多自由度非線形振動系の
ノンパラメトリック同定法*安田 仁彦^{*1}, 葉 建瑞^{*2}A Nonparametric Identification Technique for Nonlinear
Multi-Degree-of-Freedom Vibratory Systems

Kimihiro YASUDA and Jianrui YE

In a previous paper, a new nonparametric method for the identification of nonlinear single-degree-of-freedom vibratory systems was presented. In this paper, the technique is generalized so that it can identify multi-degree-of-freedom vibratory systems, among which are those with their restoring or damping forces dependent on both displacements and velocities. The main procedure of this technique is to divide the regions of displacements and/or velocities into small subdomains and express the restoring or damping forces by interpolating over each subdomain. Some numerical examples are given, and the technique is shown to be valid.

Key Words: Vibration, Nonparametric Identification Technique, Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom System, Principle of Harmonic Balance, Subdomain

1. ま え が き

機械・構造物などの振動系の実験的同定法としてモード解析法が広く用いられている。このモード解析法は対象とする振動系を線形系として同定するものである。ところが実際の機械・構造物は多くの非線形要素を有する。したがって機械・構造物の動特性把握に対する要求がきびしくなるにつれて、対象を線形モデルとして同定したのでは不十分な場合が多くなり、非線形同定法が多くの研究者の関心を引いている^{(1)~(11)}。

前報⁽⁹⁾で著者の一人は、一自由度系を対象にして、非線形特性が定性的に既知であることを前提としないノンパラメトリック同定法を提案した。そこでは振動系の復元力あるいは減衰力を、変位あるいは速度の離散点における値を内挿した形で表し、離散点における復元力あるいは減衰力の値を系のパラメータとともにハーモニックバランスの原理に基づいて定めた。数値シミュレーションによってこの方法が有効であることを確かめた。

本報告では、前報⁽⁹⁾で提案した方法が多自由度非線

形振動系の同定法として一般化できることを示す。特に復元力や減衰力が変位と速度の両者に依存する振動系であっても同定できることを示す。このためはじめに、前報の同定法を一般的に定式化し、次にいくつかの振動系を取り上げ、数値シミュレーションによってこの同定法の有効性を確かめる。数値シミュレーションのため、二自由度の Duffing 系、折れ線復元力を有する振動系、クーロン摩擦の作用する系を取り上げ、また特に復元力あるいは減衰力が変位と速度の両者に依存する系の例として、一自由度の Van der Pol 系を取り上げる。

2. 同定法の提案

質量が $m_i (i=1, 2, \dots, n)$ である n 個の質点をばねとダンパで互いにあるいは固定壁と結合してできた図 1 のような自由度 n の多自由度振動系を考える。ダンパの減衰力あるいはばねの復元力は非線形性をもち得るものとする。質点 i の変位を x_i 、質点 i に作用する外力を q_i とおく。質点 i に作用する復元力と減衰力の和を内力とよぶことにし、これを N_i とおく。このときこの振動系を支配する運動方程式は

$$m_i \ddot{x}_i + N_i = q_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる。

* 原稿受付 平成元年 10 月 3 日。

^{*1} 正員、名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市中種区不老町)。

^{*2} 学生員、名古屋大学大学院。

この振動系を実験的に同定するとは、変位 x_i などの応答のデータと外力 q_i のデータを合せた実験データを用いて質量 m_i と内力 N_i を定めることである。

この振動系を同定するため、まず内力 N_i の表示法を考える。内力 N_i は一般に変位 x_i と速度 $\dot{x}_i$ の関数と考えることができる。そこで $x_i, \dots, x_n$ と $\dot{x}_i, \dots, \dot{x}_n$ を変数とする $2n$ 次元の空間を考える。この空間を、有限要素法で行われるように小さな要素に分割する。各要素の大きさは同定の精度に応じて適当なものとする。分割する範囲は、対象とする振動系の変位、速度の変化範囲を含む有限の領域とする。各要素に節点を定め、節点に通し番号 $j(j=1, 2, \dots, M)$ をつける。関数 N_i は節点 j における値 N_{ij} の内挿によって表されたと考える。そこで節点 j において 1 の値をとり、それ以外の節点では零の値となる大域的な形状関数 ϕ_j を導入し、関数 N_i が

$$N_i = \sum_{j=1}^M \phi_j N_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

の形に表されるようにする。式(2)を用いれば、関数 N_i を定めることはパラメータ N_{ij} を求めることに帰着される。したがっていま考えている振動系の同定とは、質量を表すパラメータ $m_i(i=1, 2, \dots, n)$ と節点における N_i の値を表すパラメータ $N_{ij}(i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, M)$ を定めることに帰着される。

パラメータ m_i と N_{ij} を定める手順は前報⁽⁹⁾とほとんど同様で、以下のようなものである。

系に任意の周期外力 $q_i(i=1, 2, \dots, n)$ を作用させ、それによって振動系に周期的な定常振動 $x_i(1, 2, \dots, n)$ を発生させる。発生した振動 x_i を外力 q_i とともに一周分を測定する。そのデータを用いて x_i, q_i をそれぞれ次のようにフーリエ級数に展開する。

$$x_i = (X_i)_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ (X_i)_k \cos k\omega t + (X_i)^*_k \sin k\omega t \}$$

$$q_i = (Q_i)_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ (Q_i)_k \cos k\omega t + (Q_i)^*_k \sin k\omega t \}$$

$$(i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

ここに ω は外力の周期 T から式 $\omega=2\pi/T$ によって定められる基本振動数である。また、 $(X_i)_0, (X_i)_k,$

$(X_i)^*_k, (Q_i)_0, (Q_i)_k, (Q_i)^*_k(k=1, 2, \dots, \infty)$ はフーリエ係数である。

形状関数 ϕ_j は変位 $x_i(i=1, 2, \dots, n)$ と速度 $\dot{x}_i(i=1, 2, \dots, n)$ の関数であるから、これも外力と同じ周期の周期関数になる。したがって式(2)により、 $N_i(i=1, \dots, n)$ は N_{ij} を含んだ形で次のようにフーリエ級数の形に展開できる。

$$N_i = \sum_{j=1}^M \{ (\phi_j)_0 \\ + \sum_{k=1}^{\infty} [(\phi_j)_k \cos k\omega t + (\phi_j)^*_k \sin k\omega t] \} N_{ij} \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(3)、(4)を式(1)に代入すると

$$- \omega^2 m_i \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \{ (X_i)_k \cos k\omega t + (X_i)^*_k \sin k\omega t \} \\ + \sum_{j=1}^M \{ (\phi_j)_0 \\ + \sum_{k=1}^{\infty} [(\phi_j)_k \cos k\omega t + (\phi_j)^*_k \sin k\omega t] \} N_{ij} \\ = (Q_i)_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ (Q_i)_k \cos k\omega t + (Q_i)^*_k \sin k\omega t \} \\ (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (5)$$

を得る。ここに、 $(\phi_j)_0, (\phi_j)_k, (\phi_j)^*_k(k=1, 2, \dots, \infty)$ はフーリエ係数である。この各式において、ハーモニクバランスの原理に基づいて定数項および低次から適当な打ち切り次数までの各調波項の係数を等しいとおくと、パラメータ m_i および N_{ij} を未知数とする線形連立方程式が導かれる。打ち切り次数を n_t とおくと、このとき得られる方程式の数は $n(2n_t+1)$ である。

外力の基本振動数 ω を変化させて同様の線形連立方程式を求め、上の方程式と合せる。 ω を n_w とおりに変化させたとすると方程式の数が $n(2n_t+1) \times n_w$ である連立方程式が得られる。この数が未知パラメータの数より多くなるよう n_t と n_w を定め、得られた連立方程式を最小二乗法により解いてパラメータ m_i および N_{ij} を定めれば同定が完了する。

振動データを収集するとき、もし変位および速度の同定範囲があらかじめ指定されているならば、振動数を共振点付近を含むようにしたりあるいは外力を大きめにとり、上の線形代数方程式に、同定範囲にあるすべての節点に関する N_{ij} が含まれるようにする。同定の範囲があらかじめ指定されていなければ、 N_i のフーリエ級数に現れる N_{ij} だけを自動的に定めるようにする。

式(1)において、もし内力 N_i が変位のみ関数 N_{ri} と速度のみ関数 N_{di} に分離でき

$$N_i = N_{ri} + N_{di} \quad \dots\dots\dots (6)$$

のようにおける場合には、変位 $x_1, \dots, x_n$ のみおよび

図1 n 自由度振動系

速度 $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$ のみをそれぞれ変数とする n 次元の空間を考え、 N_{ri} を前者の空間内で、 N_{di} を後者の空間内でそれぞれ式(2)の形に表して同定を行ったほうが未知数が少なくすみ、同定の精度がよくなる。また特に N_{ri}, N_{di} の例えば一方が線形の式で与えてよいような場合には、その項は線形の式で与え、残りの項を式(2)のように表して同定を行うと同定の精度がよくなる。これらについては数値例を用いて説明する。

3. 同定の数値例

提案した同定法の有効性を検討するため、ここでいくつかの非線形振動系を取り上げて数値シミュレーションを行う。数値シミュレーションの方法は前報と同じで、取り上げた振動系の運動方程式を数値積分法によって解いて応答のデータを求める。この応答データを外力のデータと合せて実験データとみなし同定を行う。式(2)の形状関数としてここでは線形形状関数を用いる。また内力の同定範囲は、収集した振動データに応じて自動的に定める方法をとる。

3.1 Duffing 振動系 はじめに二自由度の Duffing 振動系を取り上げる。減衰力として粘性減衰力が作用するものとする、運動方程式は

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^2 c_{ij} \dot{x}_j + N_{ri} = q_i \quad (i=1, 2) \dots \dots \dots (7)$$

の形となる。ここに復元力 $N_{ri} (i=1, 2)$ は

$$\begin{aligned} N_{r1} &= k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \varepsilon_{11}x_1^3 + \varepsilon_{12}(x_1 - x_2)^3 \\ N_{r2} &= k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + \varepsilon_{21}(x_2 - x_1)^3 + \varepsilon_{22}x_2^3 \end{aligned} \dots \dots (8)$$

である。

この振動系の応答のデータを数値的に求めるため、各パラメータの値を

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = 1.0, \\ c_{11} &= c_{22} = 0.1, \quad c_{12} = c_{21} = -0.05, \\ k_{11} &= k_{22} = 2.0, \quad k_{12} = k_{21} = -1.0, \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{22} = 0.1 \end{aligned} \dots \dots \dots (9)$$

とする。また外力を

$$q_1 = 1.0 \cos \omega t, \quad q_2 = 0 \dots \dots \dots (10)$$

で与えられるように質点 1 にのみ加えることにする。これらの値に対して式(7)の定常振動を数値積分法で求め、応答のデータとみなす。外力の振動数 ω を 0.1 から 2.5 の範囲で 0.1 刻みに変化させ、変位 x_1, x_2 の一周期分 256 個の定常振動のデータを数値的に求めた。

式(7)の内力 $N_i (i=1, 2)$ のうち減衰力 N_{di} は粘性減衰力であり、線形式で与えられている。同定にあたってはこれがあらかじめわかっているとして、減衰力

	Exact	Identified		Exact	Identified
m_1	1.000	1.008302	c_{11}	0.100	0.097129
m_2	1.000	0.876971	c_{12}	-0.050	-0.046151
			c_{22}	0.100	0.089411

(a) 質点 1 に作用する復元力 N_{r1}

(b) 質点 2 に作用する復元力 N_{r2}

図 2 二自由度 Duffing 系の同定結果 ($n_t=5$)
(一方の質点に外力を加えた場合のデータのみ使用)

N_{di} を式(7)の左辺の第2項の形におき係数 c_{ij} を未知パラメータとした。復元力 N_{ri} は変位 x_1, x_2 だけの関数であるので、変位 x_1, x_2 を変数とする空間(この場合は平面)を考え、これを要素に分割し、そこに定めた節点における値を未知パラメータとする。ここでは変位 x_1, x_2 の平面を、直角をはさむ2辺の長さが1.0である直角三角形の要素で分割し、三角形の頂点に節点をおいた。

さきに数値的に求めた振動データをすべて用い、フーリエ級数展開の打ち切り次数 n_t を1から10の範囲で変えて同定を行った。その結果 n_t が3以上のとき同定が可能であることがわかった。例として $n_t=5$ の場合の同定結果を図2に示す。図2中の上の表はパラメータ m_i と c_{ij} の同定結果を正しい値と比較して示したものである。また下の図(a), (b)はそれぞれ質点1, 2に作用する復元力 N_n の同定結果(○で示した)を正しい値(破線で示した)と比較して三次元的に表示したものである。

図2から、同定範囲の周辺を除いて妥当な同定結果が得られていることがわかる。同定範囲の周辺で大きな誤差が見られるのは、周辺における N_{ri} に関する方程式の数が少ないためと思われる。

振動データの収集の仕方の影響を見るため、まず、

外力の加え方は式(10)と同じにし、振動数 ω の範囲も変えず、刻み幅のみを0.05に変えてデータ数を図2の場合の2倍にして同定を行ってみた。このようにしても同定精度にたいした向上は見られなかった。

そこで次に外力の加え方を変えることでデータ数を図2の場合の2倍にしてみた。外力の加え方として、次式

$$q_1=0, q_2=1.0 \cos \omega t \quad \cdots \cdots (11)$$

のように質点2に加える場合を考え、振動数 ω の範囲、刻み幅とも図2の場合と同じにし、図2のデータと合せた。この場合には、フーリエ級数展開の打ち切り次数 n_t が2以上の場合に同定できることがわかった。 $n_t=5$ の場合の同定結果を図3に示す。図3を図2と比較してわかるように、二つの質点に外力を加えて収集した振動データを用いると同定結果が著しく改良される。図2の場合と異なってこの場合には、一方の質点に関連するパラメータを定める方程式の右边がいずれも零であるということがなくなって、数値計算に際しての誤差が小さくなるためと思われる。

打ち切り次数 n_t の影響を見るため、図3と同じデータを用いて $n_t=10$ とした場合の結果を図4に示す。図3と図4を比較してわかるように、 m_{ii}, c_{ij} の同定値はともに正しい値と一致するが、復元力に関しては、

	Exact	Identified		Exact	Identified
m_1	1.000	0.998774	c_{11}	0.100	0.100839
m_2	1.000	0.998774	c_{12}	-0.050	-0.050698
			c_{22}	0.100	0.100839

図3 二自由度 Duffing 系の同定結果 ($n_t=5$)
(両質点にそれぞれ外力を加えた場合のデータを使用)

$n_t=10$ の同定結果は $n_t=5$ のそれより同定できた範囲の周辺において精度がよい。これにより、同定範囲の周辺における同定精度は n_t を大きくすることによって高められていることがわかる。

三自由度の Duffing 振動系に対しても同定を行った。減衰力はここでも粘性減衰とし、減衰力 N_{di} は線形式で表した。復元力 N_{ri} は、変位 x_1, x_2, x_3 を変数とする空間を四面体で分割し⁽¹²⁾、四面体の頂点に節点を定め式(2)の表示式を用いた。振動数が0.1から2.5までの範囲で0.025刻みに変化させ、 $1.0 \cos \omega t$ で与えられる調和外力を各質点にそれぞれ加えた場合の変位のデータを収集した。すべてのデータを用いて同定を行った結果、ほぼ正しい値に一致する同定結果が得られた。これに対し、一つの質点のみを加振して得られる振動データを用いて同定を行ったときには同定誤差がかなり大きかった。

3・2 折れ線復元力をもつ振動系 次に折れ線復元力を持つ二自由度振動系を取り上げる。減衰力として粘性減衰力が作用するものとする。運動方程式は式(7)と同じ形となる。ただし復元力 N_{ri} はここでは

$$\begin{aligned} N_{r1} &= F_1 + F_{12} \\ N_{r2} &= -F_{12} + F_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(12)$$

となる。ここに

$$F_i = \begin{cases} k_b x_i - (k_b - k_a) x_0 & (x_i > x_0) \\ k_a x_i & (|x_i| \leq x_0) \quad (i=1, 2) \\ k_b x_i + (k_b - k_a) x_0 & (x_i < -x_0) \end{cases}$$

$$F_{12} = \begin{cases} k_b(x_1 - x_2) - (k_b - k_a)x_0 & (x_1 - x_2 > x_0) \\ k_a(x_1 - x_2) & (|x_1 - x_2| \leq x_0) \\ k_b(x_1 - x_2) + (k_b - k_a)x_0 & (x_1 - x_2 < -x_0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(13)$$

である。

同定の数値例を示すため、

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_{22} = 1.0, \\ c_{11} &= c_{22} = 0.1, \quad c_{12} = c_{21} = -0.05, \\ k_a &= 0.2, \quad k_b = 2.0, \quad x_0 = 3.0 \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

とする。

外力は、式(10)と式(11)に与えられるように1.0の大きさの調和外力をそれぞれ質量 m_1 と m_2 の質点に作用させ、振動数 ω を0.1から2.5までの範囲で0.1刻みに変化させ、定常周期振動の一周期分256個の変位データを数値計算で求め、外力のデータと合せて、実験データとみなした。

同定にあたって、ここでも内力 N_i のうち減衰力 N_{di} に対しては線形式を仮定した。復元力 $N_{ri}(i=1, 2)$

	Exact	Identified		Exact	Identified
m_1	1.000	0.995876	c_{11}	0.100	0.100656
m_2	1.000	0.995876	c_{12}	-0.050	-0.050370
			c_{22}	0.100	0.100656

図4 二自由度 Duffing 系の同定結果 ($n_t=10$)
(両質点にそれぞれ外力を加えた場合のデータを使用)

は, x_1, x_2 を変数とする平面に節点を定めて式(2)の形の内挿式を用いる。ここでも変位 x_1, x_2 の平面は, 3・1節の場合と同じく, 直角をはさむ2辺の長さが1.0である直角三角形の要素で分割し, 三角形の頂点に節点を置いた。

すべての振動データを用い, フーリエ級数展開の打ち切り次数 n_t を1から10の範囲で変化させ, 同定を行った。その結果 n_t が3以上のとき同定が可能であることがわかった。同定結果は n_t によらずほとんど同じであったので, 一例として, $n_t=6$ の場合の結果を図5に示す。 m_i, c_{ij} などの値は正しい値とよく一致し, 復元力も同定範囲の周辺を除いて正しい値とよく一致している。

3・3 クーロン摩擦の作用する振動系 もう一つの例として, クーロン摩擦力の作用する二自由度振動系を取り上げる。復元力は線形復元力とすると, 運動方程式は

$$m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^2 k_{ij} x_j + N_{di} = q_i \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。 N_{di} は粘性減衰力とクーロン摩擦力を合せた減衰力を表す。

数値的に振動データを求めるため,

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = 1.0, \\ k_{11} &= k_{22} = 2.0, k_{12} = k_{21} = -1.0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

とし, また減衰力 N_{di} を

$$\begin{aligned} N_{d1} &= 0.1 \dot{x}_1 - 0.05 \dot{x}_2 + 1.0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_1) \\ &\quad + 1.0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ N_{d2} &= -0.05 \dot{x}_1 + 0.1 \dot{x}_2 + 1.0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ &\quad + 1.0 \operatorname{sgn}(\dot{x}_2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

とする。外力は式(10)と式(11)で与えられる二つの場合とし, 外力の振動数 ω を1.2から3.0までの範囲で, 0.1刻みに変化させ, 定常振動の一周期分256個の変位データと速度データを数値計算で求め, 応答のデータとした。

この問題では, 速度 $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ を変数とする平面を考え, 減衰力 $N_{di} (i=1, 2)$ の同定範囲にわたって, 直角をはさむ2辺の長さを3.0とする直角三角形要素で均一に分割し, 減衰力 $N_{di} (i=1, 2)$ を式(2)の形において。

上で求めた振動データを用い, フーリエ級数展開の打ち切り次数 n_t を1から10の範囲で変化させて同定を行った。その結果 n_t が5以上のとき同定が可能であることがわかった。例として $n_t=10$ の同定結果を図6に示す。 m_i, k_{ij} などの値は正しい値とよく一致し, N_{di} も同定範囲の周辺を除いて正しい値とよく一致している。

3・4 Van der Pol 振動系 最後に, 内力が変位

図5 折れ線復元力をもつ二自由度振動系の同定結果 ($n_t=6$)

と速度の両者に依存する振動系の例として、一自由度の Van der Pol 振動系を取り上げる。運動方程式は

$$m\ddot{x} + N = q \quad \dots\dots\dots (18)$$

である。ただし内力 N は

$$N = -\varepsilon(1-x^2)\dot{x} + kx \quad \dots\dots\dots (19)$$

で与えられる。この式の内力 N は変位 x と速度 $\dot{x}$ の両者の関数である。

数値シミュレーションのため、パラメータの値を

$$m=1.0, \varepsilon=0.1, k=1.0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

とする。外力は

$$q=1.0 \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (21)$$

の調和外力とする。 ω を 0.5 から 1.2 までの範囲で、0.1 刻みに変化させ、定常振動の一周分 512 個の変位と速度のデータを応答のデータとしてそれぞれ数値計算で求めた。

この問題では、変位 x と速度 $\dot{x}$ を変数とする平面を考え、直角をはさむ 2 辺の長さを 1.0 とする直角三角形要素で分割し、三角形の頂点に節点を定め、 N を式(2)によって表した。

上で求めた振動データを用い、フーリエ級数展開の打ち切り次数 n_t を 1 から 10 の範囲で変化させて同定を行った。その結果フーリエ級数展開の打ち切り次数 n_t が 5 以上のとき同定できることがわかった。図 7, 8 に $n_t=5$ と $n_t=10$ の場合の同定結果を示す。いずれ

の場合も m は精度よく同定されている。また N のほうは、 $n_t=5$ の場合には同定範囲の周辺で誤差があるが、 $n_t=10$ の場合には同定範囲の周辺も含めて精度よく同定が行われている。

4. ま と め

本報告では、非線形特性が既知であることを前提としないノンパラメトリック同定法を、多自由度非線形振動系に適用できるように一般的に定式化した。この同定法は、対象とする振動系の変位と速度を変数とする空間内に節点を定め、節点における内力の値を用いて任意点における内力を内挿した形で表し、節点における内力の値を系のパラメータとともにハーモニックバランスの原理に基づいて定めるものである。

いくつかの振動系を対象にして数値シミュレーションを行った結果、フーリエ級数の打ち切り次数を適当にとれば、提案した方法で同定が可能であることが確かめられた。同定の精度を上げるため、対象とする振動系の特定の質点のみに外力を加えるより、多くの質点にそれぞれ外力を加えて収集した振動データを用いるほうが精度がよくなることがわかった。

この報告の数値計算は名古屋大学大型計算機センターの FACOM M-780/20 を用いて行った。

	Exact	Identified		Exact	Identified
m_1	1.000	0.991120	k_{11}	2.000	1.982815
m_2	1.000	0.991107	k_{12}	-1.000	-0.980764
			k_{22}	2.000	1.982585

図 6 クーロン摩擦の作用する二自由度振動系の同定結果 ($n_t=10$)

	Exact	Identified
m	1.000	0.993342

	Exact	Identified
m	1.000	0.996061

図 7 一自由度 Van der Pol 振動系の同定結果
($n_t=5$)

図 8 一自由度 Van der Pol 振動系の同定結果
($n_t=10$)

文 献

- (1) Masri, S. F. and Caughey, T. K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **46**-2(1979), 433.
- (2) Udawadia, F. E. and Kuo C. P., *Earthqu. Eng. Struct. Dyn.*, **9**(1981), 385.
- (3) Yang, Y. X. and Ibrahim, S. R., *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, **107**(1985), 60.
- (4) Stanway, R., Sproston, J. L. and Stevens, B., *Proc. Inst. Mech. Eng.*, **199**, C(1985), 79.
- (5) 佐藤・岩田・内湯, 機論, **54**-497, C(1988), 87.
- (6) 安田・河村・渡辺, 機論, **53**-495, C(1987), 2191.
- (7) 安田・河村・渡辺, 機論, **54**-500, C(1988), 816.
- (8) 安田・河村, 機論, **54**-504, C(1988), 1708.
- (9) 安田・河村, 機論, **54**-507, C(1988), 2550.
- (10) 安田・渡辺, 機論, **55**-512, C(1989), 833.
- (11) 安田・神谷, 機論, **55**-516, C(1989), 1609.
- (12) 戸川, 有限要素法概論, (1983), 213, 培風館.