数値積分法の特性評価*
(第2報, 評価結果および考察)曾我部 潔^{*1}, 大槻 康久^{*2}
荒木 由美^{*3}, 清水 信行^{*4}Evaluation of Time-Integration Methods
(2nd Report, Evaluation Results and Discussions)Kiyoshi SOGABE, Yasuhisa OHTSUKI,
Yumi ARAKI, and Nobuyuki SHIMIZU

The objective of this study is to evaluate the accuracy of the solution when the response to an external force is solved by time integration methods. As the first step toward this goal, a method to evaluate the accuracy of the time-integration method to sinusoidal input was proposed in the first report. Based on this method, some famous time integration methods were evaluated. The evaluation results are shown in this paper.

Key Words: Time Integration Method, Accuracy, Dynamic Response

1. ま え が き

前報⁽¹⁾において, 数値積分法の特性評価は初期値応答および外力に対する強制応答の両面から行うべきであることを示した。

初期値応答の特性については, 著者らは既に文献(2)等で研究を行い, 固有値のゆがみ特性として評価できることを示し, 特性評価図に整理している。

本報では, 外力に対する強制応答の評価を目的とし, 前報で確立した数値積分法の評価法に従い, 具体的に代表的な数値積分法を評価する。

説明の都合上, まず最初に前報で確立した理論の概要について示し, 次にこの方法を用いて各種の数値積分法の特性評価を行った結果および考察について示す。

2. 特性評価の理論の概要⁽¹⁾

伝達関数 $G(s)$ の系に数値積分法を適用した場合の

* 平成2年3月10日 東北支部第25期総会講演会において講演, 原稿受付 平成元年5月8日。

^{*1} 正員, 上智大学理工学部 (●102 東京都千代田区紀尾井町7-1)。

^{*2} 学生員, 上智大学大学院。

^{*3} 学生員, 上智大学理工学部 [現在 三菱電機(株)]。

^{*4} 正員, いわき明星大学理工学部 (●970 いわき市中央台飯野5-5-1)。

パルス伝達関数を $T(z)$ とする。系に正弦波入力

$$f(t) = b \sin \omega t \quad \cdots \cdots (1)$$

が作用した場合の定常応答の時刻 $t = n\tau$ (τ は時間刻み) における値は次式で与えられる⁽³⁾。

$$\hat{x}_{sn} = \hat{M} \sin(\omega n\tau - \hat{\theta}) \quad \cdots \cdots (2)$$

ここに

$$\hat{M} = |T(e^{j\omega\tau})| \cdot b \quad \cdots \cdots (3)$$

$$\hat{\theta} = -\arg\{T(e^{j\omega\tau})\} \quad \cdots \cdots (4)$$

一方, 厳密解の定常応答は次式で与えられる。

$$x_s(t) = M \sin(\omega t - \theta) \quad \cdots \cdots (5)$$

ここに

$$M = |G(j\omega)| \cdot b \quad \cdots \cdots (6)$$

$$\theta = -\arg\{G(j\omega)\} \quad \cdots \cdots (7)$$

上の数値解の振幅 $\hat{M}$ および位相 $\hat{\theta}$ を厳密解の振幅 M および位相 θ と比較することにより, 数値積分法による解の特性を評価することができる。

1次系および2次系に各種の数値積分法を適用した場合のパルス伝達関数および系の伝達関数は前報⁽¹⁾の表1および表2に示されている。

3. 特性評価の結果および考察

3・1 特性評価結果の表し方 特性評価の結果を

図1のような特性評価図として表すことにする。図1

図 1 基本・汎用解法の特性 (1次系: $s_0\tau = -1$)

図 2 Euler 法の特性 (1次系)

図 3 Backward Euler 法の特性 (1次系)

(a)は応答特性であり、振幅と位相をそのまま周波数応答関数の形で表示したものである。図1(b)は精度特性であり、振幅は厳密解の振幅 M に対する数値解の振幅 $\hat{M}$ の比 $\hat{M}/M$ の形で、また位相は数値解の位相 $\hat{\theta}$ と厳密解の位相 θ の差 $\hat{\theta} - \theta$ の形で表示したものである。図1(a)では、数値解の曲線が厳密解の曲線に近いほど、また図1(b)では、振幅比 $\hat{M}/M$ の曲線が1の直線に近いほど、かつ位相差 $\hat{\theta} - \theta$ の曲線が零の直線に近いほど、数値解の精度が良いことになる。 $\omega\tau$ が小さい場合には振幅、位相ともに数値解は厳密解にほぼ一致する。

3・2 基本・汎用解法の特性評価 図1は、1次系で $s_0\tau = -1$ と設定した場合の定常応答を Euler 法、Backward Euler 法、Runge-Kutta 4 次法および

PC-12 法により求めた結果を厳密解と比較したものである。これより次のことがわかる。

(1) 振幅に関しては、Backward Euler 法は $\omega\tau$ のかなり広い範囲で厳密解にかなり近い値を与える。

(2) Euler 法では $\omega\tau = 0$ の近傍以外は厳密解よりもかなり大きめの値を与える。

(3) PC-12 法と Runge-Kutta 4 次法は良く似た特性を示す。

(4) 位相に関しては、PC-12 法と Runge-Kutta 4 次法は良く似た特性を示す。

図2は、1次系で $s_0\tau = -0.1, -0.5, -1.0, -2.5$ と設定した場合の定常応答を Euler 法により求めた結果を厳密解と比較したものである。これより次のことがわかる。

図4 Runge-Kutta 4次法の特性(1次系)

図5 PC-12法の特性(1次系)

(1) 数値解の振幅は $\omega\tau$ が非常に小さいときには厳密解の振幅と一致するが, $\omega\tau$ が大きくなると厳密解の振幅よりも次第に大きくなる。この傾向は, $s_0\tau$ の絶対値が大きいほど顕著である。

(2) 位相に関しては, $s_0\tau = -0.1, -0.5, -1.0$ の場合には, 数値解のほうが厳密解よりも大きめになる。

図3は, 1次系で $s_0\tau = -0.1, -0.5, -1.0, -2.5$ と設定した場合の定常応答を Backward Euler 法により求めた結果を厳密解と比較したものである。これより次のことがわかる。

(1) 数値解の振幅は, $\omega\tau$ の増加とともに一度厳密解よりも小さくなり再度大きくなる。

(2) 数値解の位相は $s_0\tau$ の値にあまり関係せず,

$\omega\tau$ の増加とともに次第に厳密解よりも小さくなる。

(3) $\hat{M}/M$ の値の変化の範囲から判断して, Backward Euler 法は Euler 法よりも精度が良い。

図4は, 1次系で $s_0\tau = -0.1, -0.5, -1.0, -2.5$ と設定した場合の定常応答を Runge-Kutta 4次法により求めた結果を厳密解と比較したものである。これより次のことがわかる。

(1) 数値解の振幅は, $s_0\tau = -0.1, -0.5, -1.0$ のときは, $\omega\tau$ の増加とともに厳密解の振幅よりも次第に小さくなる。

(2) 数値解の位相は, $s_0\tau = -0.1, -0.5, -1.0$ のときは, $\omega\tau$ の広い範囲でほぼ厳密解の位相に等しい。

図5は, 1次系で $s_0\tau = -0.1, -0.5, -1.0, -2.5$ と設定した場合の定常応答を PC-12 法により求めた結

(a) 応答特性

(b) 精度特性

図6 構造解析用数値積分法の特性 (2次系: $\omega_0\tau=1, \zeta=0.1$)

(a) 応答特性

(b) 精度特性

図7 Newmark-β法 ($\beta=1/6$) の特性 (2次系: $\zeta=0.1$)

果を厳密解と比較したものである。これから次のことがわかる。

(1) 数値解の振幅は、 $\omega\tau$ の増加とともに次第に厳密解よりも小さくなる。この傾向は $s_0\tau$ の絶対値が小さいほど顕著である。

(2) 数値解の位相は、 $\omega\tau$ の比較的広い範囲で厳密解の位相と等しい。

(3) 本解法の精度特性は $s_0\tau$ の値にあまり依存しない。

以上により、基本・汎用の各解法の相対的な特性を比較してみると次のようになる。

(1) 振幅特性に関しては Backward Euler 法, Runge-Kutta 法, PC-12 法は Euler 法に比べ優れている。

(2) 位相に関しては Runge-Kutta 法, PC-12 法は Backward Euler 法, Euler 法に比べ優れている。

3.3 構造解析用解法の特性評価 図6は、2次系で $\omega_0\tau=1, \zeta=0.1$ と設定した場合の定常応答を Newmark- β 法($\beta=1/6$), Wilson- θ 法($\theta=1.4$)および Houbolt 法を用いて解いた結果を厳密解と比較したものである。これより次のことがわかる。

(1) 数値解の共振点は厳密解の共振点よりも左にずれている。この傾向は Houbolt 法で最も顕著であり、次いで Wilson- θ 法, Newmark- β 法の順となる。

(2) 数値解の振幅は Newmark- β 法がいちばん厳密解の振幅に近い。

(3) 位相に関しては, Newmark- β 法と Wilson-

(a) 応答特性

(b) 精度特性

図8 Wilson- θ 法($\theta=1.4$)の特性(2次系: $\zeta=0.1$)

(a) 応答特性

(b) 精度特性

図9 Houbolt 法の特性(2次系: $\zeta=0.1$)

θ 法は良く似た傾向を示すが、Houbolt法は異なる傾向を示す。

図7は、2次系で $\xi=0.1$ とし $\omega_0\tau=0.1, 0.5, 1.0, 2.5$ と設定した場合の定常応答をNewmark- β 法($\beta=1/6$)により求めた結果を厳密解と比較したものである。これより次のことがわかる。

(1) $\omega_0\tau=0.1, 0.5, 1.0$ のときには、 $\omega\tau$ の広い範囲で数値解は厳密解にかなり近い値を与える。

(2) $\omega_0\tau=2.5$ のときには、数値解は厳密解とかなり異なる値を与え、精度が悪い。

図8は、2次系で $\xi=0.1$ とし $\omega_0\tau=0.1, 0.5, 1.0, 2.5$ と設定した場合の定常応答をWilson- θ 法($\theta=1.4$)により求めた結果を厳密解と比較したものである。これより次のことがわかる。

(1) $\omega_0\tau=0.1$ のときには、数値解は $\omega\tau$ の比較的広い範囲で厳密解に近い値を与え、精度がよい。

(2) $\omega_0\tau$ の値が0.5以上のときには、数値解は $\omega\tau$ の増加とともに精度が悪くなる。

図9は、2次系で $\xi=0.1$ とし $\omega_0\tau=0.1, 0.5, 1.0, 2.5$ と設定した場合の定常応答をHoubolt法により求めた結果を厳密解と比較したものである。図より、Houbolt法はWilson- θ 法よりもさらに精度が悪いことがわかる。

以上により、構造解析用の各解法の相対的な特性を比較してみると次のようになる。

(1) 振幅・位相特性ともに、広い範囲の $\omega_0\tau, \omega\tau$

に対してNewmark- β 法はWilson- θ 法、Houbolt法より優れている。

(2) 応答特性におけるゲイン曲線のピーク値はNewmark- β 法では厳密解よりも大きい、Wilson- θ 法、Houbolt法では逆に小さい。

4. あとがき

以上の研究により、正弦的強制力を受ける系の応答を数値積分法によって求める場合の特性評価を系統的に行う方法を確認することができた。また、この方法を用いて、実際にいくつかの代表的な数値積分法の特性の評価を行った。これにより、これまで使用実績の高い数値積分法の特性が定量的に明らかとなり、振動解析における精度評価を適切に行う方法が与えられた。これに伴い、演算時間の合理的な決定が行え、演算コストの経済性がもたらされるものと考えられる。

今後は、この方法をさらに発展させ、複数の正弦波入力、さらには一般の入力を受ける系の応答を数値積分法で求める場合の特性評価の方法などについて検討していく予定である。

文 献

- (1) 清水・曾我部・ほか2名, 機論, 56-522, C(1990), 374.
- (2) 清水・本間・ほか3名, 機論, 46-401, C(1980), 26.
- (3) Cadzow, J. A., *Discrete-Time Systems*, (1973), 295, Prentice Hall.

討 論

〔質問〕 木村 康 治〔東京工業大学〕

2次系の結果(図6~9)について質問させていただきたい。

(1) 本文中にも指摘されているように、数値解の共振点は、いずれの解法についても厳密解の共振点より左にずれているが、その理由についてご教示願えれば幸いである。

(2) 精度特性図より、共振点の右側、すなわち、 $\omega\tau \geq \omega_0\tau$ の領域において大幅な精度低下が認められるが、これは、 ω_0 を基準にして時間きざみ τ を選定した場合、 $\omega > \omega_0$ なる外力周波数 ω に対しては時間きざみが粗すぎることを意味すると考えてよい。

(3) (2)とも関連するが、適切な時間きざみ τ を選択するために、 ω_0 と ω の相対的な大きさ(例えば、両者の比)に対する各数値積分法の応答特性および精

度評価に興味がある。ご意見を伺えれば幸いである。

〔回答〕 (1) 数値積分法で系の応答を計算すると、系の固有値が変形されて解かれる。この変形の様子を付図1に示す。この図は、数値積分法により、系の固有円振動数 ω_0 と減衰定数 ξ がどのように変形されるかを示している。ここに示されている各場合ともに、減衰がある程度小さい場合には、数値積分法により固有振動数が小さく変形されて解かれることがわかる。したがって、図6~9の数値解のピークは厳密解のピークよりも左にずれることになる。

(2) 例えば、図7(a)で $\omega_0\tau$ が小さい場合($\omega_0\tau=0.1$ あるいは0.5の場合)には、 $\omega\tau$ の広い範囲で数値解の応答は厳密解の応答と一致している。したがって、 $\omega > \omega_0$ でも必ずしも精度が悪いわけではなく、精度は $\omega_0\tau$ の値に依存することになる。

(a) $(\omega\tau, \zeta)$ 平面のゆがみ特性 PR-11, Newmark- β (1/4) 法 (c) $(\omega\tau, \zeta)$ 平面のゆがみ特性 Wilson- θ (1.37) 法 (b) $(\omega\tau, \zeta)$ 平面のゆがみ特性 Newmark- β (1/6) 法 (d) $(\omega\tau, \zeta)$ 平面のゆがみ特性 Houbolt 法

付図 1

(3) 今回は外力に対する応答の精度を重点的に調べることを目的としたので、 $\omega\tau$ (外力の円振動数×時間刻み) を横軸にとり、 $\omega_0\tau$ (系の固有円振動数×時間刻み) をパラメータにした特性評価図として表した。

しかし、振動学的見地からは、例えば ω/ω_0 を横軸にするような特性評価図も考えられる。今後、より利用度の高い特性評価図の作成方法について検討してみたいと考えている。貴重なご指摘に感謝する。