がたと二段ばねを持つ2自由度系の強制ねじり振動の研究*

片岡 眞澄^{*1}, 大野 進一^{*2}, 杉本 隆尚^{*1}

Forced Torsional Vibration of a Two-Degrees-of-Freedom System Including a Clearance and a Two-Step-Hardening Spring

Masumi KATAOKA, Shinichi OHNO and Takanao SUGIMOTO

The engine-clutch-gearbox train of an automobile is modeled by a forced torsional vibration system including two nonlinear terms, namely a clearance (backlash of meshing gears) and a two-step-hardening spring (torsional stiffness of a clutch disk). Analytical solutions of the equations of motion of the system are obtained in recurrent form. Based on the solutions, the effect of the torsional stiffness of the clutch disk on the idle rattle of the gearbox is investigated. The results are as follows: (1) Sum of torque impulses per cycle of the forced motion increases with the increase in the ratio of the second-step stiffness to the first-step stiffness. Therefore, there is an upper limit to the second-step stiffness for the purpose of the prevention of the idle rattle. (2) Both the sum of torque impulses and the number of collisions per cycle of the forced motion decrease with the increase in the range of torsional displacement covered by the first-step stiffness. Hence, to prevent the idle rattle, the first-step stiffness should cover as wide a range as possible.

Key Words: Theory of Vibration, Shock, Two-Degrees-of-Freedom System, Forced Torsional Vibration, Backlash, Gear Noise, Clutch Disk

1. 緒 言

自動車のエンジンアイドリング時に手動変速機から生ずる歯打ち音を低減するためには、クラッチディスクのディスクプレートとハブの間に装着されているばねの剛性を低くすることが効果的であると言われていた⁽¹⁾。ところが、走行中は駆動トルクがかかるため剛性が高くないと過大な相対ねじり変位が生ずる。そこで実車では、この相反する条件を満たすため、ばねの特性を変位が小さい間は剛性が低く、変位がある程度より大きいと剛性が高くなるという折線の二段特性にする方法がとられている。

著者らは、このアイドリング時における歯打ち問題が基本的には、バックラッシュというがたとを持つ2自由度系の強制ねじり振動として扱えることを実機実験とシミュレーション計算から示し、解析解を求めてきた^{(2)~(5)}。しかし、これらの報告で扱った系のばねは、すべて一段のねじり特性のものであった。ところが、実際には剛性が低い範囲をあまり広くとることができ

ずアイドリング時においても、二段目のばねまで作動することがある。

そこで本報では、ばねを二段にして対称な折線のねじり特性とし、剛性の高いばねまで作動する場合を扱うことにした。すなわち、がたと二段ばねを持つ2自由度系の強制ねじり振動をとりあげ解析解の誘導を行った。得られた結果とシミュレーション計算結果から、ばねの折線特性における剛性比や他の諸因子が歯車間の衝突に及ぼす影響等について調べた。

2. 振動系と記号の意味

本研究で扱う振動系は図1に示すものである。この振動系は自動車のエンジン・クラッチ、歯車減速機系をモデル化したものであるから、記号の意味を実機と対応づけて説明すると次のとおりである。

J_1 : クラッチハブと入力歯車の慣性モーメント

J_2 : 副軸歯車の慣性モーメント

ω' : エンジンの平均回転角速度

ω : エンジンの角速度変動の角振動数。4サイクル4気筒エンジンでは $\omega = 2\omega'$

k_1, k_2 : クラッチディスクに装着されている一段目、および二段目のばねのねじりばね定数

k_3 : かみ合っている一對の歯の曲げ剛性の等価ね

* 平成2年3月10日 中国四国支部第28期総会講演会において講演、原稿受付 平成元年7月17日。

^{*1} 正員、千葉工業大学 (〒275 習志野市津田沼2-17-1)。

^{*2} 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

じりばね定数

K : ばね定数比 ($=k_2/k_1$)

e : 二段目ばねの不感区間の1/2

ε : 歯車対に存在するがた(バックラッシュ)の1/2

c_1, c_2 : J_1, J_2 に作用する粘性抵抗係数

X, Y : J_1, J_2 の回転角

Z : エンジン・フライホイールの回転角

E : Z の変動部分の振幅

x, y, z : X, Y, Z の変動分 ($z = E \sin \omega t$)

t, t' : 時間

3. 運動方程式

3・1 運動方程式 図1の系において、慣性モーメント J_1, J_2 およびエンジンフライホイールの回転角 X, Y, Z は一定回転角に変動回転角が重畳したものであって $X = \omega' t + x, Y = \omega' t + y, Z = \omega' t + z$ と書ける。そこで、 J_1, J_2 についての運動方程式をまず X, Y, Z を用いて記述すると定常回転部分が消え変動部分のみを表す変数 x, y についての次の運動方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} J_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + c_1 \frac{dx}{dt} + k_1 x &= k_1 E \sin \omega t \\ &- G(x-z) + T(y-x) - c_1 \omega' \\ J_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + c_2 \frac{dy}{dt} &= -T(y-x) - c_2 \omega' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 t の原点は強制角変位の変動成分 z が零である時刻、 y の原点はがたの中央にとるものとする。また以下では簡単のために角変位や角速度等の変動部分を単に角変位や角速度と呼ぶことにする。 $G(x-z)$ は二段目ばねが作用したことによって生ずる非線形復元トルク、 $T(y-x)$ はがたに起因する非線形トルクを表しており、それぞれ図2(a), (b)に示す特性のものである。以下の解析においては J_1 が近似的に周期 $2\pi/\omega$ の周期運動を行い、かつ半周期に1回二段目ばねが作用する場合を扱うものとする。

3・2 $G(x-z)$ のフーリエ級数展開式 式(1)の第1式に含まれる二つの非線形項のうち、まず $G(x-z)$ をフーリエ級数で表すことを考える。

図1 振動系

先の仮定により $G(x-z)$ は周期の $2\pi/\omega$ の周期関数となる。ここで相対変位 $x-z$ は時間 t の関数であるので、 $G(x-z)$ を無次元時間 $\theta (= \omega t)$ で表したものを $G'(\theta)$ とおくと $G'(\theta)$ は図3(b)のようになる。そこで時間原点 O とばね k_2 の作用開始点 Q との位相角を ϕ とおき、 $G'(\theta)/(k_1 E)$ をフーリエ級数に展開して、

$$\begin{aligned} G(x-z)/k_1 E &= G'(\theta)/k_1 E \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \{a_m \cos m(\theta - \phi) + b_m \sin m(\theta - \phi)\} \\ &\dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

とおく。次にフーリエ係数を定める。ここでは z は既知であるから、ばね k_2 が作用している時の角変位 x が求まれば $G(x-z)$ の値は定まることになる。本研究の場合、あらかじめ J_1 の変位 x を仮定することは、 J_1 の運動一周期中にがたで発生する衝突の回数やその周期性が不明であるので、不可能である。ところで、 J_1 と J_2 間のがた 2ε は $\varepsilon \ll E$ であり、歯車対の歯の等価

図2 非線形トルク

図3 相対変位と非線形トルクの関係

ねじり剛性 k_3 は $k_3 \gg k_1, k_2$ であるから図1の振動系は $\varepsilon=0, k_3=\infty$ とおき, J_1 と J_2 を加えて一つとした慣性モーメント $J(=J_1+J_2)$ に二段ばねが作用している1自由度系の強制ねじり振動と近似的にみなすことができる。そこで, この1自由度系で, さらに簡単のために粘性減衰も無視した系を近似1自由度系と呼ぶことにし, この近似1自由度系において, ばね k_2 が作用している区間の J の角変位を求め, これを J_1 の角変位 x の近似解とする。

今後の記号の混乱を避けるため, 近似1自由度系における J の変位と z の差を ξ とおき, $\xi \geq 0$ である ξ の半周期中に, 二段目ばねが作用している θ の区間幅を θ_0 とおくと, この θ_0 の区間では

$$G(x-z) \approx k_2(\xi - e) \dots \dots \dots (3)$$

一方, $\xi \leq 0$ である ξ の半周期間では $G(x-z)$ は式(3)の右辺を逆符号にしたものとなる。したがって $a_0=0$ となり ξ, θ_0, ϕ が求まれば式(2), (3)よりフーリエ係数 a_m, b_m が決定できることになる。

3.3 相対変位 ξ , 区間幅 θ_0 , 位相角 ϕ の決定

ξ, θ_0, ϕ の値は近似1自由度系における J が周期 $2\pi/\omega$ の周期運動を行っている場合の解を接合法で求めることから決定する。そこで図3(c)に示すように区間ごとに ξ を分解して考える。まずばね k_2 が作用していない区間, すなわち $-e \leq \xi \leq e$ を $P'Q'$ 間とし, これに対応する θ の区間を PQ , この区間での ξ を ξ_1 , 無次元時間を τ_1 とし, これらの原点に PQ 間の中点 O_1 を選ぶ。次に, ばね k_2 の作用している区間, つまり $\xi \geq e$ を $Q'R'$, この区間での ξ を ξ_2, ξ_2 の原点を Q' にとる。また無次元時間を τ_2, τ_2 の原点を Q に定める。

区間 $P'Q', Q'R'$ における J についての運動方程式はそれぞれ

$$d^2\xi_1/d\tau_1^2 + \Omega^2\xi_1 = -E \cos\{\tau_1 + \phi + (\theta_0/2)\} \dots \dots \dots (4)$$

$$d^2\xi_2/d\tau_2^2 + \Omega^2(1+K)\xi_2 = E \sin(\tau_2 + \phi) - \Omega e \dots \dots \dots (5)$$

式(4), (5)の解は, それぞれ

$$\xi_1 = A_1 \cos \Omega \tau_1 + B_1 \sin \Omega \tau_1 - \frac{E}{\Omega^2 - 1} \cos\{\tau_1 + \phi + (\theta_0/2)\} \dots \dots \dots (6)$$

$$\xi_2 = A_2 \cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \tau_2 + B_2 \sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \tau_2 + \frac{E}{\Omega^2(1+K) - 1} \sin(\tau_2 + \phi) - \frac{e}{1+K} \dots \dots \dots (7)$$

ここで, $\Omega = \omega_1/\omega$, $\omega_1 = \sqrt{J/k_1}$, $K = k_2/k_1$ 式(6), (7)中の, A_1, B_1, A_2, B_2 は未定の定数であり, これらと θ_0, ϕ の値は次に示す接合条件より決定できる。

$$\xi_1|_{\tau_1=(\pi/2)-(\theta_0/2)} = e \dots \dots \dots (8)$$

$$\xi_1|_{\tau_1=-((\pi/2)-(\theta_0/2))} = -e \dots \dots \dots (9)$$

$$\frac{d\xi_1}{d\tau_1} \Big|_{\tau_1=(\pi/2)-(\theta_0/2)} = \frac{d\xi_2}{d\tau_2} \Big|_{\tau_2=0} \dots \dots \dots (10)$$

$$\frac{d\xi_1}{d\tau_1} \Big|_{\tau_1=-((\pi/2)-(\theta_0/2))} = -\frac{d\xi_2}{d\tau_2} \Big|_{\tau_2=\theta_0} \dots \dots \dots (11)$$

$$\xi_2|_{\tau_2=0} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

$$\xi_2|_{\tau_2=\theta_0} = 0 \dots \dots \dots (13)$$

式(8), (9)に式(6)を代入し, 両式の辺々を加算および減算することから A_1, B_1 が未知数 θ_0, ϕ の関数として求まる。同様に, 式(12), (13)に式(7)を代入した両式から A_2, B_2 が θ_0, ϕ の関数として求まる。これらの A_1, B_1, A_2, B_2 と式(6), (7)をそれぞれ τ_1, τ_2 で1回微分した式を式(10), (11)に代入して少し計算することから次の2式が得られる。

$$\left(\frac{M_0}{M_2 N_1 - M_1 N_2} \right)^2 (N_1^2 - N_2^2) = 1 \dots \dots \dots (14)$$

$$\tan \phi = -N_1/N_2 \dots \dots \dots (15)$$

ただし

$$\begin{aligned} M_0/E &= \frac{2\Omega e/E}{\sqrt{1+K}} \left\{ \frac{\sqrt{1+K}}{\tan \Omega \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right)} - \frac{1 - \cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0}{\sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0} \right\} \\ M_1/E &= \frac{\Omega}{(\Omega^2 - 1)} \cdot \frac{\sin \theta_0}{\tan \Omega \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right)} - \frac{K\Omega^2(1 - \cos \theta_0)}{(\Omega^2 - 1)(\Omega^2(1+K) - 1)} - \frac{\Omega \sqrt{1+K}}{\Omega^2(1+K) - 1} \cdot \frac{\sin \theta_0(1 - \cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0)}{\sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0} \\ M_2/E &= -\frac{\Omega^2 K \sin \theta_0}{(\Omega^2 - 1)(\Omega^2(1+K) - 1)} + \frac{\Omega}{(\Omega^2 - 1)} \cdot \frac{1 + \cos \theta_0}{\tan \Omega \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right)} + \frac{\Omega \sqrt{1+K}}{\Omega^2(1+K) - 1} \\ &\quad \cdot \frac{(1 + \cos \theta_0)(\cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0 - 1)}{\sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0} \\ N_1/E &= \frac{\Omega}{\Omega^2 - 1} \sin \theta_0 \cdot \tan \Omega \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{\Omega^2 K(1 + \cos \theta_0)}{(\Omega^2 - 1)(\Omega^2(1+K) - 1)} - \frac{\Omega \sqrt{1+K}}{\Omega^2(1+K) - 1} \\ &\quad \cdot \frac{\sin \theta_0(1 + \cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0)}{\sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0} \end{aligned}$$

$$N_2/E = \frac{\Omega^2 K \sin \theta_0}{(\Omega^2 - 1)(\Omega^2(1+K) - 1)} + \frac{\Omega(\cos \theta_0 - 1)}{\Omega^2 - 1} \tan \Omega \left(\frac{\pi - \theta_0}{2} \right) \\ + \frac{\Omega \sqrt{1+K}}{\Omega^2(1+K) - 1} \cdot \frac{(1 - \cos \theta_0)(1 + \cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0)}{\sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0}$$

式(14)は θ_0 についての一元超越方程式となるから、これを解けば θ_0 が決定し、この値を式(15)に代入することから ϕ を求める。次に、これらの θ_0, ϕ の値と、これらの値を用いて計算した A_2, B_2 を式(7)に代入すれば ξ_2 が求まることになる。

3・4 フーリエ係数 a_m, b_m の決定 式(2)の右辺 $G(x-z)$ は ξ の一周期 $P'T'$ 間、すなわち θ の 2π 区間のうち QR 区間で $G(x-z) = k_2 \xi_2$, ST 区間で $G(x-z) = -k_2 \xi_2$, 他の区間では零となる関数であることを考慮して、式(2)の両辺を一周期にわたり積分するというフーリエ係数を求める一般的方法より a_m, b_m は次のように求まる。

$$a_{2m-1} = \frac{2K}{\pi} \left[\left(\frac{e/E}{1+K} - \frac{1}{\Omega^2(1+K) - 1} \right) \left\{ \frac{1}{(\Omega \sqrt{1+K})^2 - (2m-1)^2} \right\} \{ \Omega \sqrt{1+K} \sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0 \cdot \cos(2m-1)\theta_0 \right. \right. \\ \left. \left. - (2m-1) \cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0 \cdot \sin(2m-1)\theta_0 \right\} - \frac{1}{\sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0} \left\{ \cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0 \left(\frac{\sin \varphi}{\Omega^2(1+K) - 1} - \frac{e/E}{1+K} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sin(\theta_0 + \varphi)}{\Omega^2(1+K) - 1} + \frac{e/E}{1+K} \right\} \cdot \frac{1}{(\Omega \sqrt{1+K})^2 - (2m-1)^2} \right. \\ \left. \times \{ \Omega \sqrt{1+K} \cos \Omega(1+K) \cdot \theta_0 \cdot \cos(2m-1)\theta_0 + (2m-1) \sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0 - \sin(2m-1)\theta_0 - \Omega \sqrt{1+K} \} \right. \\ \left. + \frac{\cos \varphi}{\{\Omega^2(1+K) - 1\}} \cdot \frac{1}{(2m-1)^2 - 1} \{ \cos \theta_0 \cdot \cos(2m-1)\theta_0 + (2m-1) \sin \theta_0 \cdot \sin(2m-1)\theta_0 - 1 \} \right. \\ \left. - \frac{\sin \varphi}{\{\Omega^2(1+K) - 1\}} \cdot \frac{1}{(2m-1)^2 - 1} \{ (2m-1) \cos \theta_0 \cdot \sin(2m-1)\theta_0 - \sin \theta_0 \cdot \cos(2m-1)\theta_0 \} \right. \\ \left. - \frac{e/E}{(2m-1)(1+K)} \cdot \sin(2m-1)\theta_0 \right] \dots\dots\dots (16)$$

$$b_{2m-1} = \frac{2K}{\pi} \left[\left(\frac{e/E}{1+K} - \frac{1}{\Omega^2(1+K) - 1} \right) \left\{ \frac{1}{(2m-1)^2 - (\Omega \sqrt{1+K})^2} \right\} \{ (2m-1) \cos(2m-1)\theta_0 \cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \Omega \sqrt{1+K} \sin(2m-1)\theta_0 \sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0 - (2m-1) \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{\sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0} \left\{ \cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0 \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{\Omega^2(1+K) - 1} - \frac{e/E}{1+K} \right) - \frac{\sin(\theta_0 + \varphi)}{\Omega^2(1+K) - 1} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e/E}{1+K} \right\} \cdot \frac{1}{(\Omega \sqrt{1+K})^2 - (2m-1)^2} \right. \\ \left. \times \{ \Omega \sqrt{1+K} \sin(2m-1)\theta_0 \cdot \cos \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0 - (2m-1) \cos(2m-1)\theta_0 \cdot \sin \Omega \sqrt{1+K} \cdot \theta_0 \} \right. \\ \left. + \frac{\cos \varphi}{\Omega \sqrt{1+K} - 1} \cdot \frac{1}{1 - (2m-1)^2} \{ (2m-1) \sin \theta_0 \cos(2m-1)\theta_0 - \cos \theta_0 \sin(2m-1)\theta_0 \} \right. \\ \left. + \frac{\sin \varphi}{\Omega^2(1+K) - 1} \cdot \frac{1}{1 - (2m-1)^2} \{ (2m-1) \cos \theta_0 \cos(2m-1)\theta_0 + \sin \theta_0 \sin(2m-1)\theta_0 - (2m-1) \} \right. \\ \left. + \frac{e/E}{1+K} \cdot \frac{1}{(2m-1)} \{ \cos(2m-1)\theta_0 - 1 \} \right] \dots\dots\dots (17)$$

4. 運動方程式の解およびトルク積

4・1 系を分解した後の二つの1自由度系の解

式(1)にもどって考える。二つの非線形項のうち $G(x-z)$ は線形化できた。残る $T(y-x)$ は J_1 と J_2 の衝突時にだけ大きな値を有し、それ以外の時は零となる衝撃的な励振トルクである。前述のように本研究の衝突振動では加振一周中に J_1, J_2 間で発生する衝突の回数は不明であるから J_1, J_2 の変位等をあらかじめ仮定することはできない。そこで以下では著者の先の報告⁽³⁾⁽⁴⁾と同様にデュアメル積分を利用して、回帰式による解を求めることにする。

励振トルクの作用時刻を表すのに記号 t' を用いる

ことにし、 J_1, J_2 に作用する励振トルクを $F(t')$ とすると形式的には図1を図4(a), (b)に示す二つの1自由度系に分けて表せる。無次元時間 $\theta' = \omega t'$ で表した励振トルクを $f(\theta') = F(\theta'/\omega)/J_1$ とおくと、この励振トルクにより単位慣性モーメントは

図4 系の分解

$d\dot{x}=f(\theta')d\theta'/\omega^2$ (18)
 に等しい瞬間的な角速度変動を生ずることになる。ただし $\dot{\theta}=d\theta/dt$ である。ところで図4の1自由度系において、励振トルク $F(t')$ が作用していない場合の J_1 , J_2 の運動方程式の解 x_1, y_1 は初期変位及び初速度をそれぞれ $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ とおくと

$$\begin{aligned}
 x_1 = & e^{-\gamma\theta} \left\{ \left(A' + \frac{\lambda\dot{x}_0}{\sqrt{1-\gamma^2}} \right) \sin q\theta + D \cos q\theta \right\} \\
 & + B \sin(\theta + \delta) - E \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_{2m-1}} (a_{2m-1} C(\theta) \\
 & + b_{2m-1} S(\theta)) - \gamma\lambda
 \end{aligned}$$

..... (19)

$$y_1 = (1 - e^{-c\theta}) \left(\frac{\dot{y}_0 + (1/2)}{c} \right) + y_0 - (\theta/2) \dots \dots (20)$$

ここで

$$\omega_0 = \sqrt{k_1/J_1}, \lambda = \omega/\omega_0 = 1/\chi, \quad \gamma = c_1/2\sqrt{J_1 k_1},$$

$$q = \chi\sqrt{1-\gamma^2}, \quad c = c_2/J_2\omega$$

$$\delta = \tan^{-1}\{-2\gamma\lambda/(1-\lambda^2)\}$$

$$\tan P_{2m-1} = 2\gamma\lambda(2m-1)/(1-\lambda^2(2m-1)^2)$$

$$\psi_{2m-1} = \sqrt{(1-\lambda^2(2m-1)^2)^2 + \{2\gamma\lambda(2m-1)\}^2}$$

$$A' = \{\gamma(x_0 - B \sin \delta + \gamma\lambda) - \lambda B \cos \delta\} / \sqrt{1-\gamma^2}$$

$$+ \frac{E}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_{2m-1}} [a_{2m-1}\{\gamma C(0)$$

$$- \lambda(2m-1)S(0)\} + b_{2m-1}\{\gamma S(0)$$

$$+ \lambda(2m-1)C(0)\}$$

$$B = E/\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\gamma\lambda)^2}$$

$$D = x_0 - B \sin \delta + \gamma\lambda$$

$$+ E \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_{2m-1}} \{a_{2m-1}C(0) + b_{2m-1}S(0)\}$$

$$S(\theta) = \sin\{(2m-1)(\theta - \varphi) - P_{2m-1}\}$$

$$C(\theta) = \cos\{(2m-1)(\theta - \varphi) - P_{2m-1}\}$$

そこで励振トルク $f(\theta')$ が作用するときの系の運動は

次のようにして求められる。すなわち式(18)の速度増分を時刻 θ' における初速度とみなし式(19)を利用することから θ' 以後の任意の時刻 θ における J_1 の変位増分は

$$dx = \frac{\lambda f(\theta') e^{-\gamma\kappa(\theta-\theta')}}{\omega^2 \sqrt{1-\gamma^2}} \sin q(\theta-\theta') \cdot d\theta' \dots \dots \dots (21)$$

同様に J_2 の変位増分は

$$dy = -\frac{f(\theta')}{\omega^2 c} \{1 - e^{-c(\theta-\theta')}\} d\theta' \dots \dots \dots (22)$$

よって時刻 $\theta'=0$ から $\theta'=\theta$ の間に作用する励振トルク $f(\theta')$ による角変位増分は式(21), (22)を $\theta'=0$ から $\theta'=\theta$ まで積分したものとなる⁽⁶⁾。

4・2 S 回めの衝突以後の J_1, J_2 の運動 J_1 と J_2 の衝突時に発生する励振トルクの形状を三角波形で表すものとし、時刻 $\bar{\theta}_1$ を中心とする次の無次元の三角波形 $f'(\theta')$ を導入する。

$$f'(\theta') = \begin{cases} 0 & : \theta' < \bar{\theta}_1 - 1/n \\ n + n^2(\theta' - \bar{\theta}_1) & : \bar{\theta}_1 - (1/n) \leq \theta' \leq \bar{\theta}_1 \\ n - n^2(\theta' - \bar{\theta}_1) & : \bar{\theta}_1 \leq \theta' \leq \bar{\theta}_1 + (1/n) \\ 0 & : \bar{\theta}_1 + (1/n) \leq \theta' \end{cases}$$

..... (23)

ここで n は、三角波形の尖りかたに関係する定数である。1 回めの衝突が時刻 $\bar{\theta}_1$ で発生したとすれば、 J_1, J_2 間に作用する励振トルク $f(\theta')$ は式(23)を用いて

$$f(\theta') = I_1 \omega f'(\theta')/J_1 \dots \dots \dots (24)$$

ここで $I_1, \bar{\theta}_1$ は現在未定の定数であるが後に決定される。 I_1 は本論文でトルク積と呼ぶもので直線運動の力積に相当する物理量である。1 回めの衝突による J_1 の変位増分は式(21)に式(23), (24)を代入して $\theta'=0$ から $\theta'=\theta$ まで積分することから

$$\begin{aligned}
 x_2 = & \frac{\lambda I_1}{J_1 \omega \sqrt{1-\gamma^2}} \left[\int_{\bar{\theta}_1 - (1/n)}^{\bar{\theta}_1} e^{-\gamma\kappa(\theta-\theta')} \{n + n^2(\theta' - \bar{\theta}_1)\} \sin q(\theta-\theta') \cdot d\theta' \right. \\
 & \left. + \int_{\bar{\theta}_1}^{\bar{\theta}_1 + (1/n)} e^{-\gamma\kappa(\theta-\theta')} \{n - n^2(\theta' - \bar{\theta}_1)\} \sin q(\theta-\theta') \cdot d\theta' \right] \dots \dots \dots (25)
 \end{aligned}$$

さて、1 回めの衝突が便宜上 J_1 のがたの後面で発生したものとすれば、1 回めの衝突以後の J_1 の角変位は式(19)に式(25)を加えたものとなる。ここで、がたの後面とは、実機では回転方向に対し入力歯車の歯の後面である。また J_2 の角変位も同様にして求められる。したがって S 回の衝突発生後の J_1, J_2 の運動は、 S 回の衝突による角変位増分を加算したものとなる。 $\rho_i (i=1, 2, 3, \dots, S)$ をがたの後面での衝突の場合 $\rho_i=1$, 前面での衝突の場合 $\rho_i=-1$ とする定数と定義すれば、 S 回の衝突以後の J_1, J_2 の運動は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 x = & e^{-\gamma\kappa\theta} (A \sin q\theta + D \cos q\theta) + B \sin(\theta + \delta) - \gamma\lambda - E \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_{2m-1}} \{a_{2m-1}C(\theta) + b_{2m-1}S(\theta)\} \\
 & + \frac{Hn^2}{((\gamma\chi)^2 + q^2)^2} \sum_{i=1}^S \rho_i I_i e^{-\gamma\kappa(\theta-\bar{\theta}_i)} \\
 & \times [F_1\{((\gamma\chi)^2 - q^2) \sin q(\theta - \bar{\theta}_i) + 2\gamma\chi q \cos q(\theta - \bar{\theta}_i)\} + F_2\{((\gamma\chi)^2 - q^2) \cos q(\theta - \bar{\theta}_i)\}
 \end{aligned}$$

$$-2\gamma x q \sin q(\theta - \bar{\theta}_i)] \dots\dots\dots (26)$$

$$y = (-e^{-c\theta})\{\dot{y}_0 + (1/2)\}/c + y_0 - (\theta/2) - \frac{1}{c\omega J_2} \sum_{i=1}^S \rho_i I_i \left\{ 1 - \frac{n^2}{c^2} e^{-c(\theta - \bar{\theta}_i)} \cdot (e^{-c/n} + e^{c/n} - 2) \right\} \dots\dots\dots (27)$$

ただし

$$A = A' + \lambda \dot{x}_0 / \sqrt{1 - \gamma^2}$$

$$F_1 = (e^{-\gamma k/n} + e^{\gamma k/n}) \cos q/n - 2$$

$$F_2 = (e^{-\gamma k/n} - e^{\gamma k/n}) \sin q/n$$

4・3 $\bar{\theta}_s, I_s, \rho_{s+1}$ の決定 S 回めの衝突発生時刻 $\bar{\theta}_s$ の決定は, S 回めの衝突直前の J_1, J_2 の角変位間の関係から

$$y(\bar{\theta}_{s-0}) = \varepsilon \rho_s + x(\bar{\theta}_{s-0}) \dots\dots\dots (28)$$

式(26), (27)より求めた S 回めの衝突直前の変位 x, y を式(28)に代入することから

$$\begin{aligned} (1 - e^{-c\bar{\theta}_s})(\dot{y}_0 + 1/2)/c + y_0 - \bar{\theta}_s/2 - \frac{1}{c\omega J_2} \sum_{i=1}^{S-1} \rho_i I_i \left\{ 1 - \frac{n^2}{c^2} e^{-c(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} \cdot (e^{-c/n} + e^{c/n} - 2) \right\} &= \varepsilon \rho_s \\ + e^{-\gamma k \bar{\theta}_s} \{ A \sin q \bar{\theta}_s + D \cos q \bar{\theta}_s \} + B \sin(\bar{\theta}_s + \delta) - \gamma \lambda - 2E \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\psi_{2m-1}} \{ a_{2m-1} C(\bar{\theta}_s) + b_{2m-1} S(\bar{\theta}_s) \} \\ + \frac{Hn^2}{(\gamma x)^2 + q^2} \sum_{i=1}^{S-1} \rho_i I_i e^{-\gamma k(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} \times [F_1 \{ ((\gamma x)^2 - q^2) \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) + 2\gamma x q \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) \} \\ + F_2 \{ ((\gamma x)^2 - q^2) \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) - 2\gamma x q \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) \}] \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

これを解くことから S 回めの衝突発生時刻 $\bar{\theta}_s$ が決定される。次に I_s は反発係数 e_0 の定義式

$$-e_0 = \{ \dot{y}_{\bar{\theta}_{s-0}} - \dot{x}_{\bar{\theta}_{s-0}} \} / \{ \dot{y}_{\bar{\theta}_{s-0}} - \dot{x}_{\bar{\theta}_{s-0}} \} \dots\dots\dots (30)$$

に, 式(26), (27)を θ で1回微分したものを代入することから次のように得られる。

$$\begin{aligned} I_s = (1 + e_0) \left[(\dot{y}_0 + 1/2) e^{-c\bar{\theta}_s} - 1/2 - \frac{n^2}{\omega J_2 c^2} \right. \\ \times (e^{-c/n} + e^{c/n} - 2) \sum_{i=1}^{S-1} \rho_i I_i e^{-c(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} - e^{-\gamma k \bar{\theta}_s} \\ \times \{ (qA - \gamma x D) \cos q \bar{\theta}_s - (\gamma x A + qD) \sin q \bar{\theta}_s \} \\ - B \cos(\bar{\theta}_s + \delta) - 2E \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)}{\psi_{2m-1}} \\ \times (a_{2m-1} S(\bar{\theta}_s) - b_{2m-1} C(\bar{\theta}_s)) \\ \times \frac{Hn^2}{(\gamma x)^2 + q^2} \sum_{i=1}^{S-1} \rho_i I_i e^{-\gamma k(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i)} \\ \times [F_1 \{ q \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) + \gamma x \\ \times \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) \} - F_2 \{ q \sin q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) - \gamma x \\ \times \cos q(\bar{\theta}_s - \bar{\theta}_i) \}]] / [\rho_i \{ n^2 (e^{-c/n} \\ + e^{c/n} - 2) / \omega J_2 c^2 - Hn^2 (F_1 q + F_2 \gamma x) / \\ ((\gamma x)^2 + q^2) \}] \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

次に $S+1$ 回めの衝突時に ρ_{s+1} のとる値は S 回の衝突後, ある時間経過後の J_1, J_2 の変位の位置関係を比較することから得られる。この手順は著者の既報⁽³⁾⁽⁴⁾と同一であるために簡単に述べる。すなわち比較のための時刻を S 回の衝突後最初に J_1 の加速度が零となる時刻とし $\bar{\theta}_s^*$ とおくと

$$\left. \begin{aligned} y(\bar{\theta}_s^*) &\geq \varepsilon + x(\bar{\theta}_s^*) \quad \text{ならば, がたの後面} \\ y(\bar{\theta}_s^*) &\leq -\varepsilon + x(\bar{\theta}_s^*) \quad \text{ならば, がたの前面} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

で衝突することになる。一方

$$-\varepsilon + x(\bar{\theta}_s^*) < y(\bar{\theta}_s^*) < \varepsilon + x(\bar{\theta}_s^*) \dots\dots\dots (33)$$

の場合は, J_2 はがたの途中にあるからさらにある時間

経過した後の位置関係を比較する必要がある。そこで今度は $y(\bar{\theta}_s^*)$ の点から $\varepsilon \rho_s + x(\theta)$ の曲線に接線を引き, その接点の時刻を新たに比較のための時刻 $\bar{\theta}_s^*$ とし式(23)にもどり, 後は一連の手順を繰返す。この

図5 解析解による波形

過程で接線の傾きが反転すれば $S+1$ 回めの衝突は S 回めの衝突と反対の面で発生することになり $\rho_{S+1} = -\rho_S$ となる。

4・4 計算手順 J_1, J_2 の運動やトルク積 I_S の値は回帰式(26), (27), (31)より定まる。その手順はまず式(14), (15)より θ_0, ϕ を求め、この値を式(16), (17)に代入して a_{2m-1}, b_{2m-1} を決定する。次に便宜上1回めの衝突ががたの後面で発生するよう初期条件 $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ を設定することから $\rho_1=1$ となる。もちろんがたの前面で衝突が発生するような設定でも支障はない。これにより式(29), (31)より $\bar{\theta}_1, I_1$ が定まる。式(32), (33)より2回めの衝突発生位置の判定を行い以後はこの手順を初めから繰返し行う。

5. 解析結果

5・1 振動系の諸元 すべての計算に共通に用いた数値は、 $J_1=2.27 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_2=1.12 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $E=0.0256 \text{ rad}$, $e_0=0.91$, $n=70$ とした。これらの値は既報⁽⁴⁾で用いた値と同じで e_0 は実測値、 n の値は実験およびシミュレーションから得られた平均的接触時間を無次元化し、これを $2/n$ に等置したことから得たものである。またフーリエ級数の項数は $m=20$ とした。

5・2 振動波形 図5は解析解より求めた波形の

図6 シミュレーション解による波形

一例で $e/E=1.0$, $\varepsilon/E=0.03$, $\omega/\omega_1=1.9$, $K=1.0$, $\omega'=20\pi \text{ rad/s}$, $k_1=16.8 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$, $E=0.0256 \text{ rad}$ のものである。図5の(a), (b)はそれぞれ J_1, J_2 の角速度波形であり、(c)は J_1 の角加速度波形である。(d)はばね k_2 の作用による非線形トルク $G'(\theta)$ の波形である。角加速度波形中の衝突によって生じたパルス状の波形の立上りおよび立下りの方向から明らかなように、 J_1 は J_2 の角速度波形が増速過程にある約半周期間ではがたの後面、減速過程にある約半周期間ではがたの前面と多数回の衝突を繰返していることがわかる。すなわち、二段ばね特性の場合にも、がた部における衝突の状況は既報⁽³⁾⁻⁽⁵⁾で述べた一段ばねの特性の場合の衝突の状況と同じである。図5の(e)はトルク積 I であり、縦軸において便宜上 $\rho_i \cdot I_i$ を I とおいている。図6は、式(1)のルンゲクッタ法によるシミュレーション計算の一例で、諸元は図5の場合と同一であり、図中の(a)~(d)は図5のそれに対応している。図5, 6を比較すると両図の(d)では多少波形の大きさが異なっている。図6(d)では $G'(\theta) \geq 0$ である部分の波形が、 $G'(\theta) \leq 0$ である部分の波形よりも小さめになっているのに対し図5(d)では両部分の波形の大きさが等しくなっている。等しくなった理由は、図5では

図7 ばね定数比 K とトルク積の和の関係

図8 ばね定数比 K と衝突回数との関係

図9 二段目ばねの不感区間とトルク積の和の関係

図10 二段目ばねの不感区間と衝突回数との関係

衝突と粘性減衰とを無視した近似1自由度系を用い、この系で作動するばね k_2 による非線形トルクを $G'(\theta)$ の近似値として採用したことによる。しかし解析解による他の波形はシミュレーションによる波形とよく一致しているといえる。

5.3 ばね定数比 K とトルク積の和および衝突回数の関係 図7は $e/E=1.0$, $\varepsilon/E=0.03$ の場合の一段目のばねのばね定数 k_1 に対する二段目ばねのばね定数 k_2 の比 K と、1サイクル当たりのトルク積の和で評価したものである。ここでトルク積の和とは、解析解では $\sum |I_i|$ 、シミュレーション解では $2\pi/\omega \int_0^T \{J_2 |d^2y(t)/dt^2| dt/T\}$ であり、両者は式(24)により同じ物理量である。なお本論文の計算では $T=6\pi/\omega$ にとっている。図8は、ばね定数比 K と1サイクル中に発生する衝突回数との関係を調べたものである。両図から K の増加につれて衝突回数が漸次増加し、その結果トルク積の和も増加していくことが分かる。本報の二段ばねは漸硬ばねであるから、3.2節の近似1自由度非線形系について、横軸に ω/ω_1 、縦軸に ξ を取って共振曲線を描くと、背骨曲線は ω/ω_1 の大きいほうに倒れたものとなる。パラメータ K の大きいほ

図11 がたの大きさとトルク積の和との関係

ど倒れ方も大きい。そこで $\omega/\omega_1 > 1$ の範囲では、 ω/ω_1 が一定であっても、 K の増大に伴って、その状態は共振状態に近づき J_1, J_2 の振幅は大きくなる。その結果、図8に示すように J_1 の増速および減衰過程中的 J_1, J_2 間の衝突回数が増大するものと考えられる。なお図7中の実線は、系が共振点を越えた状態にある場合であり、破線は共振点以前の状態にある場合である。

5.4 e/E とトルク積の和および衝突回数との関係 図9, 10は解析解より求めた $\omega/\omega_1=2.2$, $\varepsilon/E=0.03$ の場合の e/E とトルク積の和および衝突回数の関係の一例を示したものである。図から e/E を増加していくと衝突回数が減少し、その結果トルク積の和も減少していくことがわかる。なお、 $e/E \approx 1.2$ 付近で K の値によらずトルク積の和および衝突回数がほぼ一致している。これはこの値以上の e/E の値では相対振幅 $x-z$ が二段目のばねが作用しない不感区間内におさまってしまうためである。

5.5 がたの大きさとトルク積の和および衝突回数との関係 図11は $e/E=1.0$, $\omega/\omega_1=2.2$ の場合の解析値より求めたがたの大きさと、トルク積の和の関係を示したものである。図から、がたの大きさが変化してもトルク積の和はあまり変化しないことがわかる。しかし e/E を変化させた場合と異なり、がたの大きさが大きくなると衝突回数が減少していくので1回当たりのトルク積は増加していくことになる。この結果は系のばね特性を一段ばねとして解析した結果⁽⁴⁾と同じである。よってばね特性のちがいは、がたの大きさとトルク積の和の関係には影響を与えないといえる。

6. 結 論

がたと二段ばねを持つ2自由度系の強制ねじり振動について、ばねが対称な折線特性の場合を取り上げ解析解を誘導した。また、その解とシミュレーション解を比較した。その結果、次の結論が得られた。

(1) ばね定数比 $K=k_2/k_1$ を大きくしていくと系

が共振に近づき急激にトルク積の和が増加する。したがって二段目ばねのばね定数 k_2 は、クラッチディスクにおける過大の相対ねじり変位を防止する目的からは大きいことが望ましいが、アイドリング時の異音対策の目的からは余り大きくできない。

(2) 二段目ばねの不感区間 e を大きくしていくとトルク積の和と衝突回数は減少していく。つまり、二段目ばねが作動する場合であっても一段目ばねの作動範囲が広いほうがアイドリング時の異音対策の点からは望ましい。

(3) がた(バックラッシュ)の大きさを変化させて

もトルク積の和はあまり変化しない。

文 献

- (1) 例えば、近谷・藤本・小島、クラッチディスクによるトランスミッションアイドル騒音の低減、自技会、871060(1987)、311.
- (2) 片岡・大野・鈴木、機論、52-474、C(1986)、431.
- (3) 片岡・大野・鈴木、機論、52-475、C(1986)、844.
- (4) 片岡・大野・鈴木、機論、52-481、C(1986)、2350.
- (5) 片岡・大野・鈴木、機論、52-482、C(1986)、2640.
- (6) Timoshenko, S., ほか3名、(谷口・田村訳)、工業振動学、(1977)、81、コロナ社.

討 論

〔質問〕 渡 辺 武(山梨大学教育学部)

以下の二点について伺います。

(1) $G(x-z)$ は図2に示すような関数であるから、最初から、式(2)のようにせず、

$$G(x-z)/k_1 E = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \{a_m \cos m(\theta-\varphi) + b_m \sin m(\theta-\varphi)\}$$

の形に仮定できたのではないか。

(2) 数値計算では $m=20$ としているが、 K などの値によっても項数 m は変わると思われるがどうか。 $m=20$ とした理由はなにか。

〔回答〕 (1) 式(2)に示した $G(x-z)$ 中の x は式(1)、すなわち2自由度系の運動方程式を解いた場合の J_1 の変位であり、減衰や衝突のために相対変

位 $x-z$ は軸対称ではないので $G(x-z)$ は奇調和関数とはならない。次に、この x を近似1自由度系における J の変位で近似することにより初めて $G(x-z)$ は奇調和関数となるので、ご指摘のフーリエ級数の表現が可能となる。

(2) $\omega/\omega_1=1.6$, $e/E=1.0$ とし、 $K=0.5$ と $K=4.0$ の場合についてフーリエ級数の項数を $m=10, 15, 20$ 等として非線形トルク $G'(\theta)$ の波形を比較してみたところ、 $m=15$ 以上ではフーリエ級数としての収束性には K の値による差は認められなかった。フーリエ係数の計算は、計算全体を通じて1回だけ行えばよいので、 m の値が多少大きくても全体の計算時間にはあまり影響がないことから念のため $m=20$ とした。