振動エネルギー最小化に基づく薄板の最適設計*

井上克己^{*1}, 加藤正名^{*1}, 大貫憲一^{*2}Optimum Design of a Plate Based on the Minimization
of the Vibration Energy

Katsumi INOUE, Masana KATO and Kenichi OHNUKI

An optimization method is proposed to reduce the vibration of structures, where the total vibration energy is adopted as the objective function to be minimized. The theory of modal analysis is introduced in the optimization, and the sensitivity of the vibration energy with respect to the change of design variable is represented as a function of the sensitivities of both natural frequencies and natural modes. The proposed method is applied to the optimum design problem of a rectangular plate with clamped edges, which is loaded by a central exciting force. The finite element method is used for the computation, and the thickness of elements is adopted as the design variable. The solution of the problem demonstrates not only the excellence of the method for the reduction of vibration but also the ability to control the shift of resonance frequency.

Key Words: Structural Analysis, Vibration, Optimum Design, Sensitivity, Modal Analysis, FEM, Vibration Energy, Plate

1. 緒 言

機械設計の目的は意図した機能を有する物を実現することにあり、その過程で試作機による実験またはコンピュータシミュレーションによる機能の検討が行われるが、検討に基づく設計案の変更あるいは承認などの意志決定は、通常、設計者に委ねられている。これに対して、限られた範囲の問題については、ある条件下で最良の解が得られるまでコンピュータシミュレーションと設計変更を繰返して設計の自動化と効率化を図る最適設計を行うことが可能である。

最適設計は、たとえば、重量の最小化などのように設計者の目的意識を数学モデルとして定式化する部分とその解法から成り、多くの研究⁽¹⁾が行われている。著者らは動力伝達装置の振動伝達に関する研究⁽²⁾を行っており、上記に関連して装置を構成する薄平板の静的な曲げ剛性の最大化⁽³⁾について考察した。振動の抑制を目的とした最適設計に関しては、構造を変更して固有振動数を移動させ共振を回避する方法⁽⁴⁾や、特定部分の動的応答量を低減する方法⁽⁵⁾が従来から研究さ

れている。前者の場合、固有振動数の目標値の設定基準については未解決であり、設計者の経験に基づく洞察が要求される。また、後者は伝達関数を求めそれを制御する目的には適するが、構造物全体としての振動低減の効果は未知である。本研究では、構造物の振動エネルギーを最小化して構造物全体の振動を抑制する最適設計法を提示する。本方法でも結果的に固有振動数を移動させることになるが移動の目標値をあらかじめ設定する必要はなく、構造物全体の振動を抑制する点で従来の方法と異なる。ここでは、本計算法の要点を示した後で、周辺固定薄平板の中央に共振点に近い振動数の強制力を加える場合について、重量一定の条件下で最適設計を行いその有用性を検討する。

2. 振動エネルギー最小化に基づく最適設計

2・1 解法の概要 Huang⁽⁶⁾は、重量一定の条件下で静的な外力を受ける構造物の剛性の最大化が蓄えられるひずみエネルギーの最小化に帰着され、これが等応力設計と等価であることを示している。一方、エネルギー保存則が成立するとき運動エネルギーはポテンシャルエネルギーに置換されるから、振動エネルギーの最小化はひずみエネルギーの最小化と同等であり、静的問題の場合のように振動エネルギーの最小化

* 平成元年1月24日 第955回講演会において講演、原稿受付 平成元年9月22日。

^{*1} 正員、東北大学工学部 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)。

^{*2} 正員、住友電工(株) (〒244 横浜市長区田谷町1)。

によって構造物の高剛性化と応力の平均化が図られることも期待できる。

重量一定の制約条件の下で、最小化すべき目的関数として振動エネルギー T を考えるとき、その最適設計問題は以下のように略記される。

最小化 $T(\{t\})$: 振動エネルギー

制約条件 $g(\{t\}) = W_0 - W(\{t\}) = 0$ (1)

設計変数 $\{t\} = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T$

ここに、 W_0 は初期重量、 W は設計変数 $\{t\}$ と重量の関係を与える関数であり、 $(\)^T$ は転置行列を示す。モード解析法⁽⁷⁾を用いて振動エネルギーの感度 $T_{,i} = \partial T / \partial t_i$ を求め、傾斜投影法⁽⁸⁾によって最急降下ベクトル $\{d\} = -\{T_{,1}, T_{,2}, \dots, T_{,n}\}^T$ を制約条件 $g(\{t\}) = 0$ で作られる部分集合に直交投影して許容降下ベクトルを得た後、二次式補間による一次元探索⁽⁹⁾を行い最適解を求める。解法は文献に詳しいから省略し、振動エネルギーおよびその感度の導出のみを以下に記す。

2・2 振動エネルギー 有限要素法により離散化された N 自由度の系における振動エネルギー T は、

$$T = 1/2 \{ \dot{q}^* \}^T [M] \{ \dot{q} \} \text{ (2)}$$

ここに、 $[M]$ は質量行列、 $\{ \dot{q}^* \}$ は応答速度 $\{ \dot{q} \}$ の共役複素ベクトルである。比例粘性減衰を仮定すれば、 $\{ \dot{q} \}$ は不減衰固有モード $\{ \phi_r \}$ の一次結合で表される。すなわち、

$$\{ \dot{q} \} = \sum_{r=1}^N \dot{\xi}_r \{ \phi_r \} = [\phi] \{ \dot{\xi} \} \text{ (3)}$$

ここで、不減衰固有振動数を Ω_r 、モード減衰比を γ_r 、外力を $\{ F \}$ 、外力の振動数を ω とすれば、

$$\dot{\xi}_r = \frac{\gamma_r \{ \phi_r \}^T \{ F \}}{\Omega_r \{ 2\gamma_r \gamma_r - j(1 - \gamma_r^2) \}} \text{ (4)}$$

ただし、 $\gamma_r = \omega / \Omega_r$ (5)
式(2)、(3)より、

$$T = 1/2 \{ \dot{\xi}^* \}^T [\phi]^T [M] [\phi] \{ \dot{\xi} \} \text{ (6)}$$

$\{ \phi_r \}$ は、質量行列に関して直交性を有し、

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I] \quad ([I] \text{ は単位行列}) \text{ (7)}$$

と正規化できるから、式(6)は簡単に、

$$T = 1/2 \{ \dot{\xi}^* \}^T \{ \dot{\xi} \} \\ = 1/2 \sum_{r=1}^N (\dot{\xi}_{rR}^2 + \dot{\xi}_{rI}^2) \text{ (8)}$$

ここに、 $\dot{\xi}_{rR}$ 、 $\dot{\xi}_{rI}$ は $\dot{\xi}_r$ の実部と虚部であり、次式で与えられる。

$$\dot{\xi}_{rR} = \frac{2\gamma_r \gamma_r^2 \{ \phi_r \}^T \{ F \}}{\Omega_r \{ (2\gamma_r \gamma_r)^2 + (1 - \gamma_r^2)^2 \}} \text{ (9)}$$

$$\dot{\xi}_{rI} = \frac{\gamma_r (1 - \gamma_r^2) \{ \phi_r \}^T \{ F \}}{\Omega_r \{ (2\gamma_r \gamma_r)^2 + (1 - \gamma_r^2)^2 \}} \text{ (10)}$$

2・3 振動エネルギーの感度 振動エネルギーの感度 $T_{,i}$ は、式(8)を t_i で偏微分することにより、

$$T_{,i} = \sum_{r=1}^N (\dot{\xi}_{rR} \dot{\xi}_{rR,i} + \dot{\xi}_{rI} \dot{\xi}_{rI,i}) \text{ (11)}$$

$\{ F \}$ および ω が設計変数に依存しないものとすれば、式(5)、(9)、(10)から明らかなように、上式の $\dot{\xi}_{rR,i}$ 、 $\dot{\xi}_{rI,i}$ は、固有振動数の感度 $\Omega_{r,i}$ 、固有モードの感度 $\{ \phi_{r,i} \}$ およびモード減衰比の感度 $\gamma_{r,i}$ から求められる。さらに、比例粘性減衰系においては、

$$\gamma_r = 1/2(\alpha/\Omega_r + \beta\Omega_r) \text{ (12)}$$

と表されるから、比例定数 α 、 β が設計変数 t_i に依存しないものと仮定すれば、

$$\gamma_{r,i} = 1/2\Omega_{r,i}(\alpha/\Omega_r^2 + \beta) \text{ (13)}$$

したがって、振動エネルギーの感度 $T_{,i}$ は固有振動数の感度 $\Omega_{r,i}$ および固有モードの感度 $\{ \phi_{r,i} \}$ から求められる。固有値と固有ベクトルの感度解析についてはいくつかの研究があるが、本研究では Fox らの方法⁽¹⁰⁾を用いて上述の感度を計算する。

3. 薄板の曲げ振動問題への適用

3・1 本方法による最適設計

2 辺の長さ a, b がそれぞれ 500, 300 mm、初期厚さ $t_0 = 5$ mm なる鋼製の周辺固定長方形薄板中央を大きさ 1 N の力で加振する場合について、初めにその固有振動数を求め、重量一定の制約条件の下で振動エネルギーを最小化する最適設計を行う。重量一定の制約条件とともに、穴を生じないように最小厚さを初期厚さの 1/10 とする制約条件を課す。図 1 に示すように板を 60 個の長方形領域に分割し、その厚さを設計変数とする。長方形領域をさらに二分割し、五次の形状関数に基づく三角形適合要素⁽¹¹⁾として解析に用いる。要素数 120、節点数 77、系の全自由度 $N = 462$ である。式(3)、(8)、(11)においては低次側 50 個の固有モードを用いて計算を行う。モード減衰比を与える式(12)における比例定数 α, β の値はそれぞれ 1.0、 1.0×10^{-6} とする。初期厚さの場合の振動エネルギーを図 2 に示す。二つの共振峰はそれぞれ一次固有振動数 $f_1 = 352.4$ Hz、三次固有振動数 $f_3 = 774.7$ Hz を示している。一次および三次の固有モードを図 3 に示す。

一次固有振動数 f_1 近傍の振動エネルギー最小化について次の 2 例を示す。

Ex. 1: $f_1 - 0.3$ Hz における振動エネルギー最小化

Ex. 2: $f_1 + 0.3$ Hz における振動エネルギー最小化

最適化過程の振動エネルギーの変化を初期状態における振動エネルギー T_0 で無次元化して図 4 に示す。いずれの場合も 1 回めの計算で大きく減少し、Ex. 1 で

は7回の反復で初期値 T_0 の 4.9×10^{-7} 倍, Ex. 2 では8回の反復で 6.8×10^{-6} 倍の値に収束している。なお、振動エネルギーの変化率が $1/1000$ 以下になったときを収束とした。また、本方法で得られる値は局所的最適値である。最適化による板厚分布を図5に示す。Ex. 1では、板厚は固定端中央近くで増加し、長辺中央部では初期厚さの2.5倍に達しているのに対し、板中央から短辺へ至る中心線の中点付近と四隅近くで減少して最小厚さ $t_0/10$ に等しくなっている。一方、Ex. 2の場合にはEx. 1とは逆の板厚分布傾向が認められる。最適化の1回目の計算における振動エネルギーの感度 T_i の分布を図6に示す。負の感度(板厚を増すと振動エネルギーが減少する)を●で、正の感度(板厚を減ら

すと振動エネルギーが減少する)を○で表し、感度の絶対値をその大ききで表している。各要素の厚さはこれら感度に比例して修正されるが、本計算では重量一定の制約条件を課しているために、感度の符号に対応して板厚が減少あるいは増加するわけではない。2例を比較すると同じ場所の感度の絶対値はほぼ等しく逆符号であり、最適化後の板厚分布が逆の様相を呈することが図6からも明らかである。また、板厚が最小厚さまで減少している部分は感度が小さく、この部分を切除しても振動エネルギーにはほとんど影響を与えないことを示している。最適化前後の振動エネルギーの周波数応答を図7に示す。Ex. 1では最適化によって共振点が高い周波数域へ移動しているのに対し、Ex.

図1 平板のモデルと座標系

図4 最適化に伴う振動エネルギーの収束(Ex. 1, Ex. 2)

図2 平板の振動エネルギー周波数応答

(a) 一次(352.4 Hz) (b) 三次(774.7 Hz)

図3 平板の固有モード

図5 最適化による板厚分布(Ex. 1, Ex. 2)

2では低いほうへ移動している。移動後の共振周波数における固有モードを図8に示す。Ex. 1では板厚が最も小さくなる板中央と短辺に至る中心線の中点付近に変位の極大値があり、その他の部分ではほとんど零となっている。板中央に1 Nの静荷重を与えた場合の応力分布を図9に示す。応力は次式によって計算した値である。

$$\sigma = EM/(2D/t) \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 E は縦弾性係数、 D は曲げ剛性、 M は曲げモーメント M_x あるいは M_y である。Ex. 1の場合、応力は平均化される方向に変化し、図9には示していないが剛性は高められる。一方、Ex. 2の場合はこのような効果は認められない。

三次固有振動数 f_3 近傍の振動エネルギー最小化に

図6 振動エネルギーの感度の分布

図7 最適化後の振動エネルギー周波数応答 (Ex. 1, Ex. 2)

関して、次の2例について同様の計算結果を示す。

Ex. 3: $f_3 = 0.3$ Hzにおける振動エネルギー最小化

Ex. 4: $f_3 + 0.3$ Hzにおける振動エネルギー最小化

最適化に伴う振動エネルギーの収束状態を図10に示す。いずれの場合も1回目の計算で大きく減少し、Ex. 3では8回の反復で初期値の 1.9×10^{-5} 倍、Ex. 4では16回の反復で 3.6×10^{-5} 倍の値に収束している。最適化による板厚分布を図11に、また、最適化前後の振動エネルギーの周波数応答を図12に示す。図12で、最適化によって共振峰が移動した結果、 f_3 を中心とする300~1000 Hzの範囲では応答曲線が平坦になっている。共振峰はEx. 3では300 Hz以下に、Ex. 4では1000 Hz以上の範囲に多く存在する。

以上の結果をまとめて考察する。着目する固有振動数よりわずかに低い振動数の加振力に対して振動エネルギー最小化を行う場合 (Ex. 1およびEx. 3, 以下ではCASE 1と記す) と、わずかに高い振動数に対する場合 (Ex. 2およびEx. 4, 以下ではCASE 2と記す) では、振動エネルギーの感度の符号が反転し、最適化後の板厚分布が逆の様相を呈する。これに対応して、

図8 最適化後の固有モード

図9 最適化による曲げ応力の変化

CASE 1では剛性を高める板厚修正が行われ、固有振動数が高い周波数域へ移動して加振振動数における振動エネルギーが減少し、一方、CASE 2では剛性を低下する板厚修正が行われ、固有振動数が低いほうへ移動して振動エネルギーが減少する。このことは、振動エネルギーの低減と同時に本方法を用いて共振点の移動を制御できることを意味し、構造変更後の周波数特性に関する定性的な示唆を得ることが可能である。また、構造物の剛性を高めて振動の抑制を図るという観点からはCASE 1の方法が望ましい。

3・2 固有振動数の制御に基づく方法との比較
従来の方法を用いて、重量一定の条件下で一次固有振動数 f_1 を最大にする最適化を試み(Ex. 5), Ex. 1の結果と比較する。

図 10 最適化に伴う振動エネルギーの収束(Ex. 3, Ex. 4)

図 11 最適化による板厚分布(Ex. 3, Ex. 4)

果と比較する。この方法による最適化後の板厚分布を図 13 に示す。分布の傾向は図 5 (a) に示した Ex. 1 の場合とほぼ同様であるが、Ex. 5 のほうが固定端中央部の板厚がやや薄く、四隅近くはやや厚くなっている。最適化前後の振動エネルギーを図 14 に示す。固有値解析では、高次の固有振動数に差異が認められるが一次固有振動数は 659.2 Hz で等しい。しかし、これは縮退しており、振動エネルギーのピークは高次の固有振動数 766.1 Hz と 703.6 の位置に現れている。 f_1 近傍の振動エネルギーの低減は Ex. 1 のほうが大きい。

3・3 考慮する固有モード数の影響 モード解析法で低い周波数範囲に着目する場合には、高次の固有モードを省略しても良い近似値が得られることが知られている。一方、最適設計では構造変更によって系の固有モードが変わるから、解析に用いる固有モードの数を固定すると最適化の収束状態に影響を与えることが考えられる。本計算では、全自由度の約 10 % にあたる低次側 50 個の固有モードを考慮して振動エネルギーを計算している。考慮する固有モード数 m が 10, 20, 30, 50 の各場合について、振動エネルギー収束状態を図 15 に示す。反復 5 回まではいずれもほぼ同じ経路を

図 12 最適化後の振動エネルギー周波数応答(Ex. 3, Ex. 4)

図 13 固有振動数最大化による板厚分布

図 14 本最適化法と固有振動数最大化による振動エネルギーの比較

図 15 振動エネルギーの収束に及ぼす固有モード数の影響

たどるが、それ以降板厚の修正が進み最適解に近づくと考えられる固有モードの数によって収束状態に差を生じている。 $m=50$ の場合には 7 回の反復で収束するがその値に差異が認められる。高い精度の解を得るためには、最適化の過程で考慮すべき固有モードの決定に関する考察を行い、その手続きを計算中に取り入れることが望ましいと考える。

4. 結 言

構造物の振動エネルギーを最小化する最適設計法を提示し、これを重量一定の周辺固定平板の最適設計に適用した。得られた主な結果は下記のとおりである。

(1) モード解析の方法を用いて比例粘性減衰系の振動エネルギーを求め、さらに設計変数に関する振動エネルギー感度を導出し、これが固有振動数の感度および固有モードの感度から計算できることを示した。

(2) 上述の最適設計法を中央に加振力を受ける周辺固定薄平板の曲げ振動問題に適用した結果、振動エネルギーの大幅な低減が実現できた。また、固有振動数の制御に基づく従来の最適設計法と比較して、本方法の効果を確かめた。

(3) 振動エネルギー感度の符号は共振周波数をは

さんで反転し、これを利用して最適化に伴う共振点の移動方向を制御できることが知られた。

数値計算には、本学大型計算機センタのライブラリプログラムを用いた。

文 献

- (1) 例えば, Atrek, E., Ed., *New Directions in Optimum Structural Design*, (1984), John Wiley and Sons, Mota Soares, C. A., Ed., *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems*, (1987), Springer-Verlag.
- (2) 戸部・ほか 5 名, 機構論, No. 840-15(1984), 70, No. 850-3(1985), 127.
- (3) 井上・加藤・大貫, 日本設計工学会東北支部講演論文集, No. 4(1988), 17.
- (4) 例えば, 大熊・南平・朴・長松, 機論, 54-504, C(1988), 1753.
- (5) 例えば, 山川・若林, 機論, 48-435, C(1983), 1738.
- (6) Huang, N. C., *Int. J. Solids Struct.*, 4(1968), 689.
- (7) 長松, モード解析, (1985), 培風館.
- (8) Rosen, J. B., *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 9-4(1961), 514.
- (9) Fox, R. L., *Optimization Methods for Engineering Design*, (1971), 51, Addison-Wesley.
- (10) Fox, R. L. and Kapoor, M. P., *AIAA J.* 6-12(1968), 2426.
- (11) Cowper, G. R., Lindberg, G. M. and Olson, M. D., *AIAA J.*, 7-10(1969), 1957.