度加振と考えれば、式(18)のような弾性モードの応答の重ね合わせよりも、剛体加速度による変形に等しくなるのが現実的であると考えられる。これについて以下の考察を行う。

本方法において高次補正の変位は、式(16)および式(17)より、

$$\{u_h\} = \{u_R\} - [K_{aa}]^{-1}\{F_i\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

となる。式(11)を0 Hzとして、質量項と減衰項を無視すれば、

$$\{F_i\} = [K_{aa}][\phi_i]\{q_i\} \quad \dots\dots\dots(20)$$

図2 単純FEM解析モデル

図3 衛星搭載アンテナモデル

表1 固有振動数とモード形状

Mode NO	Frequency and Mode Shape		
1 2 3	Rigid Mode	7	2.096418 (Hz)
4	0.929563 (Hz)	8	4.492755 (Hz)
5	1.283399 (Hz)	9	5.248675 (Hz)
6	1.877336 (Hz)	10	10.05864 (Hz)

として応答を求めることになるため、全体の変位は、 $\{u_R\}$ のみとなる。

ここで、本方法による結果を図5に示す。本方法では、モードの採用数にかかわらず、0 Hz 近傍の慣性荷重が正確に求まる。すなわち、0 Hz 近傍において、構造部材に生ずる力は、その自重に加振加速度を乗じた値に等しい値となっている。

次に、その他の周波数領域を比較すると、応答点が共振を起こしてその応答値が大きい場合は、励起されるモードの応答が90°位相がずれた虚数域で卓越して支配的になり、他のモードの影響をあまり受けないため大きな差は生じないが、共振を起こしていない周波数領域での応答波形は、従来の方法と提案した方法はかなり違っている。本解析の採用モード数は10個としたが、解析領域の10 Hz までの応答波形を提案した方法と同程度に改善するためには、従来の方法では、採用モード数を60個以上としなければならなかった。これを比較して図6に示す。実線が提案した方法で10個のモード(静的なモードも含む)を採用したものの、破線

と一点鎖線が従来の方法でそれぞれ60個と30個のモードを採用したものである。

また、実線の搭載アンテナに対して実施した解析結果を図7に示す。これはある構造要素に加わる力であるが、採用モード数を同じにして、従来の方法と提案した方法を比較した。破線が従来の方法であり、実線が提案した方法である。このように従来の方法では、周波数によっては予測される荷重値が相当低く見積もられる。もしこれらの周波数での荷重が設計荷重として採用されれば、実際の加振時にはさらに大きな荷重が発生して、破壊することも考えられる。

従来の方法を用いて、採用モード数を増やして対応することも考えられるが、解析時間がばく大になり、本搭載アンテナモデルにおいては、提案した方法と同程度の精度を得るに必要なモード数での演算は、実際的には不可能であった。

また、単純モデルで求めたのと同様に、搭載アンテナモデルにおける加振反力の解析結果を図8に示しておく。単純モデルで求めたのと同様に、加振反力は周波数が低減するに従って、自重に加振加速度を乗じた剛体加振力に等しい値に収れんしている。

6. 結 言

正弦波加振のモーダル周波数応答解析にモード変換による新しい方法を導入することによって、モードの打ち切りによる影響を補償し、解析の精度を向上することができることを明らかにした。ここで提案した方法は、慣性荷重による効果を厳密に含む解析法であって、加振反力などの計算にも有効である。また、従来のラージマス法のマスの大きさの選定のような不確定要素はなく、解析に起因する誤差の低減が可能となる。さらに、本方法は少ないモード数によっても、共振点以外での応答も正確に算出することができるため、正弦

表 2 固有振動数の比較

Mode NO	Eigenfrequency (Hz)		
	LARGE MASS 10E+11	LARGE MASS 10E+9	UNCOUPLED
1-3	Rigid Mode	Rigid Mode	—
4	0.929563	0.929563	0.929563
23	35.70991	35.70992	35.70992
43	202.3317	202.3318	202.3318
63	977.6905	978.7277	978.7363
83	1503.606	1452.066	1452.077
103	1938.381	2102.632	2098.814
123	2299.215	2521.175	2522.537

図 4 従来法の加振点接合材の部材力

図 5 提案した方法の加振点接合材の部材力

図 6 従来法の採用モード数と提案した方法の比較

図 8 搭載アンテナにおける加振反力

図 7 搭載アンテナの構造部材力の比較

波加振のスイープ試験における加振条件の設定などに有効である。特に大形の衛星搭載構造物は軽量化による限界の強度設計を行っており、解析による応答値に

は正確さが要求されるとともに、ロケットの振動特性には周波数の警戒領域などが存在する場合があります。共振点も含め全周波数領域の応答を把握する必要があります。これらの条件に対して、本方法は有効に利用される。

文 献

- (1) MSC 社編, *MSC/NASTRAN Handbook for Dynamic Analysis*, 3, 5-9, (1983).
- (2) 例えば, Rubin, S. *AIAA J.*, **13**-8(1975), 995.
- (3) Benfield, W. C. ほか 1 名, *AIAA J.*, **9**-7(1971), 1255.
- (4) Hansteen, O. E. ほか 1 名, *Earth. au Eng. Struct. Dyn.*, **7**-5(1979), 405.
- (5) 安井・ほか 1 名, *機論*, **55**-511, C(1989), 517.