解析解と有限要素法の直接結合による開領域波動解析*

浦田 喜彦*¹, 熊谷 好高*², 青地 正人*²Analyses of Waves in Unbounded Domains by Use of Direct Combination
of Analytical Solutions and Finite Elements

Yoshihiko URATA, Yoshitaka KUMAGAI, and Masato AOCHI

An analysis of wave-motion problems in unbounded or infinite domains is presented. Analytical solutions that express outgoing waves from an artificial boundary such as a circle or a sphere can be obtained easily. These solutions may be transformed into discretized relations between values of velocity potential and volumetric flux on the artificial boundary. These relations are in the same forms as the FEM equations. They can be joined directly to finite elements within the artificial boundary in order to construct an equation system for the whole domain. Some problems of radiation and scattering are calculated numerically by this method. The so-called fictitious interior eigenvalue failure does not arise in this method.

Key Words: Sound, Infinite Domain, Analytical Solutions, Discretization, FEM, Combination, Radiation, Scattering, Accuracy, Computational Time

1. 緒 言

前2報⁽¹⁾⁽²⁾では解析解を直接に有限要素法(FEM)と結合できるように境界上で離散化する方法について提案し, 有限領域の音響, 流体振動への適用を試みて, 計算能率や精度の面で効果を発揮し得ることを確認した。この方法は解析解の存在を前提にしているので適用範囲に限定はあるが, 扱える場合は出現頻度が高いのでFEMとの直接結合によって実用的な計算法の一つになり得ると考えられる。

さて, 音響・波動問題では無限領域あるいは開領域を含む場合を扱わなければならないことがしばしばある。この種の問題への対応としてFEMでは無限要素という興味深い方法の導入が試みられている⁽³⁾。しかしながら問題の性質上, 開領域に対しては境界要素法(BEM)のほうがより適していると考えられることが一般的のようである。ところがBEMでも開領域問題を無条件で扱えるわけではなく, 開領域の境界の内側に形成されるその問題では対象外の閉領域の共振という現象で計算不能に陥ることがある⁽⁴⁾⁽⁵⁾。これを避

けるためには特別な処理が必要になる⁽⁴⁾。一方, 本研究で提案する方法でも開領域問題を扱うことができ, しかも内部閉領域の共振には本質的に無関係である。ただし, 簡単に扱えるのは今のところ, 二次元では円や半円, 三次元では球や半球などの外側の領域に限られる。しかし, FEMとの直接結合を前提にするのであれば適用できる問題は少なくないので, 開領域問題を扱うための方法の一つとして意味を持つと考えられる。本報では提案する方法を開領域問題へ応用した場合の特質を調べる目的で音の放射や散乱などの基本的な問題について検討した結果を報告する。

記 号

x, y, z : 直角座標, または実数

r, θ : 二次元極座標

r, θ, ψ : 三次元極座標

t : 時間

p : 圧力

v : 粒子速度

ϕ : 速度ポテンシャル

Q : 体積粒子速度

ρ : 密度

c : 音速

* 平成元年10月15日 第67期全国大会講演会において講演, 原稿受付 平成元年2月22日。

*¹ 正員, 名古屋工業大学 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

*² 学生員, 名古屋工業大学大学院。

ω : 角振動数

k : 波数 $= \omega/c$

j : 虚数単位, または整数

$J_n(z)$: n 次の第1種ベッセル関数

$Y_n(z)$: n 次の第2種ベッセル関数

$H_n^{(2)}(z)$: n 次の第2種ハンケル関数

$h_n^{(2)}(z)$: n 次の第2種球ハンケル関数

$P_n(z)$: n 次の第1種ルジャンドル関数

2. 解析法

2.1 基本的方法 有限領域を対象にした前2報⁽¹⁾⁽²⁾では変分法的な考え方を基礎においた。しかし、無限領域問題では内部領域との境界で与えられる条件に対して重みつき残差法を適用したほうが適切である。ただし、計算の実行面では扱う関数の種類が変わるだけで前報までとほぼ同じである。以下では図1の円を仮想境界(Artificial Boundary)とし、その外側の領域(二次元)における解を円周上で離散化する場合を例にとって手順の説明をする。仮想境界の内側にはFEMを用い、外側の解析解と直接結合を行うことになる。

場の方程式を速度ポテンシャルで表すと

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

ここに φ は粒子速度 v , 圧力 p と次の関係にある。

$$v = -\nabla \varphi \quad (2)$$

$$p = j\rho\omega\varphi \quad (3)$$

問題が x 軸に関して対称であるとすれば、円の外部領域における方程式(1)の解は次のようになる。

$$\varphi = \sum_{n=0}^{N-1} A_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\theta \quad (4)$$

省略してある時間因数が $\exp(j\omega t)$ であるとするとき(4)の各項は外向波の条件(Sommerfeldの放射条件)を満たしている。この条件は物体により放射または散乱された波が反射などによって再び物体の方向に向かうことがないことを意味し、開領域に特有のものである。それゆえ、 φ の満たすべき条件として残っているのは $r=a$ の円の内側の領域との連続条件だけである。この条件は厳密には φ と $\partial\varphi/\partial r$, すなわち p と v の完全な連続性を要求するものである。しかし、ここではこの条件を近似的に満たすために次のようにする。まず、円周上で外部領域から見て外向き法線方向、すなわち r の負方向の粒子速度が $\bar{v}_n(\theta)$ のように指定されるものとする。すると式(2)より

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=a} = \bar{v}_n(\theta) \quad (5)$$

である。さらに、 $\bar{v}_n(\theta)$ が半円周上の節点における体

積粒子速度の形に集中化されるものとする

$$\bar{v}_n(\theta) = \sum_{i=1}^I Q_i \cdot \frac{1}{a} \delta(\theta - \theta_i) \quad (6)$$

ここに $\delta(\theta)$ はデルタ関数, θ_i は節点の θ 座標である。また、体積粒子速度は紙面に垂直な方向の単位長さ当たりの値で表すものとする。右辺の $1/a$ という因数は

$$\int_0^\pi \bar{v}_n(\theta) a d\theta = \sum_{i=1}^I Q_i \quad (7)$$

という関係が成立するように乗じたものである。ここで式(4), (6)を式(5)に代入すれば

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n H_n'(ka) \cos n\theta = \sum_{i=1}^I Q_i \frac{\delta(\theta - \theta_i)}{a} \quad (8)$$

ここに、ハンケル関数の種別を示す上添字を省略し、 $H_n'(ka) = [dH_n(kr)/dr]_{r=a}$ とした。式(4)において $r=a$ とし、順に $A_m=1, A_n=0 (n \neq m)$ としたものを重み関数として式(8)の両辺にかけ、対称性を利用して $0 \leq \theta \leq \pi$ で積分すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} A_n H_n'(ka) H_m(ka) \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta a d\theta \\ = \sum_{i=1}^I Q_i H_m(ka) \cos m\theta_i \end{aligned} \quad (9)$$

この式は式(8)で表される条件が厳密ではないことによって発生する残差を平均的に零とする意味と、体積速度 Q_i が外部領域に対してする仕事と外部領域の受けとるエネルギーが等しいということに等価な内容とを持っている。余弦関数の直交性を使い、記号を改めれば式(9)は次のようになる。

$$B_n h_{nn} = \sum_{i=1}^I Q_i g_{ni} \quad (n=0, 1, \dots, N-1) \quad (10)$$

ここで次の記号を用いた。

$$B_n = A_n H_n(ka) \quad (11)$$

$$h_{nn} = \varepsilon_n \frac{H_n'(ka)}{H_n(ka)} \quad (12)$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} a\pi & (n=0) \\ a\pi/2 & (n \geq 1) \end{cases} \quad (13)$$

$$g_{ni} = \cos n\theta_i \quad (14)$$

図1 円の外部領域と節点配置

式(10)を行列を用いて表せば

$$[h_{nn}] \{B_n\} = [g_{ni}] \{Q_i\} \quad (15)$$

左辺の係数行列は対角行列である。一方、節点 j における φ の値を φ_j と表すことにすれば、式(4)から

$$\varphi_j = \sum_{n=0}^{N-1} A_n H_n(ka) \cos n\theta_j \quad (16)$$

これを式(11), (14)の記号によって行列で表せば

$$\{\varphi_j\} = [g_{nj}]^T \{B_n\} \quad (17)$$

となる。

さて、節点数 I と解の項数 N の間には $N \geq I$ という関係が必要であるが、 N が大きいほど精度がよくなるものではないことはすでに述べたとおりである⁽¹⁾。

そこで $N=I$ とすると行列 $[g_{ni}]$ は $N \times N$ の正方行列となり、逆行列も存在する。この条件下で式(15), (17)から未知係数ベクトル $\{B_n\}$ を消去すれば

$$\{Q_i\} = [g_{ni}]^{-1} [h_{nn}] ([g_{nj}]^T)^{-1} \{\varphi_j\} \quad (18)$$

を得る。ここに、 $[g_{ni}]^{-1}$ は波数 k に依存しない定行列であることに注意する。

円の内部領域に FEM を用いるときには各節点における体積速度の和は零という連続条件によって式(18)を FEM 方程式と直接に結合することができる。全系の方程式から円周上の節点における φ の値 $\{\varphi_j\}$ が決まれば、係数 $\{B_n\}$ も式(17)を逆に解いて決められる。 $r \geq a$ の任意の位置における φ の値は式(4)を書き直した

$$\varphi = \sum_{n=0}^{N-1} B_n \frac{H_n(kr)}{H_n(ka)} \cos n\theta \quad (19)$$

によって計算することができる。

離散化方程式は必要であれば変位と集中力の関係としても導くことができるが、具体的な手順は前報⁽²⁾で述べたことが参考になるので省略する。

2.2 その他の場合 ここでは2.1節で述べた場合以外の扱い方の要点を述べる。

2.2.1 二次元問題 図1で x 軸に関して反対称な場合には式(4)の $\cos$ を $\sin$ に変えて同じ手順に従えばよいが、ただ一つ注意を要するのは $\theta=0, \pi$ の2点に節点を設けてはいけないことである。これらの点では φ の各項が恒等的に零となるから節点に含めると行列 $[g_{ni}]$ が特異になるためである。非対称の場合は $\cos, \sin$ の双方を用い、節点を全円周上に設けなければならない。

次に問題が再び x 軸に関して対称であるとして、 $\theta = \pm \pi/M$ (M は整数)の位置に剛壁がある無限扇形領域を対象とする場合には式(4)で $n=0, M, 2M, \dots$ として解を構成すればよい。剛壁が θ の任意の位置にある場合も非整数次のベッセル関数のサブルーチンが

供用できれば同様に扱うことができる。 $[H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - jY_n(z)]$

2.2.2 三次元軸対称問題 図2に示す三次元極座標系における方程式(1)の解の一つは

$$\varphi = \sum_{n=0}^{N-1} A_n h_{2n}^{(2)}(kr) P_{2n}(\cos \theta) \quad (20)$$

ただし、ここでは問題が軸対称で座標 ψ には依存しないとし、 $\theta = \pi/2$ の位置に剛壁がある場合を考えている。 $r=a$ の半球面上で $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の区間に I 個の節点を設けると式(6)に相当する式は

$$\bar{v}_n(\theta) = \sum_{i=1}^I Q_i \frac{\delta(\theta - \theta_i)}{2\pi a^2 \sin \theta_i} \quad (21)$$

となる。式(20), (21)を用いて2.1節と同様の手順で計算を進めれば、節点における体積速度と速度ポテンシャルの関係が式(18)と同じ形で得られる。ただし、この場合の各行列の要素の定義は次のようになる。

$$h_{nn} = \frac{2\pi a^2}{4n+1} \frac{h'_{2n}(ka)}{h_{2n}(ka)} \quad (22)$$

$$g_{ni} = P_{2n}(\cos \theta_i) \quad (23)$$

球ハンケル関数の種別は省略した。

2.3 数値計算上の注意 式(12)にはハンケル関数とその微係数の比が含まれているが、これを定義式どおりに数値計算に導入すると次数の大きいところでオーバフローを生じやすい。これはハンケル関数が原点に特異性を持つために関数値が非常に大きくなるからであるが、求めるべき比の絶対値はそれほど大きな値をとらないので、漸化式を使うと容易に計算することができる。まず

$$F_n(ka) = \frac{H'_n(ka)}{H_n(ka)}, \quad G_n(ka) = \frac{H_{n+1}(ka)}{H_n(ka)} \quad (24)$$

を定義すると円筒関数一般の漸化式⁽⁶⁾⁽⁷⁾から

$$F_n(ka) = \frac{k}{G_{n-1}(ka)} - \frac{n}{a}$$

$$G_n(ka) = \frac{n}{ka} - \frac{1}{k} F_n(ka) \quad (25)$$

の関係が得られる。そこで $F_0(ka)$ および $G_0(ka)$ の値だけを直接求めておいて式(25)を用いればよい。また、式(19)に含まれる $H_n(kr)/H_n(ka)$ を求めるには

図2 三次元極座標系

$$T_n = \frac{G_n(kr)}{G_n(ka)} \dots\dots\dots (26)$$

とおくと式(24)の第2式より

$$\frac{H_{n+1}(kr)}{H_{n+1}(ka)} = T_n \frac{H_n(kr)}{H_n(ka)} \dots\dots\dots (27)$$

となる。 $G_n(ka)$, $G_n(kr)$ は式(25)のように漸化式で計算できるから T_n も容易に求められ、必要な値は $n=0$ の場合だけを直接計算すれば順に求めることができる。

三次元問題における球ハンケル関数についても類似の漸化式⁽⁸⁾による計算が可能である。このような計算のほうが時間的にも有利である。漸化式は場合によっては不安定となり、発散してしまうこともあると言われるが、本計算法では必要とする n の最大値が数十程度にとどまるので、その面でのトラブルは全く経験しなかった。

3. 数値的検討

2章で述べた離散化法が開領域問題に対して有効に機能することを確認するために、音の放射と散乱の基本的な場合について数値的に検討した。

3.1 FEM領域との連続性について 計算例はすべて内部領域のFEM解との直接結合によったが、この方法では外部領域の解はFEMにおける一つの巨大大要素と等価な役割を果たすことになり、解析的無限要素と言うこともできる。さて、FEMの要素として要素内で φ が線形変化すると仮定した三角形要素または断面が三角形となる軸対称要素を用いた。このとき、円弧や球面となる外部領域の境界と多角形や回転多角形面となるFEM領域の輪郭の間にすきまを生じることになる。これは当然誤差の原因となるが、その程度を評価するために図3に示す半円領域の固有値を計算した。これは開領域問題では厳密解の得られる場合がほとんどないからである。 $0 \leq r \leq a$ の部分領域IにはFEMを用い、 $a \leq r \leq b$ の部分領域IIを解析的要素とした。条件は φ が x 軸について対称で、 $r=b$ と $\theta=\pi/2$ が剛壁になっているものとした。この問題の固有値は k で表すと厳密値は

$$J'_{2n}(kb) = 0 \dots\dots\dots (28)$$

を満たす値である。この厳密値に対する本計算法で得られた値の相対誤差を図4に示す。横軸は全領域の半径 b のFEM領域の半径 a に対する倍率である。モード名の $(2n, m)$ において、 $2n$ は全円領域とみなしたときの節直径数、 m は節円数である。図4からFEM領域が100%のときに誤差は最大で、解析的要素の占める割合が大きくなると誤差は小さくなっていくこと

がわかる。この誤差にはFEM領域内部で発生したものと、FEMと解析的要素の接合部で発生したものが考えられ、後者に前述のすきまによるものが含まれることになる。誤差を原因別にとり出すことは困難であるが、図4の結果から部分領域界におけるすきまは単独で全体の精度を支配するほどの影響を及ぼすことはないと考えられる。これは離散化の結果としてエネルギーの授受が節点においてのみ行われる形になるので、すきまは精度に対してはエネルギーの評価を通した間接的影響をもたらすにとどまるためと考えられる。

3.2 音の放射の問題 波動における開領域問題はすべて非同次問題となるが、その典型の一つが放射の問題である。ここでもそれを取りあげる。はじめに図5を二次元問題として扱う。すなわち、 y 方向に半無限の幅を持つ剛壁にはさまれた振動板が x 方向に振動するときの放射を考えるのであるが、剛壁と振動板の紙面に垂直な z 方向の幅は無限大とする。この問題では振動板の中央 O 点を中心とする半径 a の半円筒を仮想境界とし、その外側を解析的無限要素、内側をFEMとして計算する。問題は x 軸について対称であるから $y \geq 0$ の部分だけを計算すればよく、FEM領域の分割は図3に示したものと同じにした。この場合

図3 半円領域の解析的要素とFEMによる解析

図4 半円領域の固有値の相対誤差

の放射インピーダンス Z_R は振動板上の粒子速度を v , z 方向の幅を 1 とした振動面を S と表せば

$$Z_R = \frac{1}{v} \int_S p dS = \frac{j\rho\omega}{v} \int_0^a \varphi dy \quad \dots\dots\dots (29)$$

で求められるが、振動面は FEM 領域内にあるので、振動面上の節点番号を $m=1, 2, \dots, M$, y_m を節点 m の y 座標とすれば、 φ は要素内で線形変化をするから

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{1}{a} \sum_{m=1}^M Q_m \\ \int_0^a \varphi dy &= \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{2} (y_{m+1} - y_m) (\varphi_m + \varphi_{m+1}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる。このようにして求めた Z_R を図 6 に示す。 $ka \geq 3$ では分割幅と波長の接近によって精度が低下していると考えられるが、その程度の評価は厳密解が存在しないので吟味していない。緒言で述べたように標準的な BEM では内部領域の共振で計算精度が非常に悪くなることがあるが、本計算法ではそのような現象は全く見られないので FEM との併用は行いやすい。本計算法で内部領域の共振が現れないのは解を式(4), (20)のように表したことによる。これらの解は各項が原点から出発する進行波を表すので係数をどのように選んでも内部領域の振動の固有関数に一致することはあり得ないのである。

次に図 7 に示す正方形柱の一つの面が剛体的に振動する場合の放射インピーダンスを図 6 に併せて示す。図 5 の場合に比べて ka の大きいところで Z_R の虚部が大きい。これはバツフル板がないために流体の振動面に平行な方向への移動が容易なことによる。いずれの場合も ka が大きくなると無次元インピーダンスの実部は 1 に近づくが、これは放射される音波が平面波に近づくが、これは放射される音波が平面波に近づくためである。

図 8 に図 5, 7 の問題における $ka=1$ のときの瞬間的な音圧(絶対値)分布の例を示す。

図 5 において問題を x 軸まわりの回転対称とすれば無限大バツフル中の円形振動板による放射の問題となる。この問題も $r=a$ の半球面を仮想境界としてその外側を解析的無限要素とし、内側に軸対称 FEM を用いて計算を行った。FEM 領域の分割は断面が図 3 に示すものと一致するように行った。この場合の放射インピーダンスは厳密に知られていて次式で表される⁽⁹⁾。

$$Z_R = \rho c \pi a^2 \left[\left\{ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} \right\} + j \frac{S_1(2ka)}{ka} \right] \quad \dots (31)$$

ここに S_1 は 1 次の Struve 関数⁽¹⁰⁾である。本計算法による結果を式(31)と比較して図 9 に示す。全般的によく一致しているが、 ka が大きくなると虚部の精度が

図 5 無限大バツフル中の振動板による音の放射

図 6 二次元問題の放射インピーダンス

図 7 正方形柱による音の放射と平面波の散乱

(a) 図 5 の場合 ($ka=1$) (b) 図 7 の場合 ($ka=1$)

図 8 図 5, 7 の問題における放射波の音圧(絶対値)の瞬間分布の計算例

図 9 無限大バッフル中の円形振動板の放射インピーダンス

悪くなる。これは FEM の分割幅がこの領域では粗くなるためである。

3.3 柱体による平面波の散乱 図 7 で正方形柱が完全に剛体で、これによって x の負方向に進む平面波が散乱される場合を計算した。入射平面波をベッセル関数で展開すれば⁽¹¹⁾

$$\varphi = C_0 e^{ikx} = C_0 \sum_{n=0}^{N-1} \tau_n J_n(kr) \cos n\theta \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここに $\tau_0=1$, $\tau_n=2(n \geq 1)$ である。式(32)を式(4)で表される散乱波と重ね合わせて 2 章で述べた方法によって離散化をする。その際に重み関数として係数が未定な散乱波の各項だけを考えればよく、確定した値を持つ入射波は考えなくてよい。結果は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \{Q_i\} &= [g_{ni}]^{-1} [h_{nn}] ([g_{nj}]^T)^{-1} \{\varphi_j\} \\ &+ [g_{ni}]^{-1} (\{f_n\} - [h_{nn}] \{F_n\}) \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

各行列の要素は式(12), (14)で a の代わりに $b = \sqrt{2}a$ としたものと同一である。非同次項のベクトル $\{f_n\}$, $\{F_n\}$ の成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} f_n &= C_0 \tau_n J_n'(kb) \varepsilon_n \\ F_n &= C_0 \tau_n J_n(kb) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (34)$$

式(34)と FEM 方程式の結合は非同次項がない場合と同じ扱いでよい。この方法で計算した散乱場の瞬間的な音圧(絶対値)分布の一例を図 10 に示す。散乱と回折で平面波の強度分布が乱されている様子がわかる。ここでは正方形柱による散乱を扱ったが、断面が任意形

図 10 散乱、回折によって乱された平面波の音圧(絶対値)分布の計算例($ka=1$)

状の柱体による散乱も同様に計算することができる。

4. 結 言

解析解を境界上で離散化して FEM と直接結合する計算法の開領域問題への応用として音の放射と散乱の問題を検討した。この方法では対象外の内部領域の共振などには無関係であり、FEM との結合に当たってとくに問題にすべきことからは見当たらない。行列が密にはなるが解析的に計算できるので能率はよい。事実、本報で示した例において計算の準備と計算に要した時間のほとんどは FEM にかかわるものであった。一方、仮想境界として通常に供用できる関数プログラムの制約から円や球面などに限定して検討をしたが、この方法では対象が複雑になると FEM 部分の計算量が増すことは明らかである。そのような問題点の克服については今後の課題として検討を続けたい。

文 献

- (1) 浦田・中川, 機論, 54-507, C(1988), 2571.
- (2) 浦田・中川, 機論, 55-512, C(1989), 895.
- (3) Zienkiewicz, O. C., ほか 2 名, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19**(1983), 393.
- (4) 境界要素法研究会編, 境界要素法の理論と応用, (1986), 196, コロナ社.
- (5) Shaw, R. P. (Brebbia, C. A. 編), *Boundary Element X*, **4**(1988), 221, Springer.
- (6) 森田・ほか 2 名, 数学公式 III, (1960), 159, 岩波書店.
- (7) 寺沢, 数学概論, (1954), 449, 岩波書店.
- (8) 文献(6)の 169 ページ.
- (9) 早坂・吉川, 音響振動論, (1974), 622, 丸善.
- (10) Watson, G. N., *Theory of Bessel Functions*, (1944), 328, Cambridge Univ. Press.
- (11) 寺沢編, 数学概論(応用編), (1960), 521, 岩波書店.

討 論

〔質問〕 加 川 幸 雄〔富山大学工学部〕

開領域波動問題を有限要素法で取扱う場合は、有限要素領域端面における無反射処理が不可欠である。

貴論文は、有限要素法に無限領域における解析解を結合することによってこれを解決しようとする提案だが、この種の手法については、すでに軸対称場については、例えば、文献〔付1〕、三次元についても、例えば、文献〔付2〕があり、また開領域問題を総括した成書として文献〔付3〕が刊行され、上の文献〔付1〕〔付2〕も紹介されている。したがって、貴論文では、これらを refer するとともに、これらとの関連において、貴論文の特徴と新奇性について discuss すべきものと考える。

〔回答〕 既報^{〔1〕〔2〕}を含めた本研究の基本的な考え方は、解析解を用いる部分領域をその周辺上のみに節点を持つ有限要素と同様な形に変換して、隣接する部分が同様に定式化された解析的要素であれ、通常の有限要素であれ、自由に結合できるようにすることである。本論文では仮想境界を円や球、またはそれらの部分とすればその外部についても同様に一つの要素として定式化でき、実際に機能することを確かめたものである。変換に際して、隣接する部分とのエネルギーの授受が等価になるように粒子速度を節点に集中できるという仮定を基礎に置いているが、隣接する要素の内挿関数などには無関係にその部分領域単独で離散化をすることができる。ご指摘の文献は早い段階で解析解と FEM の結合を試みているが、いずれにも解析解を用いる部分を一つの要素とみなす考え方はないと思われる。このうち、Hunt らは球面を境に外側に解析解を、内側に有限要素を用いる問題を扱っているが、接合に際して接合球面上に現れる有限要素領域の諸量を外部解と共通な球面調和関数で展開する方針をとっているようで、本論文とはむしろ逆である。また、山淵らは無限バツフル上にある凹部からの音の放射を扱っているが、凹部の有限要素と外部解（グリーン関数を用いた積分表示）との接続はその問題とは直接に関係のない円筒形凹部と外部解との接続のときに現れる関係

式を媒介にするもので、本論文の方法とは全く異なり、手順もやや複雑であるというのが率直な感想である。また、本論文の投稿と前後して公にされた蜂屋らの研究〔付4〕がある。この論文ではエネルギー関係から出発していないので、最終的に得られた結果に違いはあるが、解析解を有限要素と同様の表現に変換して接続を図る点では本論文と共通する面がある。

ご指摘の文献はその存在は承知していたものの、基本的な考え方において本研究とは必ずしも近くはないように思い、直接の引用はしなかったが、これは適当ではなかった。ご指摘に感謝する。

〔質問〕 太 田 和 秀

〔三菱重工業(株)長崎研究所〕

開領域における波動問題について検討されているが、次の点についてご教示願えれば幸いである。

（1） BEM では高周波域になると音波の波長が短くなるので、それに対応して要素を細かく分割しなければ十分な計算精度が得られないが、貴計算法で計算精度を十分に保つのに必要な、FEM 要素分割の大きさ、音波の波長、外部領域を記述する多項式の項数の限界についてご教示願いたい。

（2） 貴計算法での、FEM の要素分割に関する制限はあるのか。

（3） 貴計算法をエンジンなどの音響放射問題に実用的に適用可能か否かのご意見を伺いたい。

〔回答〕 （1） 波動の問題では一口に波長といっても方向を考える必要がある。極端な例では二次元の軸対称問題では半径方向に変化はあるが、周方向の変化はないので、仮想境界の周方向の分割は不要になる。一般には、仮想境界の位置を通過するときの波の仮想境界に沿った方向の変化のしかたから仮想境界上の節点の数や配置を決めれば効率的な計算が可能であると考えるが、そのために必要な情報は実は問題を解いたあとでないと得られないことが多いと思う。そこで、計算範囲での最小の波長を波数ベクトルの大きさ $k = \omega/c$ から算出してその波長に対して 10 個程度の節点を配置すればかなりよい精度が得られると思う。FEM 領域の分割も同じで、諸量の変化の大きい方向には細かく、そうでない方向には粗くすればよいのだが、その情報が事前に得られなければ上記のように最小波長との関連で決めればよいと思う。外部領域の解

〔付1〕 山淵・ほか3名、放射を伴う音響伝達系の有限要素シミュレーション、電子通信学会誌、J 61-A, 8 (1978), 706-713.

〔付2〕 Hunt, J. T., et al: Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures, J. Acoust. Soc. Am., 55-2 (1974), 269-280.

〔付3〕 加川、開領域問題のための有限/境界要素法、(1983)、サイエンス社。

〔付4〕 蜂屋・ほか2名、日本音響学会誌、45-2 (1989)、115.

の項数は本文中で述べたように仮想境界上の節点数より少なくないことが必要だが、節点数に対して解の項数が多ければ多いほど精度がよくなるものではないことに留意する必要がある。FEM 領域の分割は外部の解析的要素の節点配置と整合させれば特に制限はない。制限を生じるとすれば、通常の FEM と同様に計算規模の大きさから生じるものだけだと思う。

(2) (1)に含めて回答した。

(3) 原理的には不可能ではないが、ご質問にあるような複雑な例では仮想境界と音源物体の間を埋める有限要素数が多くなるので、最も効率的な計算法となるかどうかは不明である。今のところ、この方法が効果的に使えるのは音源が比較的単純な形状のものだろうと思う。それでも従来の FEM では扱えなかったものが簡単なプログラムの変更で対応できるようになる点で意味はあると思う。