指南車の力学的考察*

(第2報, 外歯車のみによる差動歯車機構を用いた指南車)

両 角 宗 晴^{*1}, 岸 佐 年^{*2}

A Study of the Mechanics of the South-Pointing Chariot (2nd Report, The South-Pointing Chariot with the External Spur-Gear-Type Differential Gear Train)

Muneharu MOROZUMI and Satoshi KISHI

A study of the mechanics of a new type South-Pointing Chariot with the differential gear train of the external spur gear was conducted. Firstly, the pattern of this differential gear type South-Pointing Chariot is replaced with the combined planetary gear system in which two simple planetary gear trains are connected. Secondly, through a theoretical analysis, it is confirmed that power circulation occurs in the system. Thus the principle that fulfills the fundamental function of the South-Pointing Chariot is explained. Thirdly, an experimental design and manufacture of the new type South-Pointing Chariot is carried out. The theories in this analysis are verified by a practical test run of the Chariot.

Key Words: Gear, South-Pointing Chariot, Combined Planetary Gear System, Power Circulation

1. 緒 言

指南車は司南車とも言われ、その車の台上の人形の向きをあらかじめ南を指すように設定すれば、車がどのように引き回されても人形は常に南を指し続けるという二輪車であり、磁石は用いられておらずすべて歯車などの機械式な機構から成り立っている。

この指南車は古代中国において発明され、馬鈞、解飛、令狐生、祖冲之、金公立、燕肅、呉徳仁などによりそれぞれ独立に試作が行われた。これらは固定軸歯車式指南車であり引き回し方によっては指南車の機能を果たさないこともある。その後1947年にLanchesterが差動歯車式指南車の模型を作り⁽¹⁾これが指南車の一つの基本型となり中国、米国、日本でも多くの学者が模型の試作や運動解析を行っている。そして上述のような技術史的見地からの考察は著者らによって詳述されている^{(2)~(6)}。また著者らはLanchesterの示したかさ歯車式差動歯車機構を用いた指南車について、その機構・機能に対する力学的考察を行っている⁽⁷⁾。

本研究ではかさ歯車を用いないで外歯車のみを用い

た新型の差動歯車式指南車を試作し、その機構・機能を満足する条件を求めるための力学的解析を行う。そこでこの新型差動歯車式指南車の差動歯車機構をI型2K-H型遊星歯車機構と外歯車のみを用いた改良II型2K-H型遊星歯車機構の組合せから成る複合無段遊星歯車装置と考え、左右両車輪からの回転力(入動力)の流れを明らかにして、この指南車の機能を満足する条件を求める。

2. 理 論 解 析

2・1 指南車の機能を満たす条件式 図1は外歯車A', B₁, B₂, C', D'およびキャリアS'により機構が成立する改良II型2K-H型差動歯車機構を用いた指南車の基本的な構成を示す骨組図である。したがって指南車を構成している歯車はすべて外歯車のみである。この指南車において、車体が手前から紙面裏側に向かって前進し上方から見て時計方向に角度 $\theta(>0)$ だけ旋回する場合を考える。車輪PとQとの直径をいづれもDとし、車輪間隔をL、車体の中央点の旋回半径をrとすれば、車輪Pの回転角 ϕ_P は $\phi_P = (2r/D + L/D)\theta$ となり、したがって歯車A'は反時計方向に次式の ϕ_A だけ回転する。ただし z_a, z_b, z_c, z_d はそれぞれ歯車a, b, c, dの歯数を示す。

* 平成2年3月14日 東海支部第39期総会講演会において講演、原稿受付 平成元年4月13日。

^{*1} 正員、信州大学工学部(〒380 長野市若里500)。

^{*2} 正員、長野工業高等専門学校(〒381 長野市徳間716)。

次式となる。

$$\phi'_s = \frac{\phi'_A + i_A \phi'_C}{1 + i_A} = \left(\frac{2r}{D} - \frac{L}{D} \right) \frac{z_a z_c}{z_b z_d} - i_A \left(\frac{2r}{D} + \frac{L}{D} \right) \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \theta \quad \dots\dots\dots (12)$$

そして指南車に成るための条件は

$$\theta + \phi'_s = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

であるから式(12)を代入して整理し次式を得る。

$$\frac{2r}{D} \left(\frac{z_a z_c}{z_b z_d} - i_A \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \right) \theta + \frac{L}{D} \left(-\frac{z_a z_c}{z_b z_d} + \frac{D}{2L} \right) \theta + \frac{L}{D} \left(-i_A \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} + \frac{D}{2L} \right) \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

したがって次式が同時に成立すればよい。

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_a z_c}{z_b z_d} &= i_A \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \\ \frac{D}{2L} &= \frac{1}{1 + i_A} \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \\ \frac{D}{2L} &= \frac{i_A}{1 + i_A} \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

この式(15)は前述の式(8)に一致する。そこで、もし $z_a z_c / (z_b z_d) = z'_a z'_c / (z'_b z'_d) = 1$ および $i_A = z'_c z_{B1} / (z'_a z_{B2}) = 1$ ならば $D = L$ とすれば指南車と成り得ることがわかり前述の式(9)と同様な式が得られた。

いま指南車を旋回させるのに片方の車輪Qを止めて、車輪Qと地面との接点を中心として車体を時計方向に旋回させると $\phi'_c = 0$ となり、旋回半径は $r = L/2$ となるから式(5)から次式を得る。

$$\phi'_s = \frac{-\frac{2L}{D} \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \theta}{1 + i_A} \quad \dots\dots\dots (16)$$

そこでこれを式(6)の $\theta + \phi'_s = 0$ に代入して次式を得る。

$$\theta + \frac{-\frac{2L}{D} \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \theta}{1 + i_A} = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

したがって次式を得る。

$$1 + \frac{z'_c z_{B1} - \frac{2L}{D} \frac{z_a z_c}{z_b z_d}}{1 + i_A} \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

そこで、もし $z_a z_c / (z_b z_d) = 1$ および $i_A = z'_c z_{B1} / (z'_a z_{B2}) = 1$ ならば $D = L$ とすれば指南車となり、式(9)と同じ条件が得られる。

また車体を直進させる場合を考え、走行距離を l とすれば車輪Pの回転角 ϕ_P と車輪Qの回転角 ϕ_Q は $\phi_P = \phi_Q = 2l/D$ となり、したがって歯車A'の回転角 ϕ'_A は反時計方向に

$$\phi'_A = \phi_P \frac{z_a z_c}{z_b z_d} = \frac{2l}{D} \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \quad \dots\dots\dots (19)$$

となり、歯車C'の回転角 ϕ'_C は時計方向に

$$\phi'_C = -\phi_Q \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} = -\frac{2l}{D} \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる。したがってキャリアS'の回転角 ϕ'_s は次式となる。

$$\phi'_s = \frac{\phi'_A + i_A \phi'_C}{1 + i_A} = \frac{2l \left(\frac{z_a z_c}{z_b z_d} - i_A \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \right)}{1 + i_A} \quad \dots\dots\dots (21)$$

しかるに $z_a z_c / (z_b z_d) = z'_a z'_c / (z'_b z'_d) = 1$ および $i_A = z'_c z_{B1} / (z'_a z_{B2}) = 1$ の時は

$$\phi'_s = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。つまり直進の時はキャリアS'は回転しないことがわかる。

2・2 指南車における動力の流れ

さて図1に示す指南車を上方からみて時計方向に旋回させる場合、車輪Pが車輪Qより速く回転するから歯車A'の回転数は歯車C'の回転数より大であり、しかもA'とC'との回転方向が反対方向であることなどを考慮すると、この外歯車のみを用いた差動歯車式指南車を図2に示すようなI型2K-H型遊星歯車機構と外歯車のみを用いた改良II型2K-H型遊星歯車機構の組合せから成る複合遊星歯車装置に置き換えることができる。そして要素Iでは次式が成立する。ただし $\omega_A, \omega_C, \omega_S$ はそれぞれ歯車A, C, キャリアSの角速度を示し、また $z_C/z_A = i_0$ である。

$$\omega_S = \frac{\omega_A + i_0 \omega_C}{1 + i_0} \quad \dots\dots\dots (23)$$

また要素IIについては式(3), (4)より次式が得られる。ただし $\omega'_A, \omega'_C, \omega'_S$ はそれぞれ歯車A', C', キャリアS'の角速度を示す。

$$\omega'_S = \frac{\omega'_A + i_A \omega'_C}{1 + i_A} \quad \dots\dots\dots (24)$$

いま図2からキャリアSが固定だから $\omega_S = 0$ となり、また連結軸の関係から $\omega_A = \omega'_A, \omega_C = \omega'_C$ となるから式(23)より次式を得る。

$$\omega_C = -\frac{1}{i_0} \omega_A = \omega'_C = -\frac{1}{i_0} \omega'_A \quad \dots\dots\dots (25)$$

そしてこれを式(24)に代入して次式を得る。

$$\omega'_S = \frac{i_0 - i_A}{i_0(1 + i_A)} \omega_A \quad \dots\dots\dots (26)$$

この場合、要素IIはA'とC'とが駆動軸でキャリアS'が従動軸の差動歯車装置である。いまこの要素IIを、歯車C'を固定し歯車A'のみの回転によってキャリアS'に ω'_{S1} の角速度と N_{01} の出力を伝達する第1成

分遊星歯車装置と、歯車 A' を固定し歯車 C' のみの回転によってキャリア S' に ω_{s2} の角速度と N_{02} の出力を伝達する第 2 成分遊星歯車装置からなると考える。そしてキャリア S' への全出力を N_o 、出力トルクを M'_s とすると次式が成立する。

$$\begin{aligned} N_o &= M'_s \omega'_s = M'_s (\omega'_{s1} + \omega'_{s2}) \\ &= N_{o1} + N_{o2} \end{aligned} \quad (27)$$

ゆえに次式を得る。

$$M'_s = \frac{N_o}{\omega'_s} = \frac{N_{o1}}{\omega'_{s1}} = \frac{N_{o2}}{\omega'_{s2}} \quad (28)$$

これより次式を得る。

$$N_{o1} = \frac{\omega'_{s1}}{\omega'_s} N_o \quad (29)$$

$$N_{o2} = \frac{\omega'_{s2}}{\omega'_s} N_o \quad (30)$$

* 第 1 成分遊星歯車装置 (C' 固定, A' 駆動, S' 従動)
式(24)において $\omega'_c = 0$ において次式を得る。

$$\omega'_{s1} = \frac{1}{1 + i_A} \omega'_A \quad (31)$$

そして式(29)に式(26)と(31)とを代入して次式を得る。

$$N_{o1} = \frac{i_o}{i_o - i_A} N_o \quad (32)$$

* 第 2 成分遊星歯車装置 (A' 固定, C' 駆動, S' 従動)
式(24)において $\omega'_A = 0$ において次式を得る。

$$\omega'_{s2} = \frac{i_A}{1 + i_A} \omega'_C \quad (33)$$

そして式(30)に式(25), (26), (33)を代入して次式を得る。

$$N_{o2} = -\frac{i_A}{i_o - i_A} N_o \quad (34)$$

そこで次式を得る。

$$\frac{N_{o2}}{N_{o1}} = -\frac{i_A}{i_o} < 0 \quad (35)$$

この式(35)から動力循環の生じることがわかる。

いま歯車 A, C の回転角を ϕ_A, ϕ_C で表し式(1), (2)などを用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\omega_A}{\omega_C} &= -i_o = \frac{\phi_A}{\phi_C} = \frac{\phi'_A}{\phi'_C} \\ &= -\frac{\frac{2r}{D} + \frac{L}{D} \frac{z_a z_c}{z_b z_d} \theta}{\frac{2r}{D} - \frac{L}{D} \frac{z'_a z'_c}{z'_b z'_d} \theta} \\ &= -\frac{2r+L}{2r-L} = -\frac{2r+D}{2r-D} \\ \therefore i_o &= \frac{2r+D}{2r-D} = \frac{1+\frac{D}{2r}}{1-\frac{D}{2r}} > 1 \end{aligned} \quad (36)$$

すなわち i_o は r の関数であり r の変化に伴って無段階に変化する。そして図 1 から $i_A = 1$ だから $(i_o - i_A) > 0$ となり、したがって式(32)から $N_{o1} > 0$ 、式(34)から $N_{o2} < 0$ となる。以上のことからこの複合無段遊星歯車装置内の動力の流れは図 3 によって示される。すなわち要素 II の A' を固定した第 2 成分遊星歯車装置において出力 ($-N_{o2}$) がキャリア S' から出力せず逆に S' から C' に入力として入り、この動力が $B_2 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow D' \rightarrow B_1 \rightarrow B_2$ の流れ方で循環することを意味する。そしてこの場合次式が成立する。

$$N'_c = \eta_1 (-N_{o2}) \quad (37)$$

ただし η_1 は要素 II において歯車 A' を固定した第 2 成分遊星歯車装置においてキャリア S' を駆動側、歯車 C' を従動側とした時の効率であり次式から求められる⁽⁸⁾。

$$\eta_1 = \frac{\eta'_o(1+i_A)}{1+\eta'_o i_A} \quad (38)$$

η'_o は要素 II の基準効率であり歯車 A' と歯車 D' とのかみあい効率を η'_1 、歯車 D' と歯車 B₁ とのかみあい効率を η'_2 、歯車 B₂ と歯車 C' とのかみあい効率を η'_3 として次式で表される。

$$\eta'_o = \eta'_1 \eta'_2 \eta'_3 \quad (39)$$

さて要素 I の歯車 C に流れ込んだ動力 N'_c は歯車 B、歯車 A を経て N'_c となって要素 II の歯車 A' に流れるが、要素 I のキャリア S は固定されているから次式が成立する。

$$N''_c = \eta_o N'_c \quad (40)$$

ただし η_o は要素 I の基準効率であり、図 2 において歯車 A と歯車 B とのかみあい効率を η_1 、歯車 B と歯車 C とのかみあい効率を η_2 、また図 1 において歯車 a と歯車 b、歯車 c と歯車 d、歯車 a' と歯車 b'、歯車 c' と歯車 d' のあみあい効率をそれぞれ $\eta_{ab}, \eta_{cd}, \eta'_{ab}, \eta'_{cd}$

図 2 複合遊星歯車装置

とすれば次式で表される。

$$\eta_0 = \eta_1 \eta_2 = \eta_{ab} \eta_{cd} \eta'_{ab} \eta'_{cd} \quad (41)$$

以上のことから歯車 A と歯車 A' とを連結する軸にはこの N_c'' と N_i とが合流して N_A' となって流れる。すなわち次式が成立する。

$$N_A' = N_i + N_c'' \quad (42)$$

次に要素 II の C' を固定した第 1 成分遊星歯車装置においては、歯車 A' に N_A' が入力として入り、S' から N_{01} が出力として出るから次式が成立する。

$$N_{01} = \eta_{11} N_A' \quad (43)$$

ただし η_{11} は要素 II において歯車 C' を固定した第 1 成分遊星歯車装置において歯車 A' を駆動側とし、キャリア S' を従動側とした時の効率であり次式が得られている⁽⁸⁾。

$$\eta_{11} = \frac{1 + \eta_0' i_A}{1 + i_A} \quad (44)$$

そこで式(42)から $N_i = N_A' - N_c''$ を得るから上記の各式を用いて次式を得る。

$$N_i = \frac{(1 + i_A)(i_0 - \eta_0 \eta_0' i_A)}{(i_0 - i_A)(1 + \eta_0' i_A)} N_0 \quad (45)$$

これより図 2 に示す複合無段遊星歯車装置では $i_A = 1$ であるから理論効率計算式として次式を得る。

$$\eta = \frac{(i_0 - 1)(1 + \eta_0')}{2(i_0 - \eta_0 \eta_0')} \quad (46)$$

ただし i_0 は式(36)から求められる。以上のことから図 1 に示す指南車を上方から見て時計方向に回転させる場合は、外観上は左右両車輪から動力が入力しているように観察されるが、実際には車輪 P の回転が車輪 Q より早く回転しているから動力は左車輪 P から入り、歯車 A' から動力の一部はキャリア S' に出力される。しかしその時、歯車 C' から動力の一部が出力され、これが車輪 Q に戻り車輪 P に循環するのである。

いま指南車を回転させるのに片方の車輪 Q を止めて、その車輪と地面との接点を中心として時計方向に

回転させる時は、 $r = L/2 = D/2$ であるから式(36)から $i_0 = \infty$ となる。したがって式(32)から $N_{01} = N_0$ 、式(34)から $N_{02} = 0$ となり、図 3 において循環動力 N_{02} は零となり動力循環は生じない。

もし指南車を反時計方向に回転させる場合は、車輪 Q が車輪 P よりも速く回転して歯車 C' に動力が入り、キャリア S' に出力する。しかしこの時、歯車 A' から動力の一部が出力し車輪 P を経て車輪 Q に動力が循環する。そして効率 η は前述と同じ式となる。

2.3 指南車の試作 図 1 に示される差動歯車式指南車を大八車の車輪を用いて試作した。この場合、 $D = L = 850 \text{ mm}$, $z_a = z'_a = 56$, $z_b = z'_b = 42$, $z_c = z'_c = 60$, $z_d = z'_d = 80$, $z'_A = z'_B = z_{B1} = 20$, $z_{B2} = z'_C = 40$ に設計したので前述の指南車の条件式を満足している。図 4 は試作した指南車の写真を示す。この指南車を実際に路上で引き回し、左右両車輪間隔の微調整を行うと、キャリアの軸上に取付けた木製人形は常に所定の方角を指し示し満足な結果を得ることができた。

3. 結 言

遊星歯車機構を二つ結合した複合遊星歯車装置の力学的解析手法を用いて、外歯車のみから成る差動歯車機構を用いた新型式の指南車について、その機構・機能を満足する条件などを求めるための力学的解析を行った。その結果、複合無段遊星歯車装置と見立てた新型式の差動歯車式指南車内の動力の流れ現象を明らかにすることによって、指南車の機能が満たされる条件

図 3 装置内の動力の循環

図 4 試作した新型差動歯車式指南車

を説明できることが明らかになった。そして新型式の指南車の設計・試作を行い走行実験により指南車の条件を満たしていることを確認した。

本研究に際し、種々の示唆を与えられた中国同済大学の陸敬巖氏と(株)長岡歯車製作所の内山社長・山崎部長および多くの中国語文献の翻訳に助力された中国西安陝西機械学院の梁国顯氏に対し感謝の意を表します。また指南車の試作に協力された長野高専機械工学科実習工場の技官の諸氏・卒業研究生の諸君にお礼を申し上げます。

文 献

- (1) Lanchester, G., *The Yellow Emperor's Southpointing Chariot*, China Society, (1947).
- (2) 龐, 四川大学学報, 2 (1979), 95.
- (3) 中田, 日本機械学会会報, JSME ニュース, 8 (1981), 2.
- (4) 顔, 上海機械学院学報, 3 (1984), 31.
- (5) 陸, 自然辨証法通汎, 1-1 (1984), 53.
- (6) 両角・岸, 機械の研究, 41-6・7 (1989), 707・815.
- (7) 両角・岸, 機論, 56-522, C (1990), 462.
- (8) 岸・両角, 長野高専紀要, 20 (1989), 33.