ゴルフクラブの最適設計に関する研究*

岩登卓三^{*1}, 小西暢樹^{*2}, 山口哲男^{*3}

Research on Optimum Design of a Golf Club

Takuzo IWATSUBO, Nobuki KONISHI, and Tetsuo YAMAGUCHI

This paper deals with the optimum design of a golf club by tuning the shaft stiffness. First, an equation of motion is derived by the finite element method considering kinematic motion and vibration of the club. Then real swing data, that is, angular velocity and acceleration of a golf swing, are measured using a high-speed video camera and digital image processing. Applying these data to the above equation, the following results are obtained. It is found that in the process of optimizing, the design of the club head and shaft can be separated. Optimum flexibility is generally determined in proportion to the level of ability: optimum club shafts for beginners should be more flexible than those of more advanced players.

Key Words : Optimum Design, Digital Image Processing, Finite Element Method, Golf Club, Bending Flexibility, Golf Swing

1. 緒 言

機械構造物が高速運動する際には、その弾性により変形や振動が発生しており、最近では軽量化されたロボットアームに発生するたわみ振動など、問題⁽¹⁾となっている。しかしこれらの問題に関する研究^{(2)・(3)}は、振動の抑制が目的であり、それを有効に利用する研究はされていない。また、その対象となる分野もなかった。スポーツの分野では棒状の物体でボールを打撃することがしばしばあり、特にゴルフの場合には、シャフトの曲げ剛性の違いがボールの飛距離に影響することがわかっている。一方、ボールの飛距離に影響する他の要因として上げられるクラブヘッドやボールの物性値に関する最適化の研究は、山口ら^{(4)・(5)}によって行われ、クラブヘッドとボールの相互の固有振動数を

一致させれば良いことがわかっている。

そこで本研究はクラブシャフトに発生するたわみ振動に着目し、これを有効に利用してボールに最大初速度を与えるクラブシャフトの曲げ剛性最適値を、個人のスウィングに対して求めることを目的としている。解析ではゴルフクラブを弾性はりとし、その先端に一次元ばね・ダンパ・質点系でモデル化されたクラブヘッドが付いているとする。またゴルフボールも同様にモデル化する。そこで、スウィングを撮影した映像に画像処理解析を行って得られたスウィングデータを用いてクラブシャフトの曲げ剛性最適値を解析する。

これによって、個人のスウィングに対するクラブシャフトの曲げ剛性最適値を半自動的に解析するシステムを作成するとともに、ゴルフのレベルと曲げ剛性最適値との関係を考察する。

2. ゴルフクラブのモデル化

ゴルフスウィングは一平面内で行われるとし、ゴルフクラブを図1のようにモデル化する。ここで用いる座標系は、点Oを原点とする固定座標X-Yとシャフトの端点O'を原点とし角速度 $\dot{\theta}_2(t)$ で回転する回転

* 原稿受付 平成元年3月16日。

^{*1} 正員、神戸大学工学部 (〒657 神戸市灘区六甲台町)。^{*2} 神戸大学工学部。^{*3} 住友ゴム工業(株) (〒651 神戸市中央区箇井町)。

座標 $x'-y'$ である。ゴルフクラブは先端に質量 m を有する曲げ剛性 $E I(x)$ 、長さ l の弾性はりであると、点 O を中心に $X-Y$ 平面で回転する長さ $R(t)$ の剛体はり（長さが時間によって変動する腕に相当）に回転自由な端条件で取り付けられているとする。また腕の回転角を $\theta_1(t)$ 、手首の回転角を $\theta_2(t)$ で表す。

図1でモデル化されたゴルフクラブを図2(a),(b)に示すように有限個の要素に分割する。(a)はインパクトまでに対応するモデルで、クラブシャフトを断続的に太さの変化するはりに、ヘッドは一つの集中質量にモデル化する。(b)はヘッドがボールに衝突してから両者が分離するまでのモデルである。クラブシャフトに関しては(a)のモデルと同様であるとする。ヘッドとボールは一次元ばね・ダンパ・質点系にモデル化し、インパクトの瞬間から両者の接触点では互いの端面の質点どうしが接触し運動量が保存されるとする。両端面のばねが引張になった瞬間にヘッドとボールは分離すると考える。

3. 有限要素法による運動方程式

クラブシャフトのたわみは十分に小さく弾性変形であるとし、変形は曲げによるものだけを考えせん断による変形は無視するものとする。そしてここで行う解析はクラブシャフトのたわみ振動の一周期以内の現象を対象としており、減衰の影響は非常に小さいと考える。また、現象の基本的な部分を調べるという観点からも減衰の項を無視する。さらに R の時間微分に関する項も十分小さいと考え無視する。

図3に示す座標系で考えると、シャフトの端点から r の距離の点 B の位置ベクトルは

$$\begin{aligned} \vec{OB} &= \vec{OA} + \vec{AB} \\ &= R \vec{e}_{r1} + r \vec{e}_{\theta 2} \end{aligned} \quad (1)$$

図1 ゴルフクラブの弾性回転はりモデル

で表されるから、これを微分して加速度は

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{OB}} &= R \ddot{\theta}_1 \vec{e}_{\theta 1} - R \dot{\theta}_1^2 \vec{e}_{r1} + r \ddot{\theta}_2 \vec{e}_{\theta 2} \\ &\quad - r \dot{\theta}_2^2 \vec{e}_{r2} - 2 \cdot r \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \vec{e}_{r2} - r \dot{\theta}_1^2 \vec{e}_{r2} \\ &\quad + r \dot{\theta}_1 \vec{e}_{\theta 2} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ただし $\vec{e}_{r1}$, $\vec{e}_{\theta 1}$, $\vec{e}_{r2}$, $\vec{e}_{\theta 2}$ はそれぞれ R 方向の単位ベクトル, R 直角方向の単位ベクトル, r 方向の単位ベクトル, r 直角方向の単位ベクトルを表す。これから、図1に示したはりの微小部分について y' 方向の力のつりあいを考えると

$$\begin{aligned} \rho(x') dx' \left\{ \frac{\partial^2 w(x', t)}{\partial t^2} + \frac{d^2 \theta_1(t)}{dt^2} x' + \frac{d^2 \theta_2(t)}{dt^2} x' \right. \\ \left. - \frac{d^2 \theta_1(t)}{dt^2} R \cdot \cos \theta_1(t) - \left(\frac{d \theta_1(t)}{dt} \right)^2 R \cdot \sin \theta_1(t) \right\} \\ = \frac{\partial F(x', t)}{\partial x'} dx' + f(x', t) dx' \end{aligned} \quad (3)$$

ここで ρ はクラブシャフトの線密度, $w(x, t)$ はたわみ, F ははりの微小部分に働くせん断力, f ははりの微小部分に分布して働く単位長さあたりの外力である。クラブシャフトの線密度は一定とし、はりの微小部分に働く曲げモーメント M のつりあいと、たわみ w との関係式

(a) インパクト前のモデル

(b) インパクト後のモデル

図2 ゴルフクラブの要素分割

$$H(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (4)$$

を用いると式(3)はたわみ w に関する項と、強制変位 θ_1, θ_2 に関する項に分けることができ、次式(5)になる。この式の右辺、すなわち腕と手首の回転による慣性力を与えることによってクラブシャフトのたわみ振動を解くことができる。

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial^2 w(x', t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x', t)}{\partial x'^4} \\ &= -\rho \left\{ \frac{d^2 \theta_1(t)}{dt^2} x' + \frac{d^2 \theta_2(t)}{dt^2} x' - \frac{d^2 \theta_1(t)}{dt^2} R \cdot \cos \theta_2(t) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{d \theta_1(t)}{dt} \right)^2 R \cdot \sin \theta_2(t) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

次にマトリックスにより運動方程式を表示することを考える。クラブシャフトとヘッド・ボールの部分を分けて考えることにする。クラブシャフトに関しては一つの要素に対して要素剛性マトリックス、要素質量マトリックスを次式(6)によって求める⁽⁶⁾。

$$\begin{aligned} [K]e &= \int_e [B]^T [D] [B] dV \\ [M]e &= \int_e \rho [N]^T [N] dV \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $[B]$ はひずみと変位の関係を表すマトリックス、 $[D]$ は応力とひずみの関係を表すマトリックス、 $[N]$ は要素変位関数である。また $[]^T$ は行列の転置を表す。これを共有する節点ごとに加え合わせることでシャフト部分全体に関する剛性マトリックス、質量マトリックスを得る。次に、ヘッド・ボールに関しても同様に共有する節点ごとに加え合わせてヘッド・ボールに関する剛性マトリックス、質量マトリックスを得る。このようにして得られたそれぞれのマトリックスを組合せるとゴルフクラブ全体に関するそれぞれのマトリックスは次に示すようになる。ただし添字 s はクラブシャフトに関するマトリックス、添字 h はヘッド・ボールに関するマトリックスを表す。

図3 ゴルフクラブの座標系

$$[M]_{\text{all}} = \begin{bmatrix} [] & [] \\ [] & [] \end{bmatrix} \begin{matrix} s \\ h \end{matrix} \quad (7)$$

$$[K]_{\text{all}} = \begin{bmatrix} [] & [] \\ [] & [] \end{bmatrix} \begin{matrix} s \\ h \end{matrix} \quad (8)$$

これらのマトリックスを用いて、ゴルフクラブ全体の運動方程式は次のように表される。

$$[M]_{\text{all}} \{\delta\} + [K]_{\text{all}} \{\delta\} = \{F\} \quad (9)$$

右辺のベクトル $\{F\}$ は、強制変位（腕と手首の回転）と等価な外力に相当する慣性力ベクトルであり次章で詳しく説明する。またベクトル $\{\delta\}$ はクラブシャフトを座標系とする変位ベクトルである。

4. 荷重ベクトルの計算

前章で得られた運動方程式の右辺の荷重ベクトル $\{F\}$ は、腕と手首の回転によってゴルフクラブに働く慣性力であり、以下のようにして求める。一つの要素内に $f(x)$ なる分布力が作用するとき、次式によって節点に働く等価な荷重が得られる⁽⁶⁾。

$$\{F\}e = \int_e [N]^T \{f\} dV \quad (10)$$

ここで、 $\{f\}$ は要素に作用する分布力ベクトルである。式(2)より要素に作用する慣性力ベクトルは

$$\{f\} = \begin{bmatrix} (-R \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - R \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + r \ddot{\theta}_2 + r \dot{\theta}_2^2) \times \rho \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

であるから、これを式(10)に代入して要素内について積分すると次のようになる。

$$\{F\}e = L \begin{bmatrix} 7/20 \cdot f_1 + 3/20 \cdot f_2 \\ -1/20 \cdot f_1 L - 1/30 \cdot f_2 L \\ 3/20 \cdot f_1 L + 7/20 \cdot f_2 L \\ 1/30 \cdot f_1 L + 1/20 \cdot f_2 L \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで、 L は要素の長さ、 f_1, f_2 はそれぞれ

$$\begin{aligned} f_1 &= (-R \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - R \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + r_1 \ddot{\theta}_2 + r_1 \dot{\theta}_2^2) \times \rho \\ f_2 &= (-R \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - R \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + r_j \ddot{\theta}_2 + r_j \dot{\theta}_2^2) \times \rho \end{aligned} \quad (13)$$

である。これを共有する節点ごとに加え合わせると、全体の荷重ベクトルが求まる。

また、ゴルフクラブを振り回すとシャフトには軸垂直方向だけでなく軸方向の遠心力等も働いており、たわんだシャフトに曲げの力として働くことがわかって

いる。そこで遠心力による節点力を求める。まず手首側の節点 i 、ヘッド側の節点 j を有する一つのはり要素を取り上げ、それぞれの節点のたわみを w_i, w_j 、たわみ角を ϕ_i, ϕ_j とする。シャフトの端点から節点 i までの距離を r_i 、節点 i から節点 j に向かって局所座標 ξ をとると、節点 i, j に働く曲げモーメント M_i, M_j はそれぞれ

$$\begin{aligned} M_i &= \int_0^L \rho d\xi \cdot \ddot{u}(\xi) \cdot (w(\xi) - w_i) \\ M_j &= \int_0^L \rho d\xi \cdot \ddot{u}(\xi) \cdot (w(\xi) - w_j) \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここでたわみ関数 $w(\xi)$ は

$$w(\xi) = a_1 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_3 \xi + a_4 \quad (15)$$

ただし

$$\begin{aligned} a_1 &= (2w_i + L \cdot \phi_i - 2w_j + L \phi_j) / L^3 \\ a_2 &= (-3Lw_i - 2L^2 \phi_i + 3Lw_j - L^2 \phi_j) / L^3 \\ a_3 &= \phi_i \\ a_4 &= w_i \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる。また $\ddot{u}(\xi)$ は強制変位による加速度の内の軸方向成分であり、式(1)の $\vec{OB}$ を r_2 方向に微分して次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{u}(\xi) &= -R \cdot \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + R \cdot \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 - (r_i + \xi) \cdot \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad - (r_i + \xi) \cdot \ddot{\theta}_1 - 2 \cdot (r_i + \xi) \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (17)$$

式(15), (17)を用いると、式(14)は

$$\begin{aligned} M_i &= -\rho \left\{ -1/5 \cdot a_1 L^5 + 1/4 (a_1 L - a_2 c) L^4 \right. \\ &\quad \left. + 1/3 (a_2 L - a_3 c) L^3 + 1/2 (a_3 L - a_4 c) L^2 \right\} \\ M_j &= \rho \left\{ -1/5 \cdot a_1 L^5 + 1/4 (a_1 L - a_2 c) L^4 \right. \\ &\quad \left. + 1/3 (a_2 L - a_3 c) L^3 + 1/2 (a_3 L - a_4 c + w_j c) L^2 \right. \\ &\quad \left. + (a_4 - w_j) b L \right\} \\ b &= -R \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + R \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 - r_i \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad - r_i \ddot{\theta}_1 - 2 r_i \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ c &= \dot{\theta}_1^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (18)$$

となる。この節点力を要素ごとに全体の荷重ベクトルに加え合わせ、軸方向の力を考慮した荷重ベクトルを得る。

5. スウィングの数式化

ゴルフスウィングを撮影した映像から得られる各時刻ごとの θ_1, θ_2 の値を用いて次に示す時間 t の n 次関数として重回帰分析を行うことにより近似式を求める。

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \theta_{10} + K_{11} \cdot t + K_{12} \cdot t^2 + \dots + K_{1n} \cdot t^n \\ \theta_2(t) &= \theta_{20} + K_{21} \cdot t + K_{22} \cdot t^2 + \dots + K_{2n} \cdot t^n \end{aligned} \quad (19)$$

次に、この θ_1, θ_2 を時間 t で微分することにより腕と手首の角速度および角加速度を得る。これによって荷重ベクトルを求めることができる。また、腕の長さ R に関しても同様に近似式を求める。

重回帰分析において標本数が少ない時、説明変数の数が多過ぎると逆にデータの持っている誤差を追って曲線が引かれる可能性が出てくる。そこで自由度調整済み重相関係数⁽⁷⁾が最大になるように考慮して時間 t の近似の次数を $n = 5$ とする。腕の長さ $R(t)$ に関しては近似の次数を $n = 3$ とする。

6. 画像処理解析

プレーヤーは体が余分な光が反射しないようにし、シャフト上、手首、左肩に光を反射するマークを取り付ける。プレーヤーにスポットライトを当て、マークした点が確実に光を反射するようにして高速カメラでスウィングの撮影を行う。

次に移動計測によるスウィングデータ読み取りの手法について処理の手順⁽⁸⁾を示す。移動計測とは、移動する対象物を自動的に追跡して画面ごとにその対象物の重心座標を読み取り、それによって軌跡や移動速度などを求める手法である。

(1) 初期画面において、スウィング読み取りに必要な三点(左肩、手首、クラブヘッド上)にナンバーを付ける。これらの点は、二値化処理によって背景とは確実に判別できる程度の輝度が必要である。また、次のステップでの探索の範囲を指定する。

(2) 次のステップの映像を画面に読み込み、初期画面で定義した三点の座標の近傍で指定した範囲内で各ナンバーの点を探索する。

(3) 以後これを指定回数繰り返し、各点の座標値から、スウィング読み取りに必要な角度を計算する。

7. 最適値解析結果と考察

まず R を一定、手首の回転角 θ_2 を180度に固定し表1の諸元を用いて、腕の回転を等角加速度運動として与え、ボールの初速度を求める計算を行った。表1に示すクラブシャフト、クラブヘッド、ボールの物性値はすべて実物を計測して得られた平均的な値を用いた。特に剛性は、文献(4)の結果に従ってヘッドとボールの間のメカニカルインピーダンスを一致させてある。

図4に示すように、この時シャフトの曲げ剛性値を変化させても速度伝達率は一定であった。つまりヘッドがボールに衝突してヘッドの速度がボールに徐々に伝達されていく過程にシャフトの曲げ剛性の違いは関

係していない。ボールの初速度はインパクトの瞬間のヘッド速度によって決定され、この時の速度伝達率はボールとヘッドの物性値によって決定される。すなわちボール・ヘッドの物性値間の最適値とシャフトの曲げ剛性最適値は独立した事象であることがわかる。

表2に示した五人のスウィングの映像に画像処理を施し、スウィングデータを読み取った。それを重回帰分析しスウィングを数式化することにより、図5に示す近似曲線が得られた。図中のプロットした点が映像から読み取った角度の値で、実線が得られた近似曲線である。近似式の次数は5章で検討したように5次とした。これはM氏の場合であるが他の場合も同様に、相関係数が0.99以上の精度の良い近似ができています。

次にシャフトの軸直角方向に働く力による曲げだけ考えた場合(Case I)と軸方向の力の曲げ振動への影響を考えた場合(Case II)の結果を比較する。図6はM氏のスウィングデータを用いてシャフトの曲げ剛性最適値を解析した結果である。両結果の差はシャフトのヤング率が小さいほど大きくなっているが、これはシャフトがたわむほど軸方向の力による曲げ成分が大きくなるからである。両結果では最適値が異なるため、

表1 計算の諸元

Mass of club shaft	Ms (g)	120
Length of club shaft	l (mm)	1097
Number of partition	Ns	26
Mass of club head	Hc (g)	200
Spring constant of club head	Kc (N/m)	8.7×10^5
Number of partition	Nc	10
Mass of golf ball	Mb (g)	45
Spring constant of golf ball	Kb (N/m)	1.96×10^5
Number of partition	Nb	10

図4 シャフトのヤング率と速度伝達率の関係

今後軸方向の力による曲げを考慮する必要がある。

クラブシャフトの曲げ剛性最適値を、数式化された五人のスウィングを用いて計算した。計算結果を図7に示す。いずれの場合も上に凸型の滑らかな曲線になっており、極大値は一つだけ存在している。すなわち、五人のスウィングに対する曲げ剛性最適値はそれぞれ正確に求まっている。最適値からヤング率が小さい側

表2 プレーヤーのゴルフレベル

Player	Golf level
Mr. M	High
Ms. A	Middle~High
Mr. K	Middle
Mr. D	Low
Mr. Y	Low

図5 腕と手首の回転角の変化と近似曲線

図6 M氏のスウィングに対する解析結果

Case I : 軸直角方向の力による曲げだけ考えた場合
Case II : 軸方向の力の曲げ振動への影響を考えた場合

に柔かいシャフトが適している。図7にM氏のスウィングに最適な曲げ剛性のシャフトを用いたときのシミュレーションを示す。インパクトの瞬間にシャフトのたわみは完全には復元していない。ゴルフに関する文献等でインパクトの瞬間にシャフトが反対側へたわんでいる写真がよく見られるが、これはすなわちシャフトが硬すぎることを意味しており、もっと柔かいシャフトが適していることがこのことからわかる。

本研究では、ゴルフクラブのシャフトの曲げ剛性の違いがボールの飛距離に影響することに着目し、ボールに最大初速度を与えるクラブシャフトの最適曲げ剛性を解析した結果、以下のことが明らかになった。

プレーヤーの体にマークを付けてスウィングを撮影すると、画像処理解析で半自動的にスウィングデータを読み取ることができ、それによって個人のスウィングに対するシャフトの曲げ剛性最適値を解析できる。五人のプレーヤーに対する結果から、ゴルフのレベルが高い人ほど剛性の高いクラブシャフトが適していることがわかった。現在販売中のゴルフクラブの曲げ剛性値と解析結果を比較すると、上級者に最適な曲げ剛性のゴルフクラブは、現在販売されている物の中に存在するが、初級者にはさらに柔かい曲げ剛性のゴルフクラブの方が適していると結論された。

- (1) W.J. Bookほか Feedback Control of Two Beams, Two Joints Systems with Distributed Flexibility, 424/431, 1975
- (2) 古田, 下郷, 村野 第63期通常総会講演会講演 1986
- (3) 坂和, 松野 フレキシブルアームのモデリングと制御計測と制御 25-1 1986 P64
- (4) T. Iwatsubo, et al, Transfer Characteristics in Collision of Two Visco-elastomers under Mechanical Impedance Theoretical and Appl. Mech, Vol. 34, P153, 1985
- (5) 赤尾, 岩登, 山口ほか 弾性棒間の衝撃伝達特性, 日本機械学会論文集, 第495号, P2289, 1987
- (6) 谷口修 振動工学ハンドブック 1981 P239 養賢堂
- (7) 柳井, 高木 多変量解析ハンドブック 1986 P23 現代数学社
- (8) 森本吉春 画像処理 1984 培風館

討 論

〔質問〕 長 松 昭 男〔東京工業大学工学部〕

インパクト瞬間のヘッド速度だけを最適状態の基準にされているが、その時の加速度も考慮すべきではないか。例えば、最適状態より少し硬い方にずれたシャフトが安全であると説明されているが、加速度を考慮すると必ずしもそうとは言えないような気がする。

すなわち、硬すぎると、インパクト瞬間にシャフトは反対側にたわみ、ヘッドがシャフトに対して相対的に負の加速度を持ち、減速しつつあるので、ボールに伝わるエネルギーが小さくなる。反対に、少し柔らかい方にずれたシャフトは、インパクト瞬間に順方向にた

わみ、正の加速度を持ち、接触中にボールを強く押し、大きいエネルギーを伝える。つまり、ボールに最大初速度を与えるのは、インパクト瞬間や以前ではなくインパクトのわずかに後にヘッド速度が最大になるように（実際にはインパストにより急減速するが）、インパクト瞬間には正の加速度を持つときであると思われるが、いかがか。

〔回答〕 ご指摘の件はまだ確認していないが、正しいように思われる。講演当日までに間に合えば口答させていただきたい。もし間に合わない場合には本論文が出版されるまでに何とかいたしたいと思う。