指南車の力学的考察*

(かさ歯車式差動歯車機構による指南車)

両角宗晴^{*1}, 岸佐年^{*2}

A Study of the Mechanics of the South-Pointing Chariot (The South-Pointing Chariot with the Bevel Gear Type Differential Gear Train)

Muneharu MOROZUMI and Satoshi KISHI

A study of the mechanics of the South-Pointing Chariot with the bevel gear type differential gear train was conducted. Firstly the pattern of this South-Pointing Chariot is replaced with the combined planetary gear system in which two simple planetary gear trains are connected. Secondly, through theoretical analysis, it is confirmed that power circulation occurs in the system. Thus the principle that fulfills the fundamental function of the South-Pointing Chariot is explained. Thirdly, it is confirmed that this analyzing method could be applied to the mechanical variable-speed drive which uses the combined planetary gear system.

Key Words: Gear, South-Pointing Chariot, Combined Planetary Gear System, Mechanical Variable-Speed Drive

1. 緒言

指南車は司南車とも言われ、その車の台上の人形の向きをあらかじめ南を指すように設定すれば、車がどのように引き回されても人形は常に南を指し続けるという二輪車であり、磁石は用いられておらずすべて歯車などの機械式な機構から成り立っている。

この指南車を今から4600年前の紀元前2600年頃の中国において黄帝が発明しこれを用いて戦を勝利に導いたこと、また紀元前1100年頃に周公が使節のために作ったこと、さらに120年頃に張衡が作ったことなどが中国の古い史書に記されている。しかしこれらは伝説にすぎず証拠も不十分のようである。そして実際に指南車が作られたのは235年の馬鈞によるものが初めてであり、その後、解飛、令狐生、祖冲之、金公立、燕肅、呉徳仁などによる試作が成功しているが、これらは固定軸歯車式指南車であり引き回し方によっては指南車の機能を果たさないこともある。その後1947年にLanchesterが差動歯車式指南車の模型を作りこれが指南車の基本型となり中国、米国、日本でも多くの

学者が模型の試作や運動解析を行っている。そして上述のような技術史的見地からの考察は著者らによって詳述されている^{(1)~(5)}。しかしこれまでの指南車の研究においては、その機構・機能についての力学的考察はなされていない。

本研究ではこの差動歯車式指南車を遊星歯車機構の二つの組合せから成る複合無段遊星歯車装置に置き換え、このことにより左右両車輪からの回転力(入動力)の流れを明らかにして指南車の機能が満足する原理を説明する。そしてこの考察はただ単に歴史的骨董品の分析に留まらず、複合無段遊星歯車装置を用いた無段変速機の研究にも応用できることを示す。

2. 理論解析

2.1 指南車の機能を満たす条件式 図1はLanchester型差動歯車式指南車の基本的な構成を示す骨組図である。この指南車において、車体を手前から紙面裏側に向かって前進し上方から見て時計方向に角度 $\theta (>0)$ だけ施回する場合を考える。車輪PとQとの直径をいずれも D とし、車輪間隔を L 、車体の中央点の旋回半径を r とすれば、車輪Pの回転角 ϕ_P は $\phi_P = (2r/D + L/D)\theta$ となり、したがって歯車A'は反時計方向に次式の ϕ_A' だけ回転する。ただし z_a, z_b, z_c, z_d は

* 平成元年10月28日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 平成元年2月17日。

^{*1} 正員、信州大学工学部 (〒380 長野市若里500)。

^{*2} 正員、長野工業高等専門学校 (〒381 長野市徳間716)。

それぞれ歯車 a, b, c, d の歯数を示す。

$$\phi'_A = -\phi_P \frac{z_a z_c}{z_b z_d} = -\left(\frac{2r}{D} + \frac{L}{D}\right) \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \theta \quad \dots\dots(1)$$

また歯車 Q の回転角 ϕ_Q は $\phi_Q = (2r/D - L/D)\theta$ となり、したがって歯車 C' は次式の ϕ'_C だけ時計方向に回転する。ただし z'_a, z'_b, z'_c, z'_d はそれぞれ歯車 a', b', c', d' の歯数を示す。

$$\phi'_C = \phi_Q \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} = \left(\frac{2r}{D} - \frac{L}{D}\right) \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \theta \quad \dots\dots(2)$$

したがってキャリア S' の回転角 ϕ'_S は次式となる。

$$\begin{aligned} \phi'_S &= \frac{1}{2}(\phi'_A + \phi'_C) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\left(\frac{2r}{D} + \frac{L}{D}\right) \frac{z_a z_c}{z_b z_d} + \left(\frac{2r}{D} - \frac{L}{D}\right) \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \right\} \theta \end{aligned} \quad \dots\dots(3)$$

そして指南車になるための条件は

$$\theta + \phi'_S = 0 \quad \dots\dots(4)$$

であるから式(3)を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{r}{D} \left(-\frac{z_a z_c}{z_b z_d} + \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \right) \theta \\ &+ \frac{L}{2D} \left(-\frac{z_a z_c}{z_b z_d} + \frac{D}{L} \right) \theta \\ &+ \frac{L}{2D} \left(-\frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} + \frac{D}{L} \right) \theta = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(5)$$

したがって次式が同時に成立すればよい。

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_a z_c}{z_b z_d} &= \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \\ \frac{D}{L} &= \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \\ \frac{D}{L} &= \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(6)$$

そこで、もし歯数が $(z_a z_c)/(z_b z_d) = (z'_a z'_c)/(z'_b z'_d) = 1$ ならば

$$D = L \quad \dots\dots(7)$$

とすれば指南車となり得ることがわかる。

いま指南車を旋回させるのに片方の車輪 Q を止めて、車輪 Q と地面との接点を中心として時計方向に旋回させると $\phi'_C = 0$ となり、旋回半径は $r = L/2$ となるから式(3)から次式を得る。

$$\phi'_S = -\frac{L}{D} \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \theta \quad \dots\dots(8)$$

そこでこれを式(4)に代入して次式を得る。

$$\left(1 - \frac{L}{D} \frac{z_a z_c}{z_b z_d}\right) \theta = 0 \quad \dots\dots(9)$$

したがって

$$\frac{D}{L} = \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \quad \dots\dots(10)$$

を得、もし $(z_a z_c)/(z_b z_d) = 1$ ならば $D = L$ とすれば指南車となり、式(7)と同じ条件が得られる。

また車体を直進させる場合を考え、走行距離を l と

すれば車輪 P の回転角 ϕ_P と車輪 Q の回転角 ϕ_Q は $\phi_P = \phi_Q = 2l/D$ となり、したがって歯車 A' の回転角 ϕ'_A は反時計方向に

$$\phi'_A = -\phi_P \frac{z_a z_c}{z_b z_d} = -\frac{2l}{D} \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \quad \dots\dots(11)$$

歯車 C' の回転角 ϕ'_C は時計方向に

$$\phi'_C = \phi_Q \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} = \frac{2l}{D} \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \quad \dots\dots(12)$$

したがってキャリア S' の回転角 ϕ'_S は次式となる。

$$\begin{aligned} \phi'_S &= \frac{1}{2}(\phi'_A + \phi'_C) \\ &= \frac{l}{D} \left(-\frac{z_a z_c}{z_b z_d} + \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots(13)$$

しかるに $(z_a z_c)/(z_b z_d) = (z'_a z'_c)/(z'_b z'_d) = 1$ のときは

$$\phi'_S = 0 \quad \dots\dots(14)$$

となる。つまり直進の時はキャリア S' は回転しないことがわかる。

2・2 指南車における動力の流れ

さて図1に示す指南車を上方からみて時計方向に旋回させる場合、歯車 A' の回転数は歯車 C' の回転数より大であり、しかも A' と C' との回転方向が反対方向であることなどを考慮し、かつかさ歯車を用いた遊星差動歯車機構は外歯車や内歯車を用いた遊星差動歯車機構に置き換えて考えることができるから⁽⁶⁾、図1のかさ歯車を用いた差動歯車式指南車を図2に示すような平歯車や内歯車を用いた遊星歯車機構を二つ連結した複合遊星歯車装置に置き換えることができる。そして要素 I では次式が成立する。ただし $\omega_A, \omega_C, \omega_S$ はそれぞれ歯車 A, C, キャリア S の角速度を示し、また $z_C/z_A = i_0$ であ

図 1 差動歯車式指南車の骨組図

る。

$$\omega_s = \frac{\omega_A + i_o \omega_c}{1 + i_o} \quad (15)$$

また要素IIでは次式が成立する。ただし $\omega'_A, \omega'_C, \omega'_S$ はそれぞれ歯車 A', C', キャリヤ S' の角速度を示し、また $z'_C/z'_A = i_A$ である。

$$\omega'_s = \frac{\omega'_A + i_A \omega'_C}{1 + i_A} \quad (16)$$

いま図2からキャリヤ S が固定だから $\omega_s = 0$ となり、また連結軸の関係から $\omega_A = \omega'_A, \omega_C = \omega'_C$ となるから式(15)より次式を得る。

$$\omega_c = -\frac{1}{i_o} \omega_A = \omega'_c = -\frac{1}{i_o} \omega'_A \quad (17)$$

そしてこれを式(16)に代入して次式を得る。

$$\omega'_s = \frac{i_o - i_A}{i_o(1 + i_A)} \omega_A \quad (18)$$

この場合、要素IIは A' と C' とが駆動軸でキャリヤ S' が従動軸の差動歯車装置である。いまこの要素IIを、歯車 C' を固定し歯車 A' のみの回転によってキャリヤ S' に ω'_{s1} の角速度と N_{01} の出力を伝達する第1成分遊星歯車装置と、歯車 A' を固定し歯車 C' のみの回転によってキャリヤ S' に ω'_{s2} の角速度と N_{02} の出力を伝達する第2成分遊星歯車装置からなると考える。そしてキャリヤ S' への全出力を N_0 、出力トルクを M'_s とすると次式が成立する。

$$\begin{aligned} N_0 &= M'_s \omega'_s = M'_s (\omega'_{s1} + \omega'_{s2}) \\ &= N_{01} + N_{02} \end{aligned} \quad (19)$$

ゆえに次式を得る。

$$M'_s = \frac{N_0}{\omega'_s} = \frac{N_{01}}{\omega'_{s1}} = \frac{N_{02}}{\omega'_{s2}} \quad (20)$$

これより次式を得る。

$$N_{01} = \frac{\omega'_{s1}}{\omega'_s} N_0 \quad (21)$$

$$N_{02} = \frac{\omega'_{s2}}{\omega'_s} N_0 \quad (22)$$

*第1成分遊星歯車装置(C'固定, A'駆動, S'従動)

式(16)において、 $\omega'_C = 0$ において次式を得る。

$$\omega'_{s1} = \frac{1}{1 + i_A} \omega'_A \quad (23)$$

そして式(21)に式(18)と(23)とを代入して次式を得る。

$$N_{01} = \frac{i_o}{i_o - i_A} N_0 \quad (24)$$

*第2成分遊星歯車装置(A'固定, C'駆動, S'従動)

式(16)において $\omega'_A = 0$ において次式を得る。

$$\omega'_{s2} = \frac{i_A}{1 + i_A} \omega'_C \quad (25)$$

そして式(22)に式(17), (18), (25)を代入して次式を得る。

$$N_{02} = -\frac{i_A}{i_o - i_A} N_0 \quad (26)$$

そこで次式を得る。

$$\frac{N_{02}}{N_{01}} = -\frac{i_A}{i_o} < 0 \quad (27)$$

この式(27)から動力循環の生じることがわかる。

図2では $i_o (= z_C/z_A)$ を一定値として考えたが、図1においては r が変化する。いま歯車 A, C の回転角を ϕ_A, ϕ_C で表し式(1)(2)などを用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\omega_A}{\omega_C} (= -i_o) &= \frac{\phi_A}{\phi_C} = \frac{\phi'_A}{\phi'_C} \\ &= -\frac{\left(\frac{2r}{D} + \frac{L}{D}\right) \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \theta}{\left(\frac{2r}{D} - \frac{L}{D}\right) \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \theta} \\ &= -\frac{2r+L}{2r-L} = -\frac{2r+D}{2r-D} \\ \therefore i_o &= \frac{2r+D}{2r-D} = \frac{1 + \frac{D}{2r}}{1 - \frac{D}{2r}} > 1 \end{aligned} \quad (28)$$

すなわち i_o は r の関数であり r の変化に伴って無段階に変化する。そして図1において一定値 r に対しては式(28)によりこの r に対応する i_o が定まり、この i_o に等しい $i_o (= z_C/z_A)$ を有しこの時の図1に等価となるような図2の複合遊星歯車装置を考えたが、図1で r が変化すればそれに対応して変化する $i_o (= z_C/z_A)$ を有する図2が定まり、このようにして次々と r の変化に対応した新しい図2が得られる。そして図1から $i_A = 1$ だから $(i_o - i_A) > 0$ となり、したがって式(24)から $N_{01} > 0$ 、式(26)から $N_{02} < 0$ となる。以上のことからこの複合無段階遊星歯車装置内の動力の流れは図3によって示される。すなわち要素IIの A' を固定した第2成分遊星歯車装置において出力力 ($-N_{02}$) がキャリヤ S' から出力せず逆に S' から C' に入力として入り、この動力が B' → C' → C → B → A

図2 複合遊星歯車装置

→ A' → B' の流れ方で循環することを意味する。そしてこの場合次式が成立する。

$$N_c' = \eta_1(-N_{o2}) \dots\dots\dots (29)$$

ただし η_1 は要素 II において歯車 A' を固定した第 2 成分遊星歯車装置においてキャリア S' を駆動側、歯車 C' を従動側とした時の効率であり次式から求められる⁽⁷⁾。

$$\eta_1 = \frac{\eta_o'(1+i_A)}{1+\eta_o'i_A} \dots\dots\dots (30)$$

η_o' は要素 II の基準効率であり歯車 A' と歯車 B' とのかみ合い効率を η_1' 、歯車 B' と歯車 C' とのかみ合い効率を η_2' として次式で表される。

$$\eta_o' = \eta_1'\eta_2' \dots\dots\dots (31)$$

さて要素 I の歯車 C に流れ込んだ動力 N_c' は歯車 B、歯車 A を経て N_c'' となって要素 II の歯車 A' に流れるが、要素 I のキャリア S は固定されているから次式が成立する。

$$N_c'' = \eta_o N_c' \dots\dots\dots (32)$$

ただし η_o は要素 I の基準効率であり、図 2 において歯車 A と歯車 B とのかみ合い効率を η_1 、歯車 B と歯車 C とのかみ合い効率を η_2 、また図 1 において歯車 a と歯車 b、歯車 c と歯車 d、歯車 a' と歯車 b'、歯車 c' と歯車 d' のかみ合い効率をそれぞれ η_{ab} 、 η_{cd} 、 η_{ab}' 、 η_{cd}' とすれば次式で表される。

$$\eta_o = \eta_1\eta_2 = \eta_{ab}\eta_{cd}\eta_{ab}'\eta_{cd}' \dots\dots\dots (33)$$

以上のことから歯車 A と歯車 A' とを連結する軸にはこの N_c'' と N_i が合流して N_A' となって流れる。すなわち次式が成立する。

$$N_A' = N_i + N_c'' \dots\dots\dots (34)$$

次に要素 II の C' を固定した第 1 成分遊星歯車装置においては、歯車 A' に N_A' が入力として入り、S' から N_{o1} が出力とし出るから次式が成立する。

$$N_{o1} = \eta_{II} N_A' \dots\dots\dots (35)$$

ただし η_{II} は要素 II の歯車 C' を固定した第 1 成分遊星歯車装置において歯車 A' を駆動側とし、キャリア

S' を従動側とした時の効率であり次式が得られている⁽⁷⁾。

$$\eta_{II} = \frac{1+\eta_o'i_A}{1+i_A} \dots\dots\dots (36)$$

そこで式(34)から $N_i = N_A' - N_c''$ を得るから上記の各式を用いて次式を得る。

$$N_i = \frac{(1+i_A)(i_o-\eta_o\eta_o'i_A)}{(i_o-i_A)(1+\eta_o'i_A)} N_o \dots\dots\dots (37)$$

これより図 2 に示す複合無段遊星歯車装置では $i_A=1$ であるから理論効率計算式として次式を得る。

$$\eta = \frac{(i_o-1)(1+\eta_o')}{2(i_o-\eta_o\eta_o')} \dots\dots\dots (38)$$

ただし i_o は式(28)から求められる。以上のことから図 1 に示す指南車を上方から見て時計方向に旋回させる場合は、外観上は左右両車輪から動力が入力しているように観察されるが、実際には車輪 P の回転が車輪 Q より早く回転しているから歯車 A' に動力が入りキャリア S' に出力される。しかしその時、歯車 C' から動力の一部が出力され、これが車輪 Q を経て車輪 P に循環するのである。

いま指南車を旋回させるのに片方の車輪 Q を止めて、その車輪と地面との接点を中心として時計方向に旋回させる時は、 $r=L/2=D/2$ であるから式(28)から $i_o=\infty$ となる。したがって式(24)、(26)から $N_{o1}=N_o$ 、 $N_{o2}=0$ となり、図 3 において循環動力 N_{o2} は零となる。

もし指南車を反時計方向に旋回させる場合は、車輪 Q が車輪 P よりも速く回転して歯車 C' に動力が入り、キャリア S' に出力する。しかしこの時、歯車 A' から動力の一部が出力し車輪 P を経て車輪 Q に動力が循環する。そして効率 η は前述と同じ式となる。

一般に差動歯車機構を用いた車両などが、何の電気・電子的な感知器や制御機器を持たないにもかかわらず、各入力・出力軸の回転数を適度な値に割り振ることができるのは、上述のような動力の流れを考察することによって説明できることがわかった。

2.3 指南車と複合無段遊星歯車装置との関係

図 4 は歯車 A'、B'、C' とキャリア S' から成る 2K-H 形差動歯車機構と変速ベルト車機構とを結合した閉路式複合無段遊星歯車装置（無段変速機）である。この場合、軸 a からの入力（回転数 n_i ）を変速プーリ D_1 、 D_2 とベルト V とにより連続的な任意の回転数 n_s に変速させて軸 S' から出力させる。しかしこの種の無段変速機的设计において効率および動力の流れとその伝達量の大きさを的確に定めるための理論解析はなされていない。

図 3 装置内の動力の循環