多点加振による構造物のモード解析*
(第1報, 加振機の駆動信号を用いた周波数応答関数の推定法)

成田正夫*¹, 山崎芳昭*¹, 小泉孝之*¹

Modal Analysis Based on Multiple Input Testing
(1st Report: Frequency Response Function Estimates Using Drive Signals for Exciters)

Masao NARITA, Yoshiaki YAMAZAKI and Takayuki KOIZUMI

This paper discusses a methodology for estimating frequency response functions of structures. Firstly, causes of random errors associated with the frequency response function estimates are analyzed. Secondly, a method for improving the accuracy of the estimates is proposed. Finally, that technique is verified experimentally by multiple input testing for an actual structure. Consequently, the following results are obtained. A linear dependence between the input forces at the natural frequencies of the test structure increases the confidence intervals of the estimates. However, that estimating problem is improved by the proposed method in which the drive signals for exciters are considered to be the inputs for the testing system and both of the exciting forces and the response displacements are considered to be the outputs of the testing system.

Key Words: Vibration, Modal Analysis, Frequency Response Function, Multiple Inputs, Finite Element Method, Coherence Function.

1. 緒 言

大型衛星, 宇宙基地などの柔軟複合構造物の最適構造の開発や制御系の開発には, プロトタイプの実験に基づいた精度の高い構造モデルの同定が必要である。このためには, 加振実験によって正確な構造系の周波数応答関数を取得する技術が要求される。

加振試験による構造物の周波数応答関数の推定手段として, Allemangらは多点加振に基づく方法を提唱している。この方法は, 構造物の複数箇所を同時に加振し, 構造に入力される加振力と構造の代表点で計測される振動応答出力とを計測して, これら2種の信号から構造系の周波数応答関数を推定する。この方法によると, 一般に広く行われている打撃加振あるいは単点のランダム波加振による1点加振法と比較し, 構造全体にわたって一貫性があり信頼性の高い周波数応答関数が推定できるとされている⁽¹⁾⁽²⁾

この多点加振に基づく周波数応答関数推定法では, 供試構造に入力される, 複数の加振力が相互に1次独立であることを前提としており, 加振力相互に1次従属関係がある場合, 周波数応答関数の推定精度が損なわれる。そこで, この前提条件を調べる手段として, 加振入力相互の偏関連関数を検査する方法や複数の加振入力のパワースペクトル密度関数行列の固有値分解を行ない, その固有値の大きさを検査する方法が提案されている⁽³⁾。

しかし, 実構造の多点加振では, 加振機の駆動信号として相互に無相関のランダム信号を用いた場合でも, 加振力相互に1次従属関係が生じ周波数応答関数の推定精度が低下するという現象が起こることがわかった。さらに, この現象は構造系の固有値の近傍において発生するため, 周波数応答関数を曲線適合し, モードベクトルを同定する場合に深刻な問題となり得る。

本報では, まず, 多点加振において加振力相互に1次従属関係が生じる原因を明らかにする。つぎに, このような場合においても精度の低下しない新たな周波数応答関数推定手法を提案する。さらに, 以上2項目を多点加振試験により検証する。

* 平成元年10月15日 第67期全国大会講演会において講演, 原稿受付 昭和63年11月1日。

*¹ 正員, 三菱電機(株)中央研究所 (〒661 尼崎市塚口本町8-1-1)。

2. 理 論

2・1 周波数応答関数の信頼区間 供試構造に n 個の加振機をとりつけて加振力 $q_i(t) (i=1, \dots, n)$ を加え、加振点と同一点で応答変位 $u_i(t) (i=1, \dots, n)$ を計測する場合を考える。この供試構造の加振力と応答変位との間の周波数応答関数行列 $H_o(f)$ は次式を解くことによって推定できる。(4)

$$H_o(f) \hat{G}_{qq}(f) = \hat{G}_{qu}(f) \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで、

$$\hat{H}_o(f) = \begin{bmatrix} \hat{H}_{o11}(f) & \dots & \hat{H}_{o1n}(f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{H}_{on1}(f) & \dots & \hat{H}_{onn}(f) \end{bmatrix}$$

$H_{oij}(f)$ は加振力 $q_j(t)$ と応答変位 $u_i(t)$ との間の周波数応答関数、 $\hat{G}_{qq}(f)$ は加振力同士のパワースペクトル密度関数行列、 $\hat{G}_{qu}(f)$ は加振力と応答変位とのパワースペクトル密度関数行列、記号 $\hat{\cdot}$ は推定値を表す

標準誤差のみに着目した場合、式 (1) に基づいて得られる推定の信頼区間は次式で表される (5)(6)

$$|\hat{H}_{oij}(f) - H_{oij}(f)| \leq r_{ij}(f),$$

$$\hat{r}_{ij}^2(f) = \frac{2n}{n_d - 2n} (F_{n_1, n_2; \alpha}) \frac{|1 - \hat{\gamma}_{u_i, q}^2(f)| \hat{G}_{u_i u_i}(f)}{|1 - \hat{\gamma}_{q_j, q_j}^2(f)| \hat{G}_{q_j q_j}(f)} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 $\hat{r}_{ij}(f)$ は $\hat{H}_{oij}(f)$ の信頼区間、 n_d はパワースペクトルの推定の自由度、 $F_{n_1, n_2; \alpha}$ は自由度 $n_1 = 2n$ と自由度 $n_2 = 2n - n_d$ の F 分布の 100α 百分比点、 $\hat{\gamma}_{u_i, q}^2(f)$ は i 点の応答変位と全ての加振力との多重関連速度関数 $\hat{\gamma}_{q_j, q_j}^2(f)$ は j 点の加振力とその他の全ての加振力との多重関連速度関数である。式 (2) において右辺の $\hat{G}_{u_i u_i}(f) / \hat{G}_{q_j q_j}(f)$ は周波数応答関数のゲインの2乗 $|\hat{H}_{oij}(f)|^2$ に他ならないので、周波数応答関数の推定値の信頼区間はゲインと比例関係にある。また、入力相互の線形関係が強く入力の多重関連速度関数 $\hat{\gamma}_{q_j, q_j}^2(f)$ が1に近づく場合、および、入力と出力との線形関係が弱く入力と出力との多重関連速度関数 $\hat{\gamma}_{u_i, q}^2(f)$ が0に近づく場合に周波数応答関数の推定値の信頼区間が増大することがわかる。

2・2 加振力相互の相関性 多点加振実験システムを次の3つの系にわけて考える。

(1) 加振機の信号増幅器への駆動信号を入力とし加振機可動部に作用する駆動力を出力とする、駆動力変換系。

(2) 加振機を供試構造に対する付加構造と考え、加振機可動部に作用する駆動力を入力とし加振機可動部

の変位を出力とする、加振機に関する構造系。

(3) 加振力を入力とし応答変位を出力とする、計測対象の供試構造系。

なお、上記各システムは線形であると仮定する。

多点加振実験では、加振機の可動部に駆動力が加えられ、この可動部と供試構造との間で発生する力が加振力として計測されるので、各信号間について以下に述べる関係が成立する。

まず、駆動力変換系に関し、駆動信号を $s_i(t) (i=1, \dots, n)$ 、駆動力を $p_i(t) (i=1, \dots, n)$ 、 $s_i(t)$ を入力とし $p_i(t)$ を出力とする周波数応答関数を $H_e(f) (i=1, \dots, n)$ とすると次式が得られる。

$$P(f) = H_e(f) S(f) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで、 $S(f) = \{S_1(f) \dots S_n(f)\}^T$ 、 $P(f) = \{P_1(f) \dots P_n(f)\}^T$ 、 $H_e(f) = \text{diag}[H_{e1}(f) \dots H_{en}(f)]$ 、 $P_i(f)$ は $p_i(t)$ のフーリエ変換、 $S_i(f)$ は $s_i(t)$ のフーリエ変換である。

また、構造系としての加振機の挙動について、応答変位 $u_i(f) (i=1, \dots, n)$ を入力とし、加振機可動部への駆動力と加振機可動部と供試構造との間で発生する力との和 $p_i(t) + q_i(t) (i=1, \dots, n)$ を出力とする周波数応答関数を $H_k^{-1}(f) (i=1, \dots, n)$ とすると、次式が得られる。

$$P(f) + Q(f) = H_k^{-1}(f) U(f) \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 $Q(f) = \{Q_1(f) \dots Q_n(f)\}^T$ 、 $U(f) = \{U_1(f) \dots U_n(f)\}^T$ 、 $H_k^{-1}(f) = \text{diag}[H_{k1}^{-1}(f) \dots H_{kn}^{-1}(f)]$ 、 $Q_i(f)$ は $q_i(t)$ のフーリエ変換、 $U_i(f)$ は $u_i(t)$ のフーリエ変換である。

また、供試構造系に関し、次式が得られる。

$$U(f) = H_o(f) Q(f) \quad \dots\dots\dots(5)$$

以上の関係は図1に示すブロック図で表される。

つぎに、加振力相互の性質を調べるために、式 (3)、(4)、(5) から $P(f)$ と $U(f)$ とを消去し次式を得る。

図1 多点加振実験システム

$$H_s(f)S(f) = [H_k^{-1}(f)H_o(f) - I]Q(f) \quad \text{.....(6)}$$

式 (6)において、 $H_k(f)$ および $H_k^{-1}(f)$ は対角行列である。したがって、駆動信号 $S(f)$ が相互に無相関、すなわち 1 次独立であっても、 $H_k^{-1}(f)H_o(f) - I$ が単位行列でない限り加振力の間には相関、すなわち 1 次従属関係が生じる。言い換えれば、加振力相互の相関性は行列 $H_o(f)$ の非対角要素の大きさに依存しており、これが極大となる供試構造の固有値において、加振力相互間には強い相関が生じる。

2. 3 駆動信号を用いた周波数応答関数の推定
加振力を入力として使用しない周波数応答関数の推定法を以下に提案する。供試構造の周波数応答関数は、駆動信号から応答変位までの経路と駆動信号から加振力までの経路との 2 種の周波数応答関数を用いて表現することができる。すなわち、

$$H_o(f)H_q(f) = H_u(f) \quad \text{.....(7)}$$

ここで、記号 $H_q(f)$ は、この方法による新たな推定値を表す。また、 $H_q(f)$ は駆動信号を入力とし加振力を出力とする周波数応答関数、 $H_o(f)$ は駆動信号を入力とし応答変位を出力とする周波数応答関数であり、それぞれ、次式によって得られる。

$$H_q(f)G_{ss}(f) = G_{sq}(f) \quad \text{.....(8)}$$

$$H_u(f)G_{ss}(f) = G_{su}(f) \quad \text{.....(9)}$$

ここで、 $G_{ss}(f)$ 、 $G_{sq}(f)$ 、および、 $G_{su}(f)$ は、それぞれ、駆動信号と駆動信号、駆動信号と加振力、および、駆動信号と応答変位とのパワースペクトル密度関数行列である。

式 (8) と (9) とによって得られる 2 種の周波数応答関数の推定値の標準誤差を 2.1 節で述べた方法で評価する。まず、多点加振実験システムは線形であるから、入力 $S(f)$ と出力 $Q(f)$ または $U(f)$ との間の多重関連関数はそれぞれ 1 に近い値となる。また、各入力信号に相互に無相関の信号を用いれば入力信号同志の多重関連関数は 0 に近づく。したがって、以上 2 種の周波数応答関数推定に関し、標準誤差を増大させる原因のうち 2 つが取り除かれたことになる。

さらに、周波数応答関数の推定値の信頼区間は周波数応答関数のゲインに比例するので、以上 2 種の周波数応答関数のゲインが極大となる周波数と、目的とする供試構造系の周波数応答関数の固有値との関係を調べる。式 (3)、(4)、および、(5) に基づいて、 $H_q(f)$

および $H_u(f)$ は次式で表される。

$$H_q(f) = [H_k^{-1}(f)H_o(f) - I]^{-1}H_o(f) \quad \text{.....(10)}$$

$$H_u(f) = [H_k^{-1}(f) - H_o^{-1}(f)]^{-1}H_o(f) \quad \text{.....(11)}$$

式 (10) と (11) によると、行列 $H_q(f)$ および $H_u(f)$ の各要素のゲインが最大となる周波数は、供試構造系の固有値とは異なっていることがわかる。

以上述べた理由により、式 (7)、(8)、および、(9) に基づく周波数応答関数推定法によれば、加振力を入力として扱う周波数応答関数推定法と異なり、少くとも供試構造の固有値近傍で推定精度が低下することがない。

3. 実験

多点加振実験によって、加振力相互の間に 1 次従属関係が生じ、推定精度が低下する現象を確認する。また、以上で提案した駆動信号を入力とする周波数応答関数推定手法の優位性を検証する。

3. 1 実験の概要 実験の概要を図 2 に示す。供試構造は大型の柔軟パドルを有する人工衛星を模擬したものである。供試構造中央部の衛星構体に相当する部分を懸吊し、供試構造の中央付近と先端部との 2 箇所を加振する。

加振機駆動信号の生成と計測信号の処理には計算機を用いる。加振機駆動信号は最大値と最小値との間で均一の頻度を有し信号相互間に相関のないランダム波を使用する。加振力は圧電形ロードセルで取得し、応答変位は圧電形加速度計を用いて加速度信号として取得する。これらの信号はアンチエイリアジングのための低域通過フィルタを通して A/D 変換を行なう。

なお、以下に述べる関連度関数、パワースペクトル密

図2 実験の概要

度関数、および、周波数応答関数それぞれの推定において、サンプリング周波数を 100[Hz]、標本の長さを 10.24[sec]、標本平均の数を 10とした。

3・2 関連度関数 まず、この多点加振実験系が線形であることを確認するために、加振機の駆動信号と応答変位信号との間の多重関連度関数を推定し、これが着目する周波数範囲において 1 に近いことを確認する。つぎに、複数の加振機駆動信号が 1 次独立であることを確認するために、加振機駆動信号の間の関連度関数を推定し、これが 0 に近いことを確認する。さらに、加振機駆動信号が 1 次独立であっても、供試構造の固有値において加振力信号に相関が生ずることを検証するために、加振力信号同志の関連度関数を推定し、これが供試構造の固有値近傍の周波数において 1 に近づくことを確認する。

3・3 周波数応答関数と信頼区間 まず、従来の推定法、すなわち、加振力と応答変位に基づいた推定法により、周波数応答関数を推定する。また、この周波数応答関数の 95% 信頼区間を、F 分布表、多重関連度関数、および、パワースペクトル密度関数を用いて求める。さらに、この信頼区間の大きさと周波数応答関数の推定値のゲインの大きさとを比較し、供試構造の固有値の近傍周波数における推定精度が許容できるかを調べる。

つぎに、本報で提案する推定法、すなわち、加振機駆動信号に基づく推定法により周波数応答関数を推定する。また、この周波数応答関数の推定値、上述の従来法による周波数応答関数の推定値、および、その信頼区間の三者の関係を調べ、駆動信号に基づく推定法が妥当なものであることを確かめる。

3・4 モードベクトルの比較 有限要素解析によって得られるモードベクトルと加振実験によって得られるモードベクトルとを比較し、駆動信号に基づく推定法の優位性を検証する。まず、供試構造の有限要素モデルを作成し、固有値解析を行なう。ここで得られた固有値と実験で得られた固有値とを比較し、有限要素モデルの妥当性を確認する。つぎに、有限要素法で得られた固有モードベクトルを参照ベクトルとして、各周波数応答関数推定法によって得られたモードベクトルの関連度を算出する。なお、モードベクトル間の関連度 γ^2 を次式で定義する。

$$\gamma^2 = (\phi_{re} \cdot \phi_{an}^h)^2 / (|\phi_{re}| |\phi_{an}|)^2 \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここで、列ベクトル ϕ_{re} および ϕ_{an} はそれぞれ参照する固有ベクトルおよび解析対象の固有ベクトルであり、

記号 $|\cdot|$ はベクトルのノルムを表し、 h はエルミート変換を表す。

なお、上記有限要素解析では、供試構造に 31 個の節点を設定し、梁要素によるモデリングを行なった。

4. 考 察

4・1 加振力相互の相関性と推定精度の低下

まず、応答変位 $u_1(t)$ と駆動信号 $s_1(t)$, $s_2(t)$ との間の多重関連度関数を図 3 に示す。この多重関連度関数は全周波数範囲にわたって 1 に近い値を示しており、駆動信号と応答変位の間に線形関係があることを表している。本報で提案した周波数応答関数推定法は、供試構造系のみならず加振機を含めた全系の線形性を前提としているので、以上の線形関係はこの推定方法を適用する場合の前提条件が満たされていることを意味する。

つぎに、加振機駆動信号、 $s_1(t)$ と $s_2(t)$ との間の関連度関数を図 4 に示す。この関連度関数は全周波数範囲にわたって 1 より十分小さいことがわかる。また、加振力、 $q_1(t)$ と $q_2(t)$ との間の関連度関数を図 5 に示す。この関連度関数は、特定の周波数においてのみ 1 に近い値を呈しており、これらの周波数は後述の表 1 に示す供試構造の固有値と一致している。以上 2 つの関連度関数は信号間の線形関係を表すから、加振機駆動信号が 1 次独立であっても、加振信号の相互は 1 次従属となること、また、この 1 次従属関係が現れる周波数は供試構造の固有値と一致することが確認される。

つぎに、加振力を入力とした従来の方法で推定した周波数応答関数、および、その 95% 信頼区間を図 6 に示す。この信頼区間は、供試構造の固有値において著しく増加しており、さらに、固有値における周波数応答関数の推定値のゲインと信頼区間の大きさととはほぼ等しい値を示している。したがって、供試構造の固有値において極端な推定精度の低下が起こっており、この周波数応答関数を曲線適合してモードベクトルを同

図 3 応答変位と駆動信号との多重関連度関数

図4 駆動信号相互の関連度関数

図5 加振力相互の関連度関数

図6 加振力に基づく周波数応答関数の推定値とその95%信頼区間

図7 駆動信号に基づく周波数応答関数の推定値と真の周波数応答関数のとり得る範囲

定する場合、正確な同定は期待できない。

4・2 駆動信号に基づく推定法の妥当性 駆動信号に基づく周波数応答関数の推定値と周波数応答関数の真の値のとり得る範囲とを図7に示す。周波数応答関数の真の値 $H_{o11}(f)$ のとり得る範囲は、従来の方法で得た周波数応答関数の推定値 $\hat{H}_{o11}(f)$ とその信頼区間 $r_{11}(f)$ に基づき、

$|\hat{H}_{o11}(f)| - \hat{r}_{11}(f) \leq |H_{o11}(f)| \leq |\hat{H}_{o11}(f)| + \hat{r}_{11}(f)$ と定まる。駆動信号に基づく周波数応答関数の推定精度が従来法による推定精度に対して向上している場合、少くとも前者による推定値 $\hat{H}_{o11}(f)$ は上記範囲内になければならない。図7によると、以上述べた関係が満足されていることが確認できる。

つぎに、従来の推定法から得られるモードベクトル、および、駆動信号に基づく推定法から得られるモードベクトルと、有限要素法で得られる固有モードベクトルとの比較を行なう。

まず、加振実験による周波数応答関数の推定値から求めた固有値と有限要素法で求めた固有値とを表1に示す。これによると、有限要素法で得られた固有値は実験値と一致しており、有限要素モデルの妥当性が確認できる。

つぎに、有限要素法で得られる固有モードベクトルを参照ベクトルとした場合のモードベクトルの関連度を表2に示す。表2において、同一モード間の関連度すなわち、太字の値に着目すると、加振力を入力とする推定法に基づいて得られたモードベクトルと有限要素法で得られた固有ベクトルとの関連度は0.411から0.960の値をとるのに対し、駆動信号を入力とする推定法に基づいて得られたモードベクトルと有限要素法で得られた固有ベクトルとの関連度は全てのモードについて0.9以上の値をとる。

表1 固有振動数

Mode number	Eigen Frequencies Hz		
	Based on force signals	Based on drive signals	FEM
1	3.16	3.11	3.11
2	6.32	6.29	6.40
3	15.7	15.7	16.0
4	17.1	17.1	17.5
5	18.5	18.5	18.2
6	21.2	21.2	20.9

表2 固有ベクトルの関連度

Analysis mode		Reference mode number (FEM)					
Method	Mode number	1	2	3	4	5	6
Based on force signals	1	.562	.033	.017	.068	.114	.006
	2	.0	.960	.002	.0	.0	.0
	3	.0	.035	.860	.0	.0	.028
	4	.032	.0	.0	.484	.009	.0
	5	.181	.0	.0	.017	.411	.0
	6	.0	.521	.006	.0	.0	.425
Based on drive signals	1	.917	.007	.0	.001	.091	.0
	2	.004	.992	.0	.0	.0	.256
	3	.0	.0	.998	.0	.0	.0
	4	.001	.0	.0	.991	.007	.0
	5	.049	.0	.0	.007	.987	.0
	6	.0	.214	.001	.0	.001	.995
Finite element method	1	1.0	.0	.0	.0	.075	.0
	2	.0	1.0	.0	.0	.0	.230
	3	.0	.0	1.0	.0	.0	.0
	4	.0	.0	.0	1.0	.0	.0
	5	.075	.0	.0	.0	1.0	.0
	6	.0	.230	.0	.0	.0	1.0

以上の結果から、駆動信号を用いる推定法によると、加振力を入力とする方法と比べ、モードベクトルの同定において顕著な優位性が得られていることがわかる。

5. 結 言

多点加振に基づく周波数応答関数の推定に関し、供試構造と加振機が相互に影響することによって推定精度の低下が生じることを明らかにし、これを回避する手段として加振機の駆動信号を用いた推定法を提案した。さらに、人工衛星構造モデルの多点加振実験によって以上を検証した。その結果、以下の結論を得た。

(1) 加振力を入力として扱った従来の周波数応答関数推定法では、供試構造の固有振動数において、複数の加振力相互間に1次従属関係が生じる現象が起こり、以上の固有振動数の近傍周波数において周波数応答関

数の推定精度が低下する。

(2) これに対し、加振機の駆動信号を用いた周波数応答関数推定法によると供試構造の固有振動数の近傍周波数においても周波数応答関数の推定精度が低下することがなく、モードベクトル間の関連度を評価の指標として以上2つの推定法を比較した結果、後者の優位性が確められた。

文 献

- (1) Allemang, R. J. 他, SEA Paper No.820193, 1982, 25pp.
- (2) Allemang, R. J. 他, Proc. of the 1st Int. Modal Analysis Conf., Orlando FL, 1982, pp. 559-565.
- (3) Rost, R. 他, ASME Paper No. 85-DEF-107, 1985, 5pp.
- (4) Bendat, J. S. 他, "Random Data: Analysis and Measurement Procedures", Wiley-Interscience, New York.
- (5) Goodman, N. R., AFFDL TR65-56, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson AFB, Ohio, Feb. 1965.
- (6) Wellstead, P. E., The 5th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation, 1979, pp.115-129.

討 論

〔質問〕 小 松 敬 治〔航空宇宙技術研究所〕

結論を導くにあたって表2で有限要素法で得られた固有モードベクトルを参照ベクトルとされている。固有値計算が実験値と一致したことにより有限要素法モデルの妥当性を確認されているが、計算による固有ベクトルを参照ベクトルとして採用されたことの妥当性をお教え願いたい。

〔回答〕 一般に実機の有限要素モデルは実測による修正および検証が不可欠であると考え。しかし、ここで対象とした供試構造物は、構造が単純であること、特性が明らかな均一材料を使用していること、機械加工により十分な寸法精度が得られていること、部

材結合部は固有モードにおいて弾性変形しないことなどの理由によりモデリング誤差が極めて少ない構造であると考えられる。

また、本論文中には単点加振実験の結果については示されていないが、加振位置とモード形状のマッチングが良いモードに限り計算で得られたモードベクトルは単点加振実験に基づいて得られたものと良好な一致をみることが確認されている。

したがって、この場合、計算で得られたモードベクトルを参照ベクトルとすることは妥当であると考え