有限・境界要素法による受動形磁気ダンパ の導体板形状の最適化*

金 森 満^{*1}, 石 原 好 之^{*2}

Shape Optimization of Conductor Slab on an Electromagnetic Damper by Boundary Element Method Combined with Finite Element Method

Mituru KANAMORI and Yoshiyuki ISHIHARA

The optimum shape of a conductor slab on an electromagnetic damper is determined by an optimization technique by the use of the Lagrange method of multipliers taking a serious view of a compact design. Firstly, damping coefficients were obtained by analysis of the eddy current in the conductor slab by the boundary element method combined with the finite element method. The numerical result agrees well with the experimental result in our previous report. Secondly, the optimum dimension of rectangular conductor slab was obtained by the least-square method and the optimization technique. The result of the optimization is verified in good agreement with the result of the least-square method. Thirdly, the optimum shape of conductor slab determined by the optimization technique. Furthermore the result is verified by an experimentation.

Key Words: Vibration, Electrical Engineering, Electromagnetic Damper, Optimization, Boundary Element Method, Finite Element Method, Damping Coefficient

1. 結 言

受動形磁気ダンパは、減衰力が非接触で作用するため摩擦や疲労がない、オイルが不用なため真空環境に適する。構造が簡単で安定な減衰力が得られるなどの利点があるため、盛んに研究されてきている^{(1)~(8)}。なかでも、設計に重要な、導体板の形状効果に関する研究は、長屋らによって報告されている^{(4)~(6)}。これらの報告では、長方形磁極と長方形導体板から成る磁気ダンパに関して、シンプレックス法により、導体板の最適寸法を検討している⁽⁴⁾。また、導体板形状を種々の多角形とした場合の減衰係数を数値解析的に求め、導体板の形状効果を検討している^{(5)~(6)}。しかし、所望の減衰係数を生じさせる導体板の最適形状に関する報告は、まだ見受けられない。磁気ダンパの設計にあたり、必要な減衰係数は、動的シミュレーションによりあらかじめ決定できる。したがって、所望の減衰係数を有し、かつ最適な磁気ダンパを設計する最適化問題に関する研究は、極めて有意義である。

最適化手法は、機械部品や構造物、ダム、および電極の最適形状の決定や、半導体の空乏層境界の決定など、多くの分野で盛んに研究されてきている^{(9)~(16)}。これらの方法は、エネルギーや応力、電界強度などの物理的考察に基づく方法と^{(9)~(11)}、物理的考察を介さない、最小二乗法に類する方法とに大別される^{(12)~(13)}。また、解析手法には、有限要素法や境界要素法が用いられている場合が多い^{(9)~(15)}。特に境界要素法は、最適形状決定問題において、考察する形状の境界で定式化できるため、繰返し計算時に誤差が変化しにくく、有限要素法と比較して、毎回要素分割を変える必要性もなく、極めて有利である^{(12)~(13)~(15)}。

そこで本研究では、コンパクト、軽量化に重点を置き、所望の減衰係数を有しかつ面積を最小にする導体板の最適形状を解析的に決定した。まず、磁極部を有限要素法で、他の導体板の部分を境界要素法で定式化し、磁場中を導体板が運動する際に生じる渦電流を解析し、減衰係数を求めた。境界要素には、角点の誤差が少なく、有限要素との接合に有利な 0-1 次混合要素を用いた⁽¹⁷⁾。磁極形状と磁束密度を一定とし、所望の減衰係数を生じさせる長方形導体板の寸法を、最小二乗法により求めた。ついで、所望の減衰係数を有し、かつ導体板面積を最小とする最適長方形寸法を、ラグラン

* 平成元年 6 月 28 日 第 26 回シンポジウムにおいて講演、原稿受付 平成元年 8 月 9 日。

^{*1} 正員、舞鶴工業高等専門学校 (〒625 舞鶴市宇白屋 234)。

^{*2} 正員、同志社大学工学部 (〒602 京都市上京区今出川通鳥丸東入)。

ジュの未定乗数法により求め、最小二乗法で得られた結果と比較検討し、本最適化手法の妥当性を確認した。さらに、本手法を用いて、所望の減衰係数を有し、かつ面積を最小にする導体板の最適形状を決定し、実験によりその妥当性を確認した。減衰係数の目標値を変化させた場合、磁極を円形とした場合も同様に、導体板の最適形状を決定できることを示した。

2. 定式化

2.1 有限要素法による定式化 磁場中を導体板が運動する際に生じる渦電流を解析するための方程式は次のように表される⁽⁷⁾。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \sigma \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma v_x B) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma v_y B) \quad (1)$$

ここで、導体板は X - Y 平面にあるものとし、磁極から与えられる既知の外部磁界 B は、 Z 方向に生じるとしている。 H は磁界の強さ、 σ は導体板の導電率、 v は導体板の速度、および t は時間を表している。一次三角形要素を用いて、ガラーキソ法を適用し、渦電流の自然境界条件を考慮して離散化すると、次式が得られる。

$$[D]\{H\} - [L]\{H_n\} = [F] \quad (2)$$

ここで、 H , $n = \partial H / \partial n$ であり、 $[D]_i$, $[L]_i$, $[F]_i$ は、次式で表される。

$$D_{ij} = \frac{c_i c_j + d_i d_j}{4\Delta^e} + \sigma \mu_0 \frac{\Delta^e}{12\Delta t} (1 + \delta_{ij}) \quad (3)$$

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} l_1/2 & 0 & l_3/2 \\ l_1/2 & l_2/2 & 0 \\ 0 & l_2/2 & l_3/2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$F_i = \frac{\sigma B}{2} (c_i v_x + d_i v_y) + \frac{\sigma \mu_0 \Delta^e}{12\Delta t} H_j^i (1 + \delta_{ij}) \quad (5)$$

ここでは、アインシュタインの総和規約を用いている。 c_i , d_i は、一次三角形要素の補関関数を x , y で偏微分することによって得られ、次式のように表される。

$$c_i = y_j - y_k, d_i = x_k - x_j \quad (6)$$

i, j, k は循環する添字であり、 x, y は節点座標である。 Δ^e は e 番目の要素の面積を表し、 Δt は時間きざみ幅、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す。 H_j^i は、 Δt [s] 前の H_j の値を表す。 l_i は、三角要素の辺の長さを表す。

2.2 境界要素法による定式化⁽¹⁷⁾ 磁極部以外の導体板の領域は、次のラプラス方程式で表される。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

グリーンの定理により、次の境界上の方程式が得られ

る。

$$C_p H_p + \int_{\Gamma} q^* H d\Gamma = \int_{\Gamma} H^* q d\Gamma \quad (8)$$

ここで、 q は H の法線方向微分、 q は考察点である。 H^* , q^* は基本解であり、次式のようになる。

$$H^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, q^* = \frac{\partial H^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (9)$$

ここで r は考察点から、境界上の着目している点までの距離を表す。0-1 次混合要素を用いて離散化すると、次式が得られる。

$$C_p H_p + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} q^* H_j d\Gamma = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} H^* q_j d\Gamma \quad (10)$$

$$[A]\{H\} - [G]\{q\} = \{0\} \quad (11)$$

ここで、 $[A]_{ij}$, $[G]_{ij}$ は、次式のようになる。

$$A_{ij} = \int_{\Gamma_j} N^f q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{j-1}} N^B q^* d\Gamma \quad (12)$$

$$A_{ii} = C_p \quad (13)$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} H^* d\Gamma \quad (14)$$

ただし、 N^f , N^B は線形要素の補関関数である⁽¹⁸⁾。

式(2)と式(11)とにより、次のような連立方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} D & L \\ A & -G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ H_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

この式から、 H を解くことができる。磁極部の渦電流密度は、次式により求められる。

$$J_{ex} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{d_i H_i}{2\Delta^e}, J_{ey} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{c_i H_i}{2\Delta^e} \quad (16)$$

減衰力はフレミングの左手則より求めることができ⁽⁷⁾、減衰係数は速度で割ることにより求められる。

2.3 最小二乗法による逆問題の定式化 式(17)

に示すような誤差 E^j の二乗和 R を目的関数とし、これを最小にする問題を考える。

$$\text{minimize } R = \sum_{j=1}^n (E^j)^2 \quad (17)$$

ここで、 E^j は評価関数 C^j の目標値 C_j^d と現状の値との誤差で次式のように表される。

$$E^j = C^j - C_j^d \quad (18)$$

次式のような誤差のベクトルを定義し、設計変数 α で座標変換する。

$$E = l_i E^i = e_k \alpha^k \quad (19)$$

ここで、 l_i は直交ベクトル基底、 e_k は自然標構である。このとき、 E_k は次の変換を受ける。

$$E^i = \frac{\partial E^i}{\partial \alpha^k} \alpha^k, \alpha^k = \frac{\partial \alpha^k}{\partial E^i} E^i \quad (20)$$

R は計量テンソル g_{ij} を用いて、次式のように表される。

$$R = |E|^2 = g_{ij} \alpha^i \alpha^j \quad (21)$$

R の変分を零と置くことにより、次式が得られる。

$$\delta R = 0 \rightarrow g_{kj} \alpha^j = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

このとき、 g_{ij} は α に対して一定と仮定している。ニュートン・ラブソン法により二次以上の項を無視すれば、次式が得られる。

$$g_{kj} \delta \alpha^j = -g_{kj} \alpha^j \quad \dots\dots\dots (23)$$

g_{ij} は、自然標構の内積で与えられる。 α^j に式(20)の逆変換をほどこし整理すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial C^i}{\partial \alpha^j} \delta \alpha^j = C_0^i - C^i, i, j = 1, \dots, m \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 $\partial E^i / \partial \alpha^j$ は正則であると仮定した。

所望の減衰係数を与える導体板寸法を求めるために、評価関数を減衰係数とし、設計変数を導体板寸法とした。

2.4 最適化問題の定式化 次に示すような制約条件のもとで、目的関数 S を最小にする問題を考える。

$$\text{minimize } z = S(\alpha^i) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\text{subject to } g(\alpha^i) = C - C_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

これは、古典的なラグランジュの未定乗数法により解くことができる。 λ をラグランジュ乗数とし、ラグランジアン L は、次式となる。

$$L = S(\alpha^i) + \lambda g(\alpha^i) \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 L の変分を零と置くことにより、次式が得られる。

$$\delta L = 0 \rightarrow \frac{\partial S}{\partial \alpha^i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \alpha^i} = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 λ を消去すれば次式が得られる。

$$f_i = e_{ij} \frac{\partial S}{\partial \alpha^i} \frac{\partial g}{\partial \alpha^j} = 0, \quad i, j = k, k+1, l = k \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$k = 1, \dots, m-1$$

$$g = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

e_{ij} はエディントンのイプシロンである。式(29)と式(30)にニュートン・ラブソン法を適用し、二次以上の項を無視すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha^i} \delta \alpha^i = -g, i = 1, \dots, m \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^k} \left(e_{ij} \frac{\partial S}{\partial \alpha^i} \frac{\partial g}{\partial \alpha^j} \right) \delta \alpha^k = -f_i, \quad i, j = \lambda, \lambda+1, l = \lambda$$

$$k = 1, \dots, m$$

$$\dots\dots\dots (32)$$

所望の減衰係数を与え、かつ導体板の面積を最小にするため、減衰係数を制約条件に、導体板面積を目的関数にとり、設計変数は、導体板寸法とした。

3. 解析方法

3.1 渦電流の解析方法 図1に解析モデルと要素分割を示す。計算時間の節約のため、対称性を考慮

し四分の一の領域について解析した。このため、式(1)の $\partial B / \partial t$ の項は無視している。領域 ODEF は導体板を表し、領域 OABC に磁極が置かれている。境界 DEF には、基本境界条件として $H=0$ を与えた。対称性から、境界 DAO には、自然境界条件 $\partial H / \partial n = 0$ を、境界 FCO には $H=0$ を与えた。考察点は、基本境界上ならびに有限要素との接合境界上では、境界要素の中央に置き、自然境界上では要素端節点に置いた⁽¹⁷⁾。導体板の速度は $v_x = 0, v_y = 0.13 \text{ m/s}$ とした。

3.2 最小二乗法による解析方法 所望の減衰係数を与える長方形導体板の寸法を、最小二乗法で求めるために、減衰係数の目標値を、図4に示すように二つに分けて設定した。目標値 C_0^1 と C_0^2 は次式のように、所望の減衰係数値の半分にそれぞれ重み W_1, W_2 を掛けた値である。

$$C_0^1 = W_1 C_0 / 2, C_0^2 = W_2 C_0 / 2 \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$C_0 = C_0^1 + C_0^2 \quad \dots\dots\dots (34)$$

このときの設計変数 α^i は、導体板の x 方向および y 方向の寸法とした。感度マトリックス $\partial C^i / \partial \alpha^j$ は、 X および Y 方向の導体板寸法を微小変化させたときの減衰係数の変化を計算することにより求められる。本研究ではこの寸法の微小変化量は 1 mm とした。ここで、収束性を良くするために、減衰係数は $\log$ スケールに変換して計算した。任意の初期形状をあたえて、式(24)より $\delta \alpha^j$ を求め、導体板寸法を修正し、これを繰返し行うことにより、所望の減衰係数を与える長方形導体板の寸法を求めることができる。本研究では、磁極から与えられる外部磁界 B は 0.402 T としている。

3.3 最適形状の決定法 式(31)と式(32)とを連立させて $\delta \alpha^i$ を求め、導体板の最適形状を決定する。感度マトリックス $\partial g / \partial \alpha^i$ は、上述と同様にして求め

図1 渦電流分布の解析モデル

られ感度マトリックス $\partial S/\partial \alpha'$ は α' を微小変化させたときの導体板の面積の変化を計算することにより求められる。ここでは、角点の精度を向上させるために、図1の角Dに、二重節点を設けた。次に示すような手順で最適形状を求める。

(1) 設計変数を長方形導体板の x および y 方向の寸法とし、長方形導体板の最適寸法(粗形状)を求める。

(2) 原点から境界形状の節点までの距離を設計変数とし、粗形状を初期形状として最適形状を求める。ステップ(2)では、非線形性が強く、解が発散する傾向がある。初期形状がく形の場合、要素の方向性による非均一性が拡大されることが加川らによって報告されている⁽¹⁴⁾。このため、 $\delta \alpha'$ に係数0.2を掛けて、繰返し計算を行い、発散を防止した⁽¹⁶⁾。また、境界形状の節点の移動方向は、着目する節点と図1の原点Oを通る直線の方とした。最適形状を決定するための節点数は10とした。

4. 結果および検討

4.1 減衰係数の評価 図2(a)に磁極部付近の渦電流分布の解析結果を示す。図2(b)は有限要素法で得られた渦電流分布であり、両者は良く一致している。磁極と導体板の寸法比に対する減衰係数の計算結果と実験結果を図3に示す。実験方法は文献(7)に示した。両者はほぼ一致しており、解析手法の妥当性が確認できる。

4.2 最小二乗法による解析結果 重み W_i を種々変化させて、減衰係数 $15 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ を与える長方形導体板の寸法を求め、その形状を図4に示す。これらの結果より、所望の減衰係数を与えかつ面積最小の寸法が存在することがわかる。このときの導体板の縦お

よび横方向の寸法はそれぞれ $65.1, 46.9 \text{ mm}$ 、面積は 3053 mm^2 であった。重みの比 W_1/W_2 に対する導体板の面積の変化を図5に示す。この結果より、面積が最小となる重みの比は、減衰係数の目標値が小さくなるにつれて減少することがわかる。

4.3 粗形状の決定 減衰係数を制約条件とし、導体板面積を最小にする最適解を、ラグランジュの未定乗数法により求め、図6に示す。図6(a)は、減衰係数と導体板面積の収束状況である。図6(a)中の細線は、最小二乗法で得られた最小面積値を表しており、導体板面積は最小面積値に、減衰係数は目標値 $15 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ に収束している。図6(b)に、導体板寸法の収束状況を示した。このときの導体板の縦および横方向の最適寸法は、それぞれ $66.2, 46.0 \text{ mm}$ 、面積は 3048 mm^2 であった。最小二乗法で得られた値と比較して、寸法では約2%異なり面積では約0.2%小さい。これ

図3 減衰係数の計算および実験結果

図2 渦電流分布の解析結果

図4 減衰係数 $15 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ を生じさせる長方形導体板

図5 重みの比と導体板面積の関係

は、最小二乗法では重みの比 W_1/W_2 を 0.01 の間隔で変化させて計算したため、極値がこの間隔内に存在し、正確な極値が得られなかったためと考えられる。この場合のラグランジュ乗数 λ の物理的意味は、式(28)より $-\partial S/\partial c$ である。

次に、上述の最小面積値を制約条件とし、減衰係数を最大とする最適寸法について考察する。この場合のラグランジュ乗数の物理的意味は、式(28)の λ の逆数となり、 λ を消去した式(29)は同じ形となる。この場合の結果を図 7 に示した。減衰係数は上述の値 15 N·s/m に収束し、導体板寸法は上述の最適寸法と一致している。これは双対性を示している。以上の結果より、本最適化手法の妥当性が明らかとなった。

4.4 導体板の最適形状 磁束密度 $B=0.402$ T, 減衰係数の目標値 15 N·s/m における導体板の最適形状の計算結果および収束状況を図 8 に示す。寸法の変化量が 0.1 mm 以下で収束とみなした。繰返し回数は 25 回で収束した。減衰係数の目標値を、13, 15, 16 N·s/m に変化させた場合の最適形状を図 9 に示す。減衰係数の目標値の増加に対して、導体板面積も増加している。目標値が小さい場合、繰返し計算時に、導体板の形状境界上の節点が磁極内部へ入り込むことがあ

る。この場合は、図 1 の解析モデルでは計算できなくなるため、その節点を磁極の周囲境界付近に拘束して、計算を続けた。妥当性を確認するために、図 9 の 3 とおりの最適形状に関して実験的に減衰係数を求めた。図 10 に実験装置を示す。減衰係数の実験値と目標値との差を表 1 および図 11 に示す。減衰係数の実験値は目標値とほぼ一致しており、最適形状の妥当性を示している。しかし、導体板の面積が減少すると、実験値と計算値の誤差が増加する傾向がある⁽⁶⁾。また、磁極を円形とした場合の導体板の最適形状を図 12 に示した。このように、減衰係数の目標値ならびに磁極形状を変化させても、最適形状を良好に求めることができる。以上の検討により、本最適化手法を用いて、磁極形状と磁束密度が与えられた場合の、導体板の最適形状を決定できることが明らかとなった。

導体板の最適形状は図 12 からわかるように、磁極側部に V 形の切れ込みがある。これは、図 2 (b) の渦電流分布から明らかのように、この部分には渦電流の分布がなく、導体板が不必要であることから、その妥当性が確認できる。また、図 1 の角点 D の誤差は 0-1 次混合要素により、かなり改善されているが、角点の感

図 6 減衰係数を制約し、導体板面積を最小とする最適寸法

図 8 減衰係数 15 N·s/m を与える導体板の最適形状と収束状況

図 7 導体板面積を制約し、減衰係数を増大とする最適寸法

図 9 減衰係数の目標値を変化させた場合の最適形状 ($B=0.402$ T)

図 10 実験装置

度マトリックスを求める際に誤差が大きくなる。このため、角点付近の最適形状に不連続な突起が生じる。これを改善するため、角点に二重節点を設けたところ、良好な最適形状が得られた。

5. 結 言

磁極形状と磁束密度が与えられた場合に関して、所望の減衰係数を有しかつ面積を最小にする導体板の最適形状を、ラグランジュの未定乗数法により決定した。得られた結論を要約すると、次のとおりである。

(1) 所望の減衰係数を生じさせる長方形導体板の寸法の中で、面積が最小となる寸法が存在する。

(2) 長方形導体板の最適寸法は、最小二乗法で求めた値とほぼ一致し、かつ双対性をも満足しており、本最適化手法の妥当性が明らかとなった。

(3) 本最適化手法により、所望の減衰係数を有し、かつ面積を最小にする導体板の最適形状を決定できる。

最後に、本研究には舞鶴高専昭和63年度卒業研究生 上山茂晴氏、田中一平氏の熱心な協力があつた。ここに記して感謝の意を表す。なお、本研究の解析には、京都大学大型計算機を利用した。また、本研究の一部は昭和63年度文部省科学研究費補助金によって行われたことを付記する。

文 献

- (1) Weinberger, M. R., *IEEE Trans. Aerosp. Electr.*

表 1 減衰係数の目標値と実銀値の比較

Objective value (Ns/m)	Experimental value (Ns/m)	Error (%)
13.0	12.2	6.2
15.0	14.6	2.7
16.0	15.9	0.6

図 11 減衰係数の目標値と実験値の比較

図 12 円形磁極の場合の最適形状
($B=0.402$ T,
 $C=15$ N·s/m)

Syst., AES 13-2(1977), 197.

- (2) Nikolajsen, J. L., ほか2名, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 193 (1979), 331.
- (3) Schieber, D., *IEEE Trans.*, 11-3(1975), 948.
- (4) 長屋・小島, 機論, 47-424, C(1981), 1620.
- (5) 長屋・小島, 機論, 50-453, C(1984), 806.
- (6) 長屋, 機論, 50-453, C(1984), 812.
- (7) 金森・石原, 機論, 54-502, C(1988), 1234.
- (8) 金森・石原, 機論, 磁気ダンパの磁束密度変動と導体板の形状効果, 56-527, C(1990).
- (9) Francavilla, A., ほか2名, *J. Strain Anal. Eng. Des.*, 10-2(1975), 63.
- (10) 瀬川・多田, 機論, 44-381(1978), 1469.
- (11) Oda, J., *Bull. JSME*, 20-140(1977), 160.
- (12) 徳増・ほか2名, 電学論, 104-4, B(1984), 53.
- (13) 小野・内藤, 第1回境界要素法シンポジウム講演集, (1984), 139.
- (14) 加川・ほか2名, 電子通信学会論文誌, J64-C-4(1981), 223.
- (15) Mota Soares, C. A., ほか2名, *Trans. ASME, J. Mech. Transm. Autom. Des.*, 106(1984), 518.
- (16) Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C. (川井・戸川, 監訳), 最適構造設計, (1977), 55, 培風館.
- (17) 小貫・ほか2名, 電学論, 102-10, A(1982), 17.
- (18) Brebbia, C. A. (神谷・ほか2名訳), 境界要素法入門, (1980), 49, 培風館.