荷重組合せを考慮した重要構造物の動的信頼性評価法の開発*

(第1報, 変位制限タイプに対する定式化)

持 尾 隆 士^{*1}DEVELOPMENT OF A METHOD TO ESTIMATE THE DYNAMIC RELIABILITY
OF STRUCTURES UNDER COMBINED RANDOM LOADS
(1ST REPORT, FORMULATION FOR LIMIT STATES DEFINED BY RESPONSE DISPLACEMENTS)

Takashi MOCHIO

A method to estimate the dynamic reliability of structures under combined time varying loads is investigated. The response statistical moments of multi-degrees-of-freedom structures are obtained by modal synthesis technique and stationary random vibration theory. The formulation is demonstrated for three dynamic load cases which are; (a) both with nonzero mean, (b) both without nonzero mean and (c) with/without nonzero mean. Furthermore, first passage probability considering stochastic load combinations is derived by the load coincidence method under the assumption of a Poisson process for threshold crossings. The uncertainties of power spectral densities pertinent to loads as stochastic processes, are also considered through the derivation of first passage probability. This paper, as a 1st report, describes the formulation of dynamic reliability against the limit states defined by response displacements.

Key Words; Dynamic Reliability, Load Combination, First Passage Probability,
Limit State, Nonzero Mean

1. ま え か き

近年製品の大型化, 複雑化に伴い一度破損すると社会的経済的に大損害を被る様な重要構造物が増加しつつある。この様な構造物に対して構造信頼性評価を行う際, 構造物が柔構造である時には, 外力は通常不規則な動荷重であるためその応答は構造の振動特性に大きく影響されることが多くこの様なケースの場合には信頼性評価の精度向上の面から不規則振動応答理論をベースにした信頼性評価, すなわち動的信頼性解析が必要となる。

更に上述の種々の動的荷重は構造物の耐用期間中にいずれか1個のみが作用するとは限らず一般には複数の荷重を対象とすることの方が多く, しかも複数の荷重は同時に作用する可能性がある。この荷重組合せの効果を考慮した解析は現在までいくつかの限定されたケースについて行われている。たとえばPearceら⁽¹⁾は2荷重組合せを考慮した動的信頼性解析を実施したが, これは系が1自由度及び変位制限タイプの限界状態のみを対象としている。一方 Shinozukaら⁽²⁾の論文で

は荷重組合せを考慮して多自由度系を解析しているがこのケースでは限界状態として強度制限タイプのみ, また組合せ荷重も動的荷重は1個で他は静的荷重しか対象としていない。

このため本論文では, 複数の動的荷重組合せを考慮し, かつ限界状態として変位制限及び強度制限の両タイプを対象として多自由度線形構造物の動的信頼性を評価する一手法を提案するものである。なお本報は第1報として変位制限タイプの定式化について述べたものである。

2. 荷重組合せを考慮した
システムのトータル破
壊確率

構造物の信頼性評価では通常応力ベースで解析が行われることが多いが, 現実の問題としてはサービス, 営業, 保全性管理等の面から構造強度より変位自身が対象となることもある。本報ではこの様な変位量により信頼度が規定される問題に対する定式化を行う。

2.1 システムのトータル破壊確率 $P_T(T)$ 確率過程に対するシステムの初通過破壊確率は一般に以下の形で表わされる。

* 平成2年3月13日 東海支部第39期総会講演会において講演, 原稿受付 平成元年7月17日。

^{*1} 正員, 三菱重工業(株) (〒851-03 長崎市深堀町5-717-1)。

$$P_f(T) \leq P_f(0) + \nu' T \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで $P_f(0)$ は時刻 0 に既に破壊している確率, ν' は単位時間当りの平均超過回数期待値, T は耐用期間を示す。式(1)の $P_f(0)$ は通常 0 とみなせ、また不等号による表現は破壊確率の上限を示しているので安全側の評価として等号を採用することにすれば、結局最終的に求めるべき破壊確率は次の形で近似化できる。

$$P_f(T) = \nu' T \quad \dots\dots\dots (2)$$

2.2 荷重組合せ効果の導入 構造物に作用する動的荷重のモデルとして図1を考える。なおモデル化に際しては以下の仮定を設定する。

- (1) 動荷重が作用する構造物は N 自由度系線形連続体構造物。
- (2) 各節点に作用する動荷重の個数を M とし、 M 個の荷重は同一節点に集中しても良い。
- (3) 動荷重モデルは図1に示す様な平均値を含むものと含まないものととの混合とする。ただしこれらの荷重は同時には2個までしか重ならない(すなわち3個以上の同時発生確率は非常に小さいとして無視)。
- (4) 各動荷重は統計的に独立とする。

図1のモデルで荷重の発生時期が独立と考えられる時には式(2)における ν' が次の形で与えられる⁽³⁾。

$$\nu' = \sum_{i=1}^M \nu_i \bar{P}_i + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \nu_{ij} \bar{P}_{ij} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\bar{P}_i$ 及び $\bar{P}_{ij}$ は、荷重 F_i のみ及び荷重 F_i, F_j のみが存在しかつ発生する時の平均発生率であり、 ν_i 及び ν_{ij} は同様の荷重発生時における、応答値が限界状態レベルを超過する単位時間当りの条件付超過回数期待値である。更に $\bar{P}_i, \bar{P}_{ij}$ についても確率ポアソン過程を仮定した場合には近似的に以下の表現が可能である⁽³⁾。

$$\bar{P}_i = \lambda_i \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\bar{P}_{ij} = \lambda_i \lambda_j (\mu_{di} + \mu_{dj}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

図1 組合せ荷重を受ける構造物の概念

ここで $\lambda_k (k=i, j)$ は荷重 F_k の平均発生率, μ_{dk} は荷重 F_k の平均継続時間である。

故に ν_i, ν_{ij} を計算すれば破壊確率 $P_f(T)$ が求まることになる。

2.3 限界状態の定義と ν_i, ν_{ij} 変位制限タイプの限界状態として次の形を定義する。

非破壊領域に対して、

$$\bigcap_{k=1}^N [x_k(t) \leq d_k, 0 \leq t \leq T] \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで $x_k(t)$ は k 番目の自由度における絶対応答変位であり d_k は $x_k(t)$ に対する閾値を示している。

この時本問題は N 次元ランダムベクトルが式(6)で表わされる限界状態表面を通過する初通過破壊問題に帰着される。3次元の時の概念図を図2に示す。限界状態が式(6)で表わされる場合の ν_i, ν_{ij} は厳密には次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \nu_i &= \sum_{k=1}^N \nu_{ik} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \nu_{ikl} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \nu_{iklm} + \dots\dots \\ \nu_{ij} &= \sum_{k=1}^N \nu_{ijk} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \nu_{ijkl} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N \nu_{ijk lm} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで、

ν_{ik} : 荷重 F_i のみが存在しかつ発生している時、絶対変位 $x_k(t)$ 以外の絶対変位 $x_l(t) (l \neq k)$ は非破壊領域にあるという条件下での、 $x_k(t)$ が限界状態を超過する単位時間当りの条件付超過回数期待値

ν_{ikl} : 荷重 F_i のみが存在しかつ発生している時、絶対変位 $x_k(t)$ 及び $x_l(t)$ 以外の絶対変位は非破壊領域にあるという条件下での、 $x_k(t)$ と $x_l(t)$ が同時に限界状態を超過する単位時間当りの条件付超過回数期待値

ν_{ijk} : 荷重 F_i と F_j が存在しかつ同時に発生している時、絶対変位 $x_k(t)$ 以外の絶対変位は非破壊領域にあるという条件下での、 $x_k(t)$ が限界状態を超過する単位時間当りの条件付超過回数期待値

ν_{ijkl} :

図2 3次元ランダムベクトル空間における限界状態表面

以下同様

である。しかし式(7)における右辺第2項以上は第1項に比較して小さいのでこれを省略して v_i, v_{ij} に関する近似式

$$v_i = \sum_{k=1}^N v_{ik} \quad , \quad v_{ij} = \sum_{k=1}^N v_{ijk} \quad \cdots \cdots (8)$$

を採用する。更に v_{ik} 及び v_{ijk} は(条件無)超過回数期待値 v_{ik}, v_{ijk} と次の関係で結ばれる。

$$v_{ik} = P_{ik} v_{ik}^* \quad , \quad v_{ijk} = P_{ijk} v_{ijk}^* \quad \cdots \cdots (9)(10)$$

ここで、

$$P_{ik} = P\left(\bigcap_{a=1}^N \{x_{ai}(t) \leq d_a, 0 \leq t \leq T\}\right) \quad \cdots \cdots (11)$$

$$P_{ijk} = P\left(\bigcap_{a=1}^N \{x_{aij}(t) \leq d_a, 0 \leq t \leq T\}\right) \quad \cdots \cdots (12)$$

である。ただし $x_{ai}(t)$ は荷重 F_i が作用した時の i 番目の自由度における絶対変位、 $x_{aij}(t)$ は荷重 F_i, F_j が作用した時の絶対変位を表わしている。

式(8)～(10)において次の理由、

- (1) 通常計算される量は v_{ik}, v_{ijk} の方である。
- (2) 式(11)(12)の左辺の値は0から1までの値であり、故に

$$v_{ik} > v_{ik}^*, v_{ijk} > v_{ijk}^*$$

- (3) P_{ik} 及び P_{ijk} の値は d_k が大きくなるにつれ1に近づく。

- (4) v_{ik} 及び v_{ijk} を v_{ik}^* 及び v_{ijk}^* で代用することは常に安全サイドの評価になる。

により v_i, v_{ij} を次の形で近似する。

$$v_i = \sum_{k=1}^N v_{ik}^* \quad , \quad v_{ij} = \sum_{k=1}^N v_{ijk}^* \quad \cdots \cdots (13)$$

式(13)を提案することによりトータル破壊確率 $P_F(T)$ を、一般に計算が容易である(条件無)超過回数期待値の関数として表現することが可能となった。

故に最終的には v_{ik} 及び v_{ijk} を求めることによりシステムのトータル破壊確率 $P_F(T)$ を得ることができる。

3. 平均値を含む動的荷重 2個の同時発生を考慮 する場合

3.1 v_{ijk} の導出(荷重 F_i, F_j が同時に作用している時の k 番目の自由度に対する単位時間当りの超過回数期待値) このケースの場合には荷重 F_i および F_j が平均値を含んでいるが、まず平均値0の解析を行う。すなわち、

$$F_i = F_i^0 + F_i^* \quad , \quad F_j = F_j^0 + F_j^* \quad \cdots \cdots (14)$$

と置いた時の F_i^0, F_j^0 について振動を考える。なお式(14)において F_i^0, F_j^0 が平均値成分を示し、 F_i^*, F_j^* が平均0のランダム過程を示している。

運動方程式は一般に次の形で表わされる。

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = \{A_i\}F_i + \{A_j\}F_j \quad (15)$$

式(15)で $\{A_i\}$ は荷重 F_i に関する単位ベクトルを表わしている。式(15)は線形系であるので荷重 F_i, F_j に対する重ね合せが可能であり、更にモーダルアナリシスの手法を用いることにより k 番目の自由度に対する絶対変位 $x_k(t)$ は以下の通りに表わされる。

$$x_k(t) = \sum_{a=1}^N \phi_{ka} \{Y_a(t) + Z_a(t)\} \quad \cdots \cdots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_a(t) &= \frac{b_{ia}}{\omega_a} \int_0^t h_a(t-\tau) F_i^*(\tau) d\tau \\ Z_a(t) &= \frac{b_{ja}}{\omega_a} \int_0^t h_a(t-\tau) F_j^*(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (17)$$

式(16)における ϕ_{ka} はモーダルマトリックス($=[\Phi]$)での k 番目の自由度の a 次成分を示す。また式(17)での $h_a(\cdot), \omega_a$ は各々 a 次での基準座標系におけるインパルス応答関数、モーダル質量を表わし、更に $b_{ra}(r=i, j)$ はベクトル $[\Phi]^T \{A_r\}$ の a 次成分を表わしている。今モーダル座標系においてモーダルダンピングが小さくまた固有振動数が広く分散している場合を仮定するとこの時のモード間の相関は小さいのでこれを無視することとし、更に作用動荷重間は仮定により独立であることを考慮すれば応答分散値 $\sigma_{x_k}^2$ が次の様に得られる。

$$\sigma_{x_k}^2 = \sum_{a=1}^N \phi_{ka}^2 \{E(Y_a^2(t)) + E(Z_a^2(t))\} \quad \cdots \cdots (18)$$

一方 F_i^*, F_j^* は平均値0の定常正規性ホワイトノイズであると仮定すれば以下の関係がある。

$$E(F_r^*(t)) = 0 \quad , \quad E(F_r^*(t)F_r^*(t+\tau)) = 2\pi S_r \delta(\tau) \quad (19)$$

($r=i, j$)

ここで S_i, S_j は各々荷重 F_i, F_j のパワースペクトル強度であり $\delta(\tau)$ はデルタ関数である。上式の関係を用いると不規則振動理論により応答分散値の具体的表現が得られる。

$$\sigma_{x_k}^2 = g_i S_i + g_j S_j \quad \cdots \cdots (20)$$

$$g_r = \frac{\pi}{2} \sum_{a=1}^N \frac{\phi_{ka}^2 b_{ra}^2}{\xi_a \omega_a^2 \omega_a^3} \quad (r=i, j)$$

同様にして速度に関する応答分散値 $\sigma_{\dot{x}_k}^2$ は、

$$\sigma_{\dot{x}_k}^2 = h_i S_i + h_j S_j \quad \cdots \cdots (21)$$

$$h_r = \frac{\pi}{2} \sum_{a=1}^N \frac{\phi_{ka}^2 b_{ra}^2}{\xi_a \omega_a^2 \omega_a^3} \quad (r=i, j)$$

となる。なお式(20), (21)における ξ_k , ω_k は各々 k 次のモーダルダンピング, 固有円振動数を表わす。

次のステップとして k 番目の自由度の応答変位が正勾配で $x=d_k$ を横断する単位時間当りの超過回数期待値 $\nu_{i,j,k}^+$ を求める。今入力としての荷重は定常ガウス過程であるから応答値 x_k も定常ガウス過程である。したがって $\nu_{i,j,k}^+$ は σ_{x_k} , $\sigma_{\dot{x}_k}$ を用いて次の形で表される。

$$\nu_{i,j,k}^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}_k}}{\sigma_{x_k}} \exp\left(-\frac{d_k^2}{2\sigma_{x_k}^2}\right) \\ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \exp\left\{-\frac{d_k^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)}\right\} \quad (22)$$

ところで以上の解析は平均値を含まない荷重 F_i , F_j について行われてきたが, 実際には平均値を含んでおりその分補正が必要となる。次にその方法について述べる。

式(14)において平均値 F_i^0 , F_j^0 は同符号となることも異符号となることもあり得るが, ここでは常に同符号かつ正と仮定する。これは信頼性評価上, 一般性を失うこと無しに安全側の仮定であると考えて良い。更に F_i^0 , F_j^0 は荷重発生中変動が小さいものとすれば, これは確率過程として取り扱う必要はなく確率変数として取り扱えば良い。この時 F_i^0 , F_j^0 は静的荷重となるので k 番目の自由度への効果も静的に求められる。この静的効果 $\tau_{i,j,k}$ は影響係数 β を用いて次の様に表わされる。

$$\tau_{i,j,k} = \beta_{i,k} F_i^0 + \beta_{j,k} F_j^0 \quad (23)$$

$\tau_{i,j,k}$ を用いて式(22)を補正すると,

$$\nu_{i,j,k}^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \exp\left\{-\frac{(d_k - \tau_{i,j,k})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)}\right\} \quad (24)$$

が得られ, 同様の操作により負側の値 $\nu_{i,j,k}^-$ も得られるので全体としての $\nu_{i,j,k}$ は

$$\nu_{i,j,k} = \nu_{i,j,k}^+ + \nu_{i,j,k}^- \quad (25)$$

となる。式(25)では常に $\nu_{i,j,k}^+ > \nu_{i,j,k}^-$ であるので, $\nu_{i,j,k}$ に対する安全側の近似値として

$$\nu_{i,j,k} \approx 2\nu_{i,j,k}^+ \quad (26)$$

が得られる。式(26)において S_i , S_j 及び $\tau_{i,j,k}$ が確定値であれば $\nu_{i,j,k}$ の値が完全に定まることになる。しかし明らかにそれらの値は確率変数であるのでこの点を考慮した次の形が $\nu_{i,j,k}$ に対する最終的な表現となる。

$$\nu_{i,j,k} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \exp\left\{-\frac{(d_k - \tau_{i,j,k})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)}\right\} \\ \times f_{S_i}(S_i) f_{S_j}(S_j) f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k}) dS_i dS_j d\tau_{i,j,k} \quad (27)$$

ここで $f_{S_i}(\cdot)$, $f_{S_j}(\cdot)$ 及び $f_{\tau_{i,j,k}}(\cdot)$ は各々 S_i , S_j 及び $\tau_{i,j,k}$ に対する確率密度関数を示している。

3.2 $\nu_{i,j,k}$ の具体的計算法 $\nu_{i,j,k}$ を式(27)より計算するには S_i , S_j 及び $\tau_{i,j,k}$ に関する確率密度関数の形が必要となる。ところで $\tau_{i,j,k}$ については式(23)より F_i^0 , F_j^0 で構成されるため, それらの確率密度関数が与えられれば自動的に $f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k})$ も求められることになる。以下に F_i^0 , F_j^0 の分布形の仮定をベースにした場合の $\nu_{i,j,k}$ の具体的算出法を述べる。

(1) F_i^0 , F_j^0 が一様分布の場合

F_i^0 , F_j^0 に対する確率密度関数は次の通りである。

$$f_{F_r^0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_r} & (0 < x < \delta_r) \\ 0 & (x \geq \delta_r) \end{cases} \quad (r=i, j) \quad (28)$$

式(23)及び(28)を用いて $f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k})$ が求まるが, これは $\tau_{i,j,k}$ の範囲により次の様な形に分類される。

① $\beta_{i,k}\delta_i \geq \beta_{j,k}\delta_j$ の場合

$$0 < \tau_{i,j,k} \leq \beta_{j,k}\delta_j : f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k}) = \frac{\tau_{i,j,k}}{\beta_{i,k}\beta_{j,k}\delta_i\delta_j} \quad (29)$$

$$\beta_{j,k}\delta_j < \tau_{i,j,k} \leq \beta_{i,k}\delta_i : f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k}) = \frac{1}{\beta_{i,k}\delta_i} \quad (30)$$

$$\beta_{i,k}\delta_i < \tau_{i,j,k} \leq \beta_{i,k}\delta_i + \beta_{j,k}\delta_j : f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k}) = \frac{\beta_{i,k}\delta_i + \beta_{j,k}\delta_j - \tau_{i,j,k}}{\beta_{i,k}\beta_{j,k}\delta_i\delta_j} \quad (31)$$

$$\beta_{i,k}\delta_i + \beta_{j,k}\delta_j < \tau_{i,j,k} : f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k}) = 0 \quad (32)$$

② $\beta_{j,k}\delta_j > \beta_{i,k}\delta_i$ の場合

$$0 < \tau_{i,j,k} \leq \beta_{i,k}\delta_i : f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k}) = \frac{\tau_{i,j,k}}{\beta_{i,k}\beta_{j,k}\delta_i\delta_j} \quad (33)$$

$$\beta_{i,k}\delta_i < \tau_{i,j,k} \leq \beta_{j,k}\delta_j : f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k}) = \frac{1}{\beta_{j,k}\delta_j} \quad (34)$$

$$\beta_{j,k}\delta_j < \tau_{i,j,k} \leq \beta_{i,k}\delta_i + \beta_{j,k}\delta_j : f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k}) = \frac{\beta_{i,k}\delta_i + \beta_{j,k}\delta_j - \tau_{i,j,k}}{\beta_{i,k}\beta_{j,k}\delta_i\delta_j} \quad (35)$$

$$\beta_{i,k}\delta_i + \beta_{j,k}\delta_j < \tau_{i,j,k} : f_{\tau_{i,j,k}}(\tau_{i,j,k}) = 0 \quad (36)$$

次に $f_{S_i}(S_i)$, $f_{S_j}(S_j)$ についても一様分布を仮定する。

$$f_{S_r}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\xi_r} & (0 < x < \xi_r) \\ 0 & (x \geq \xi_r) \end{cases} \quad (r=i, j) \quad (37)$$

結局式(29)~(37)を式(27)に代入することにより $\nu_{i,j,k}$ が次の形で求まる。

$$\nu_{i,j,k} = \frac{1}{\pi\theta_2\xi_i\xi_j} \left\{ \int_0^{\xi_i} \int_0^{\xi_j} \int_0^{\theta_1} \frac{\tau_{i,j,k} \sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\theta_1 \sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \right. \\ \times \exp\left\{-\frac{(d_k - \tau_{i,j,k})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)}\right\} dS_i dS_j d\tau_{i,j,k} \\ + \int_0^{\xi_i} \int_0^{\xi_j} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \exp\left\{-\frac{(d_k - \tau_{i,j,k})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)}\right\} \\ \times dS_i dS_j d\tau_{i,j,k} + \int_0^{\xi_i} \int_0^{\xi_j} \int_{\theta_2}^{\theta_1 + \theta_2} \frac{(\theta_1 + \theta_2 - \tau_{i,j,k}) \sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\theta_1 \sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \\ \times \exp\left\{-\frac{(d_k - \tau_{i,j,k})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)}\right\} dS_i dS_j d\tau_{i,j,k} \right\} \quad (38)$$

ここで,

$$\beta_{ik}\delta_i \geq \beta_{jk}\delta_j \text{ の時 : } \theta_1 = \beta_{jk}\delta_j, \theta_2 = \beta_{ik}\delta_i$$

$$\beta_{jk}\delta_j \geq \beta_{ik}\delta_i \text{ の時 : } \theta_1 = \beta_{ik}\delta_i, \theta_2 = \beta_{jk}\delta_j$$

式(38)は通常の三重積分であるので、これを数値計算することにより最終的な ν_{ijk} の値を求めることができる。

(2) F_i^0, F_j^0 がレーリー分布の場合

F_i^0, F_j^0 に対する確率密度関数は次の通りである。

$$f_{F_i^0}(x) = \frac{x}{\varepsilon_i^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon_i^2}\right) \quad (0 < x < \infty) \quad (39)$$

($r = i, j$)

式(23)及び(39)より $f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk})$ が次の様に求まる。

$$f_{\tau_{ijk}}(\tau_{ijk}) = \frac{1}{e^c \beta_{ik}^2 \beta_{jk}^2 \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2} \left\{ \frac{(\tau_{ijk} - b)e^{-ab^2}}{2a} + \frac{\{2ab(\tau_{ijk} - b) - 1\} \operatorname{Erf}(-b/\sqrt{a})}{2a\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \right\} \quad (40)$$

ここで,

$$a = \frac{(\beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 + \beta_{jk}^2 \varepsilon_j^2)}{2\beta_{ik}^2 \beta_{jk}^2 \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2}, \quad b = \frac{\beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 \tau_{ijk}}{(\beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 + \beta_{jk}^2 \varepsilon_j^2)}$$

$$c = \frac{\tau_{ijk}^2}{2(\beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 + \beta_{jk}^2 \varepsilon_j^2)}, \quad \operatorname{Erf}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

更に $f_{S_i}(S_i), f_{S_j}(S_j)$ についてもレーリー分布を考えると,

$$f_{S_r}(x) = \frac{x}{\eta_r^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta_r^2}\right) \quad (0 < x < \infty) \quad (41)$$

($r = i, j$)

であるので式(40)及び(41)を式(27)に代入することにより ν_{ijk} が以下の様に求まる。

$$\begin{aligned} \nu_{ijk} = & \frac{1}{\pi \beta_{ik}^2 \beta_{jk}^2 \varepsilon_i^2 \varepsilon_j^2 \eta_i^2 \eta_j^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \\ & \cdot \exp\left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ijk})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)} - \frac{S_i^2}{2\eta_i^2} - \frac{S_j^2}{2\eta_j^2} \right\} \\ & \cdot \frac{S_i S_j}{e^c} \left\{ \frac{(\tau_{ijk} - b)e^{-ab^2}}{2a} + \frac{\{2ab(\tau_{ijk} - b) - 1\} \operatorname{Erf}(-b/\sqrt{a})}{2a\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}} \right\} dS_i dS_j d\tau_{ijk} \quad (42) \end{aligned}$$

3.3 ν_{ik} の導出 (荷重 F_i のみが作用している時の k 番目の自由度に対する単位時間当りの超過回数期待値)

ν_{ik} は ν_{ijk} の定式化の中で荷重 F_j に関する項がないだけであるから3.1節及び3.2節からの類推によりその形は以下の様に容易に推定できる。

(1) F_i^0, S_i が一様分布の場合

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \beta_{ik} \delta_i \zeta_i} \int_0^{\beta_{ik} \delta_i} \int_0^{\zeta_i} \frac{\sqrt{h_i S_i}}{\sqrt{g_i S_i}} \exp\left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ik})^2}{2g_i S_i} \right\} dS_i d\tau_{ik} \quad (43)$$

(2) F_i^0, S_i がレーリー分布の場合

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \beta_{ik}^2 \varepsilon_i^2 \eta_i^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S_i \tau_{ik} \sqrt{h_i S_i}}{\sqrt{g_i S_i}} \exp\left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ik})^2}{2g_i S_i} - \frac{S_i^2}{2\eta_i^2} \right\} dS_i d\tau_{ik} \quad (44)$$

なお式(43), (44)において τ_{ik} は式(23)での右辺第1項のみを採用した時の値を表わしている。

4. 平均値を含む動的荷重と含まない動的荷重の同時発生を考慮する場合

4.1 ν_{ijk} の導出 荷重 F_i, F_j のうち F_i の方が平均値を含んでいるものとする。すなわち

$$F_i = F_i^0 + F_i, \quad F_j = F_j \quad (45)$$

と考える。この時の F_i, F_j についての振動を考える。

運動方程式は式(15)と同じである。ここで F_i として各節点に直接作用する強制外力を採用する場合にはその取り扱いが前章とまったく同じとなる。一方 F_j として地震の様な強制変位入力を採用する場合には式(15)の右辺第2項を

$$\{A_j\} \ddot{F}_j \equiv -\{M\} \ddot{z} \quad (46)$$

$\{E\}$: 強制変位入力の単位ベクトル

z : 強制変位入力における入力加速度

とし、 $\{x\}$ を相対変位ベクトルとみなすことにより後の式展開はやはり前章と全く同一とすることができる。

最終的な ν_{ijk} の形は式(27)と同一であるが、 τ_{ijk} は今の場合平均値が1個であるので

$$\tau_{ijk} \equiv \tau_{ik} = \beta_{ik} F_i^0 \quad (47)$$

となっている。

4.2 ν_{ijk} の具体的計算法 第3章の類推により ν_{ijk} は容易に求められる。ここでは一様分布の場合を以下に示しておく。

$$\begin{aligned} \nu_{ijk} = & \frac{1}{\pi \beta_{ik} \delta_i \zeta_i \zeta_j} \int_0^{\beta_{ik} \delta_i} \int_0^{\zeta_j} \frac{\sqrt{h_i S_i + h_j S_j}}{\sqrt{g_i S_i + g_j S_j}} \\ & \cdot \exp\left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ik})^2}{2(g_i S_i + g_j S_j)} - \frac{S_j^2}{2\eta_j^2} \right\} dS_i dS_j d\tau_{ik} \quad (48) \end{aligned}$$

4.3 ν_{ik} の具体的計算法 第3章の類推により

求まるが、特に一様分布の場合を下記に示す。

(1) 平均値を含む荷重 F_i の ν_{ik}

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \beta_{ik} \delta_i \zeta_i} \int_0^{\beta_{ik} \delta_i} \int_0^{\zeta_i} \frac{\sqrt{h_i S_i}}{\sqrt{g_i S_i}} \exp\left\{ -\frac{(d_k - \tau_{ik})^2}{2g_i S_i} \right\} dS_i d\tau_{ik} \quad (49)$$

(2) 平均値を含まない荷重 F_j の ν_{ik}

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \zeta_j} \int_0^{\zeta_j} \frac{\sqrt{h_j S_j}}{\sqrt{g_j S_j}} \exp\left\{ -\frac{d_k^2}{2g_j S_j} \right\} dS_j \quad (50)$$

5. 平均値を含まない動的荷重2個の同時発生を考慮する場合

5.1 ν_{ik} の具体的計算法 第3章と同様に、 ν_{ik} は S_i, S_j の分布がたとえば一様分布の場合以下の様に求められる。

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \zeta_i \zeta_j} \int_0^{\zeta_i} \int_0^{\zeta_j} \frac{h_i S_i \cdot h_j S_j}{g_i S_i \cdot g_j S_j} \exp\left\{-\frac{d_k^2}{2(g_i S_i \cdot g_j S_j)}\right\} dS_i dS_j \quad (51)$$

5.2 ν_{ik} の具体的計算法 ν_{ik} についても第3章の類推により求められる。特に一様分布については、

$$\nu_{ik} = \frac{1}{\pi \zeta_i} \int_0^{\zeta_i} \frac{h_i S_i}{g_i S_i} \exp\left\{-\frac{d_k^2}{2g_i S_i}\right\} dS_i \quad (52)$$

となる。

以上により破壊確率を算出する上で必要となる全ての量が求まったことになる。

6. 数値計算例

数値計算例として図3の様な鉄塔がその最上部で平均値を含む一般的外力の作用を受け同時に基部においては平均値を含まない強制変位入力により加振される現象を取り扱う。鉄塔は梁要素として有限要素法によるモデル化を行った。信頼性評価に必要となる破壊規準すなわち変位制限タイプの限界状態としては、各節

図3 信頼性解析用鉄塔モデル

図4 破壊確率に及ぼす動荷重平均発生率の影響

点の応答変位の中でいずれか1ヶ所でも閾値($X_{max} = 120\text{cm}$)を越えた時を破壊状態に達したとする想定を行った。図3のモデルは本論文の第4章の手法により解析可能であるが特に F_1^0, S_1, S_2 が一様分布する場合については具体的計算を実施した。使用した定数は $\delta_1 = 1.96 \cdot 10^4 (\text{N})$, $\zeta_1 = 9.6 \cdot 10^6 (\text{N}^2 \cdot \text{sec})$, $\zeta_2 = 1.0 \cdot 10^3 (\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^3)$ である。更に最終的な破壊確率を計算する上で必要となる荷重パラメータとしては $\lambda_2 = 0.5$, $\mu_{d1} = 3.42 \cdot 10^{-4}$, $\mu_{d2} = 4.76 \cdot 10^{-7}$ 及び $T = 20$ 年を設定し、 λ_1 をパラメータとした破壊確率の計算を行った。図4は一般外力 F_1 の年間平均発生率 λ_1 をパラメータとした時の破壊確率の変化状況を示したものであるが、本ケースの場合には λ_1 を7倍程度にすると破壊確率は1桁上昇することが分かる。図4の様な結果を利用することにより、例えば自然環境条件が厳しい中でどの程度の動荷重発生頻度までならば想定する破壊事象に対して許容し得るかに対する目安を与えることが可能となる。

7. まとめ

多自由度線形構造物が複数種の再現性の無い不規則な動的荷重を受ける場合において、動的荷重の同時発生効果を考慮して構造物の初通過破壊問題を評価する解析手法を開発した。主な成果は以下の通りである。

- (1) 多自由度系を対象とした変位制限タイプの初通過破壊問題においては、導出が容易な各節点単位での(条件無)単位時間当りの超過回数期待値を如何にしてシステム全体の等価的な超過回数期待値へ組み込むかが重要なポイントとなる。このため本論文では安全サイドの評価となる新たな近似関係式を提案した。
- (2) 動的荷重が平均値を含む場合とそうでない時では解析手法に若干の差が現われる。このため本論文では動的荷重2個の場合について平均値有無の3組のケースに対し各々定式化を行い、相互の違いを明らかにした。
- (3) 開発した手法を用いて例題計算を実施すると共に、解析結果の利用法に対する示唆を与えることにより本理論の有用性を示した。

最後に、日頃から有益な御助言をいただいている東京大学 柴田 碧教授に感謝いたします。

文献

- (1) Pearce, H.T. and Wen, Y.K., J. Am. Soc. Civil Eng., ST7 (1984), 1613.
- (2) Sinozuka, M., ほか3名, NUREG CR-3227 (1983).
- (3) Wen, Y.K., Proc. 3rd ICOSSAR, (1981), 89.