周期横励振をうける圧縮座屈後のはりの カオス振動に関する実験*

永 井 健 一^{*1}

Experimental Study of Chaotic Vibrations of a Clamped Beam Subjected to Periodic Lateral Forces

Ken-ichi NAGAI

Experimental results are presented for chaotic vibrations of a compressed buckled beam subjected to periodic lateral excitation. A thin duralumin beam coated with a sheet of thin vinyl was used as a test specimen. The beam was clamped at both ends to the base frame of an electromagnetic shaker. Initial axial displacement of the beam was controlled utilizing thermal elongation both of the beam and frame. Typical responses of time history and the strange attractor of the chaotic vibration were observed near the frequency range of the fundamental resonant vibration. It is found that the correlation dimension of the strange attractor yields a value of $d=3.8$ under twice the axial displacement corresponding to buckling load.

Key Words: Nonlinear Vibrations, Vibration of Continuous System, Chaotic Vibration, Experimental Mechanics, Beam, Buckling

1. 緒 言

薄肉のはりが航空機、自動車、鉄道車両などの軽量構造要素として用いられている。これらは一般に曲げ剛性が小さいため軸圧縮荷重のもとでは座屈現象が生じやすい。さらにこれらに周期的な横荷重が作用すると曲げ変形と軸方向の変形が互いに連成し、大振幅の非線形曲げ振動とともに、飛移り変形を伴ういわゆるカオス状振動が誘起されやすい。これらは要素の振動疲労や騒音の原因の一つとなりうる。それゆえ、構造要素のカオス振動現象を解明することは工学上重要な課題であり、いくつかの研究が見受けられる。例えば座屈ばりに関して Tseng-Dugundji⁽¹⁾、Yamaki ら⁽²⁾による実験がある。またアーチの非線形振動⁽³⁾⁽⁴⁾に関して著者により理論解析と実験がなされカオス振動の可能性が示唆されてある。また二つの磁気吸引力を受けた片持ばりのカオス振動の実験が Moon-Holmes⁽⁵⁾、Moon⁽⁶⁾により詳細に行われている。座屈した板のフラッタ問題の数値実験⁽⁷⁾が Dowell により、一自由度系の座屈ばりモデルの数値実験⁽⁸⁾が Rudowski と

Szemplińska-stupnicka によりそれぞれ行われている。しかし軸圧縮荷重をうけ座屈したはりのカオス振動の実験的解明はいままで十分になされたとは言えない。本報は初期軸圧縮変位を与え座屈させた両端固定のはりに周期横荷重を作用させた場合の非線形振動実験を行い、そのカオス振動挙動を明らかにした。まず薄肉のジュラルミンのはりの両端を支持台に固定し、はりと支持台をそれぞれ異なる温度に保ち、両者の熱膨張の差を利用して初期軸変位を制御した。ついで電磁加振器にて振動実験を行い、カオス振動の生じる振動数範囲を明らかにするとともに特徴的な振動応答ならびにポアンカレ写像図を記録し、そのストレンジアトラクタの相関次元を求めた。これより初期軸圧縮変位が座屈を生ずる軸変位の2倍から2.5倍となると、はりの相関次元は3.8から4.2となることを明らかにした。

2. 試験用はりおよび支持装置

試験用はりは厚さ $h=0.506$ mm、幅 $b=30$ mm、長さ $L=180$ mm の寸法とし、ジュラルミン薄板から固定支持の部分を含め長さ 280 mm で切り出した。ついで、はりにある程度の減衰を持たせるために厚さ 0.2 mm のビニールテープをはり両面に接着した。そのは

* 原稿受付 平成元年8月28日。

^{*1} 正員、群馬大学工業短期大学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1)。

りの物性値は実測により次の値を得た。

平均厚さ $h' = 0.893 \text{ mm}$,

ヤング率 $E = 71.0 \text{ GPa}$,

密度 $\rho = 2.07 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

はり支持装置は図1に示すごとくジュラルミンの支持台と固定用締め金具よりなる。ビニールテープをのぞいたはりの両端は締め金具を介して2本のボルトにて支持本体に取付けられる。これより横方向と軸方向の変位に関して固定の境界条件が満足される。

3. 実験装置

はりと支持台に加速度振幅一定で正弦波の振動を与え、支持台に対するはりの相対変位を2個の非接触変位計を用いて測定した。

3・1 初期軸変位制御装置 はりに初期軸変位を与えるため、はりと支持台にそれぞれ異なる冷却を行い、熱膨張の差により軸変位を得る方法を用いた。薄肉ばりの温度調節は周囲の気温を一定に保つこととし、支持台では水冷により行った。軸変位制御の概要を図2に示す。はりと支持台を気泡ビニールテント1にて囲み、空調用ファン2により冷却を行う。はり近傍の温度を白金測温体センサ3で検知し、温度調節器4を用いて電気ヒータ5の出力をPID制御した。水道水を恒温水槽6で所要の温度としたのち開閉バルブ7を通じて支持台と電磁加振器の間の冷却板8へ導いた。バルブ7で水量を調節することにより、加振器からの発熱を絶縁したうえで支持台の温度を一定に設定できる。

さらに、はりの近傍の温度と支持台の温度を二つの熱電対9、10とデータロガー11で測定し、マイクロ

図1 試験用はりおよび支持装置

コンピュータ12を介してX-Yプロッタ13に温度の時間変化を記録した。これにより支持台の温度変動はほとんどなく、空気の温度変動は $\pm 0.3^\circ\text{C}$ 以内の精度を得た。

3・2 振動実験装置 実験装置全体のブロックダイアグラムを図3に示す。加振制御装置は次のごとく構成した。ヘテロダイン周波数分析器1の正弦波出力信号を電力増幅器2を経て電磁加振器3へ入力し、加振台を駆動する。また加振台の加速度振幅を加速度計ピックアップ4で検出し、前置増幅器5を介して周波数分析器1に帰還させる。この構成により加速度振幅を一定にできる。なお6は加速度振幅のモニタ用の電圧計である。周波数掃引はレベルレコーダ7で1の発振周波数を制御することとし、その振動数を約30 Hzから380 Hzの範囲で増減させた。なお電磁加振器と制御装置はBrüel & Kjær社製で、周波数変動が少なくかつ高周波ひずみの少ない加振が可能である。

はりの振動応答の測定には、二つの渦電流形非接触変位計ピックアップ8で加振台上のはり応答と支持台の変位を検出し本体9と感度調整スイッチボックス10を通して差動増幅器11で両出力の差を取る。これによりはりの応答だけに比例する電圧が得られる。なお変位計ピックアップ8は移動装置12に設置され、測定位置の移動はりの振動形の確認ができる。13以降は計測、分析と記録のための装置である。13は電圧計

図2 はりの初期軸変位制御装置

図3 振動実験装置ブロックダイアグラム

き、その値を後述の計測用コンピュータに転送することができる。14は2現象FFTアナライザで振動波形の記録と分析を行う。なお信号入力部では12bitの量子化精度を有する。まず入力段の切換スイッチ15をa側に接続すると、加振波形とはりの振動波形の記録と周波数分析ができる。なお16は14に信号を取り込む際の外部サンプリング用発振器である。次にスイッチ15をb側に切換えると、はり応答のポアンカレ写像図を得る。17は微分器で、はりの変位を速度応答に変換できる。18はパルス発生器で、加振波形に同期してその最大値から任意の位相でパルス信号を発生できる。加振周期ごとのはりの変位と速度を加振周期ごと14のアナライザに取り込み、画像表示を行うことによりポアンカレ写像図を得る。19はX-Yレコーダではりの周波数応答曲線を記録する。応答曲線は、分析器1から加振振動数に比例した電圧を19の横軸に入力し、13で計測したはり振幅の実効値をコンピュータ20を介して縦軸に入力することにより得られる。はり振幅の時間応答、ポアンカレ図などの結果は14のFFTアナライザからコンピュータ20に転送したのち、磁気ディスク装置21およびX-Yプロッタ22にそれぞれ記録保存できる。

4. 実験要領

実験では、便宜上次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} [\bar{w}, \bar{w}_0] &= [W, W_0]/h, \quad \xi = x/L \\ u_c &= -U_0 L/r^2, \quad r = (I/A)^{1/2}, \quad A = bh \\ [\bar{\omega}_i, \omega] &= [f_i, f]/(2\pi/\Omega_0), \quad \tau = \Omega_0 t \\ \Omega_0 &= L^{-2}(EI/\rho A')^{1/2}, \quad A' = bh' \\ [p_d, p_s] &= [a_d, g](\rho A' L^4/EI r) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

上式において W ははりの静的平衡位置からのたわみ、 W_0 は初期たわみである。 x は座標で、 ξ は無次元座標である。なお固定端を原点にとり、 U_0 は初期軸変位で、 u_c はその無次元圧縮変位である。 r ははりのみの断面二次半径 (I は断面二次モーメント、 A は断面積) である。 f_i と f はそれぞれはりの線形固有振動数と加振振動数であり、 $\bar{\omega}_i$ と ω はそれぞれ無次元の固有角振動数と加振角振動数である。 t は時間であり、 τ はその無次元量である。 Ω_0 は振動数の無次元に関する量である。なお A' はビニールを接着したはりの断面積である。 a_d, g は加振台の加速度振幅と重力の加速度をそれぞれ示し、 p_d, p_s はそれぞれ周期加振力と自重の無次元量である。

4・1 初期軸変位と加振力の設定

はりに与える初期軸変位の設定は次のごとく行う。まずはりを 0°C の水にて冷却し、両端を支持台に固定する。これより

室温近傍に至ると熱膨張により、はりにあらかじめ圧縮力を作用させることができる。さらに上記の軸変位制御装置で温度を変えることにより所定の初期軸変位を得る。なお初期軸変位や初期たわみを直接測定することは困難であるため、初期軸変位と線形固有振動数との関係を理論解析⁽⁹⁾より求め、実験で得られた固有振動数と比較することにより初期軸変位と初期たわみを定めることとする。図4に圧縮軸変位 u_c による線形固有振動数 $\bar{\omega}_i (i=1, 2, 3)$ の変化の理論解を示す。 i は振動次数である。 $p_s=170$ は試験片の無次元自重である。また初期たわみ $\bar{w}_0$ は両端固定の境界条件を満たす次の関数で一項近似としている。

$$\left. \begin{aligned} w_0(\xi) &= \sum_j a_j \zeta_j(\xi), \quad (j=1, 2, 3, \dots) \\ \zeta_j(\xi) &= (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) \cos(j-1)\pi\xi/n_j \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

上式で n_j は $\zeta_j(\xi)$ の最大たわみを1とする係数である。図4の中で、初期たわみ $\bar{w}_0$ がない場合を太い実線で、 $\bar{w}_0=0.03$ と 0.06 の場合を一点鎖線と二点鎖線にてそれぞれ示す。軸圧縮変位 u_c が30を超えて増大すると第1次の固有振動数は逐次増加するが、第2次や第3次の振動数は大きな変化がないことがわかる。また u_c が60近傍を超えると、飛移り後の釣合い状態に対応する固有振動数が現れる。破線は不安定な釣合いに対応する振動数で実在しない。なお初期たわみと自重のない真直ばりの場合、座屈が生ずる初期軸変位は $u_c=39.45$ となる⁽³⁾。

次に振動実験を行う際、加振振幅を主に $p_d=500$ に選んだ。加振台の加速度振幅は $a_d=28.8\text{ m/s}^2$ となる。ついで加振振動数をはりの第三次までの主共振を含む

図4 初期軸圧縮変位と線形固有振動数の関係 (理論値) $p_s=170$

範囲に選ぶと、対応する無次元加振振動数は $\omega=120$ で、実際の振動数は $f=380$ Hz となる。さらにはりには速度に比例する線形減衰力 $2\mu_i\dot{w}_i$ を持つものと仮定する。 μ_i は減衰係数である。減衰係数の決定には実験により各振動モードに対する自由減衰応答を求め、その振幅の減少の割合から決定することとした。

上記諸量を決定した後、はりの振動実験を行い、周波数応答曲線を求めるとともにカオス振動が起こる振動数範囲と加振振幅との関係を明らかにする。その際カオス振動の応答波形ならびにポアンカレ写像図を記録する。

4・2 フラクタル次元の決定 はりのカオス振動が誘起されると、ポアンカレ写像図にいわゆるストレンジアトラクタが現れる。これを整理する方法としてフラクタル次元が用いられる。フラクタル次元を求める簡便な計算方法が Grassberger-Proccaccia⁽¹⁰⁾ により導入されている。また画像処理を用いて実験的に求める方法が Lee-Moon⁽¹¹⁾ により提案されている。計算による相関次元 d は次により決定される。

まずはりの測定位置 ξ における振動応答の時間的变化をサンプリング周期 $\Delta\tau$ で n 個記録する。その際の時系列値を次のごとくおく

$$\bar{w}_i \equiv \bar{w}(\xi, i\Delta\tau), (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

ただしサンプリング周期 $\Delta\tau$ は代表的な周期を T 、十分小なる値を k とした場合、 $\Delta\tau=kT$ で定義する。なお本実験では T を加振力の周期 T_e に選ぶこととする。

ついで任意時間遅れを $\Delta\tau' = l\Delta\tau$ (l : 整数) とし時系列値 $\bar{w}_i$ から次に示す e 個の成分を持つ疑似位相空間を作る。

$$[\bar{w}_i, \bar{w}_{i+l}, \bar{w}_{i+2l}, \dots, \bar{w}_{i+(e-1)l}], \\ (i=1, 2, 3, \dots, m)$$

なお e は埋込み次元を示し、 $m=n-e+1$ である。これらの位相空間をもとに次式の相関積分 $C(\bar{r})$ を求める。

$$C(\bar{r}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1/m^2) \sum_i \sum_j H(\bar{r} - \|\bar{w}_i - \bar{w}_j\|) \\ (i, j=1, 2, 3, \dots, m) \dots\dots\dots (3)$$

上式で $H(\bar{r})$ はヘビサイドのステップ関数であり、 $\bar{r}$ は空間を測定する代表長さである。 $\|\bar{w}_i - \bar{w}_j\|$ は埋込み次元 e におけるはり振幅 $\bar{w}_i$ と $\bar{w}_j$ の間の距離を示す。なお $i=j$ の場合のみ上式の総和を取るものとする。相関積分 $C(\bar{r})$ と代表長さ $\bar{r}$ との間に $C(\bar{r}) \propto \bar{r}^d$ なる関係がある場合、すなわち $d = \log C(\bar{r}) / \log \bar{r}$ が相関次元を与える。実際には埋込み次元 e を逐次増加しながら相関積分を計算し d が一定に近づく値で決定

する。なお計算時間の短縮上、式(3)での距離 $\|\bar{w}_i - \bar{w}_j\|$ は次式で示される最大ノルムを取ることとする⁽¹²⁾。

$$\|\bar{w}_i - \bar{w}_j\| \\ = \max\{|\bar{w}_{i+(c-1)e} - \bar{w}_{j+(c-1)e}|, 1 \leq c \leq e\}$$

さらに、 $\bar{w}_i$ から $\bar{w}_j$ の距離計算の総和を無作為に選ぶこととする。つまり $\bar{w}_j (j=1, 2, 3, \dots, m)$ から $\bar{w}_k$ をランダムに p 個抜き出し、次式の計算をすればよい。

$$C(\bar{r}) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1/mp) \sum_i \sum_k H(\bar{r} - \|\bar{w}_i - \bar{w}_k\|) \\ (i=1, 2, 3, \dots, m; k=1, 2, 3, \dots, p) \dots\dots\dots (4)$$

5. 実験結果および検討

はり近傍の温度 θ_r と支持台の温度 θ_f を一定に保ち振動実験を行った。まず微小加振振幅のもとで振動実験を行い各振動形の線形固有振動数を求めた。温度差 $\Delta\theta = \theta_r - \theta_f = 2.1^\circ\text{C}$ のもとで無次元固有振動数 $\bar{\omega}_1 = 33.2$, $\bar{\omega}_2 = 45.5$ ならびに $\bar{\omega}_3 = 109.4$ を得た。ただし $p_s = 170$ 。これらの値と図4に示した理論結果とを比較することにより初期圧縮軸変位がほぼ $u_c = 80$ と定まる。また初期たわみ $\bar{w}_0$ は約 0.03 の値と推定できる。さらにはりの減衰係数を測定すると第1次から第3次の振動形においてほぼ同じ値を得た。その平均の値を μ として $\mu = 0.003$ の値を得た。以下実験で共通の諸量をまとめると次のごとくなる。

$$p_s = 170, \bar{w}_0 = 0.03, \mu = 0.003 \dots\dots\dots (5)$$

次に加振力振幅を $p_d = 500$ として周波数掃引実験を行い、非線形共振応答曲線を求めた。 $u_c = 80$ の場合の結果を図5に示す。縦軸は $\xi = 0.3$ における振幅の実効値 $\bar{w}_{rms}$ であり、横軸は無次元加振振動数 ω である。実際の加振振動数 f [Hz] もあわせ示す。主要な共振応答の種類を括弧内の i, j で示す。 i は誘起される第 i 次の振動形を示し、 j は共振応答の種類で $j=1$ は主共

$$(u_c = 80, p_s = 170, p_d = 500, \xi = 0.3)$$

図5 座屈ばりの周波数応答曲線

振, 例えば $j=2$ は第 2 次の高調波共振, $j=1/2$ は分数次調波共振の応答をそれぞれ示す. なお $j=+0$ で自重と初期軸変位による静的平衡位置での応答を示し, $j=-0$ ではりが飛移り後の応答をそれぞれ示す. 特にカオス振動を起こしている応答には記号(c)を付してある. これより次のことが明らかになった.

(1) 第 1 次の振動形を有する主共振応答は漸軟-漸硬ばね特性に対応する応答曲線となる.

(2) カオス状振動は主に第 1 次の主共振近傍において比較的広い振動数範囲にわたり発生することがわかる. その際カオス振動は加振振動数を高振動数側から減少することにより発生することが認められた.

(3) その他第 1 次振動形の第 2 次ならびに第 3 次の高調波共振近傍でカオス振動が発生することが確認された. これらは比較的狭い範囲に限られる.

次に, はりがカオス振動を行っている際の振幅の時間的変化を図 6 (a) に示す. 横軸は無次元の時間で加振力の周期 T_e を基準に取ってある. 縦軸ははり中央での振幅 $\tilde{w}$ を示す. 図 6 (a) よりほとんど無秩序な飛移り振動を起こしていることが認められる. さらにこの応答に対応するポアンカレ写像図を図 6 (b) に示す. 図 6 (b) の横軸は振幅 $\tilde{w}$ を示し, 縦軸は速度 $\tilde{w}_{,\omega\tau}$

を示す. なおこの場合のサンプリング時間を $\Delta\tau = (48/1024)T_e$ とし, 記録データ数は約 6000 である. またサンプリングの位相角は加振力の最大振幅より 62° とした. 図 6 (b) よりはりの応答はいわゆるストレンジアトラクタを構成していることがわかる. さらに同じカオス振動の領域内で加振振動数をわずかに減少させた場合の振幅応答とポアンカレ写像を図 7 に示す. 振動波形は主に飛移りの後の平衡点を中心として振動していることがわかる. またアトラクタの形も図 6 (b) の結果と比べ変形していることがわかる.

さらに加振振幅 p_d を変化させてカオス状振動の生ずる振動数の不安定領域を求めた. 結果を図 8 に示す. 縦軸は加振力振幅 p_d であり, 横軸は加振振動数 ω である. 図 8 より荷重振幅が小なる範囲ではカオス振動は生じない. 荷重振幅が大となるとカオス振動の現れる不安定領域はほぼ同じ幅を持って現れ, 加振振幅の増大とともに高い振動数に移行する. なお低振動数側での不安定境界は荷重の増大とともにほぼ直線的に変化するが, 高振動数側での境界は複雑に変化する. これはカオス振動が加振振動数を減少することにより, まず高振動数側ではりの定常振動から跳躍を伴い発生することと, 低振動数側で振動応答に移行して消滅す

(a)

(b)

($u_c = 80$, $p_c = 170$, $p_d = 500$, $\omega = 30.52$, $\xi = 0.5$)

図 6 座屈ばりのカオス振動波形とポアンカレ写像図

(a)

(b)

($u_c = 80$, $p_c = 170$, $p_d = 500$, $\omega = 30.24$, $\xi = 0.5$)

図 7 座屈ばりのカオス振動波形とポアンカレ写像図

ることに関連するものと推察される。

さらに軸圧縮変位が $u_c=100$ の場合 (線形固有振動数: $\bar{\omega}_1=38.5$, $\bar{\omega}_2=46.1$, $\bar{\omega}_3=112.5$) の振幅応答およびポアンカレ写像図を図9に示す。図9(a)での振動波形は二つの静的な平衡位置を往復することがわかる。図9(b)のアトラクタの像も初期軸変位の小さな場合

図8 座屈ばりのカオス振動の不安定領域

図9 座屈ばりのカオス振動波形とポアンカレ写像図

と比べ不明りょうとなっている。

これらの振幅応答波形よりカオス振動のフラクタル次元を求めた。一例として、図7(a)に示す $u_c=80$, $\omega=30.24$ の場合の相関積分 $C(\bar{r})$ と代表長さ $\bar{r}$ との関係を図10に示す。図10中の e は埋込み次元である。これより e が増加するに従い $\log_{10} C(\bar{r})$ の傾きは $\log_{10} \bar{r}=2$ 近傍で一定値に近づくことがわかる。ついで埋込み次元 e に対する相関次元 d の変化を図11に示す。なお他の場合の結果をもあわせ示す。図7での結果を白い丸印で示し、 $u_c=80$, $\omega=30.52$ の場合を黒い丸印で、さらに $u_c=100$ での値を四角の印でそれぞれ示す。これより $e=10$ 近傍で $u_c=80$ で $\omega=30.24$

図10 相関積分 $C(\bar{r})$ と代表長さ $\bar{r}$ との関係

図11 埋込み次元 e と相関次元 d との関係

の位置では $d=3.83$, $\omega=30.52$ では $d=3.75$ の値を得た。これらは平均で $d=3.8$ となる。また $u_c=100$ ではほぼ $d=4.2$ の値となる。

6. 結 言

初期軸圧縮変位をうける両端固定の座屈ばりに周期横荷重を作用させた場合のカオス振動に関する実験を行った。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 主なるカオス振動は第1次の主共振の漸軟-漸硬ばね特性を示す応答曲線の中間の振幅近傍に存在する。その際カオス振動は加振振動数を高周波側から減少させると定常振動から跳躍を伴い発生する。

(2) 加振力振幅を増大させるとカオス振動の発生する不安定領域は高振動数側に移行する。定常振動からカオス振動に移行する際、カオス状振動の発生する振動数は加振振幅の増大に対して複雑に変化する。

(3) 初期軸圧縮変位が真直ばりの座屈軸変位の2倍から2.5倍に変化すると対応するカオス振動のストレンジアトラクタの相関次元は3.8から4.2の値となることが明らかとなった。

(4) 第1次振動数の第2次ならびに第3次の高調波共振近傍で生ずるカオス状振動をも確認された。

本実験でフラクタル次元の計算に関し有益な助言をいただいた本学一般教育物理学の山本隆夫先生および

IBM Research Center の Dr. C. - K. Lee に謝意を表す。また実験を通し助言をいただいた工学部 長屋幸助先生に感謝する。さらに実験の遂行に尽力された卒業生 根岸修君 [PILOT], 本学部学生 山越二郎君, 森田知成君, 図面作成に協力された加藤淳一君, 黒沢成行君に感謝する。また実験処理, 数値計算には Hp 9816 および本学情報処理センタ計算機 M 660 D を用いたことを付記する。

文 献

- (1) Tseng, W. Y. and Dugundji, J., *Trans. ASME*, ser E, **38** (1971), 467.
- (2) Yamaki, N., Otomo, K. and Mori, A., *J. Sound Vib.* **71**-3(1980), 347.
- (3) 永井, 機論, **51**-471, C(1985), 2820.
- (4) 永井, 機論, **52**-484, C(1986), 3047.
- (5) Moon, F. C. and Holmes, P. J., *J. Sound Vib.*, **65**-2(1979), 275.
- (6) Moon, F. C., *Chaotic Vibrations*, (1987), J. Wiley and Sons, New York.
- (7) Dowell, E. H., *J. Sound Vib.*, **85**-3(1982), 333.
- (8) Rudowski, J. and Semplíńska-stupnicka, W., *Ing-Arch.*, **57**(1987), 243.
- (9) 永井・大月, 機論, **52**-479, C(1986), 1922.
- (10) Grassberger, P. and Procaccia, I., *Physica*, **13D**(1984), 34.
- (11) C. -K. Lee and F. C. Moon, *Phys. Lett.*, **114**A-5(1986), 222.
- (12) 高安編, フラクタル科学, (1987), 58, 朝倉.