Liénard 形非線形システムの安定性に関する一考察*

宮 城 雅 夫*¹, 宮 城 隼 夫*²

A Study on the Stability of Liénard-type Nonlinear Systems

Norio MIYAGI and Hayao MIYAGI

This paper investigates the stability of a Liénard-type nonlinear system, utilizing the direct method of Lyapunov. The Liénard-type nonlinear system is given in a form of n second-order ordinary differential equations, which is a generalization of Liénard's equation. Noticing that the stability depends on the system structure, some stability criteria are presented. Various Lyapunov functions are introduced in proving the theorems. Stability boundaries of the system are calculated by using such Lyapunov functions. To illustrate the proposed method, the results obtained are applied to an example system.

Key Words: Liénard-type Nonlinear System, System Structure, Stability, Lyapunov Method

1. 緒 言

n 個の 2 階の常微分方程式で記述される Liénard 形非線形システム⁽¹⁾は, バネや回転機の機械システムをはじめ LRC 回路で表現される電気システムの一般形として知られ, 工学上重要なシステムの一つである。安定性解析の手段としてはリアプノフ法がよく用いられるが, その際, 運動エネルギーや位置エネルギーの総和をリアプノフ関数として採用することが多い。リアプノフ法はシステムの原点の安定判別のみならず, システムの漸近安定領域まで決定できる点で有効とされている。しかしながら, リアプノフ法によって与えられる安定条件は十分条件であり, 保証される漸近安定領域も多かれ少なかれ控えめであることが知られている。したがって, 工学的にはより広い漸近安定領域を与える優れたリアプノフ関数を見出すことが重要である。この点をふまえ, 著者らは文献(1)においてエネルギーにとらわれない一つの一般化リアプノフ関数⁽²⁾⁽³⁾の構成法について提案した。

本論では, Liénard 形非線形システムの原点の安定

性がシステムの構造に依存することに着目し, 安定のための構造条件をリアプノフ法を基盤にして導く。リアプノフ関数は安定定理の証明に用いられるが, システムの漸近安定領域はこのリアプノフ関数から決定することができる。ここではいくつかの構造条件を安定定理の形で与え, 定理に付随する種々のリアプノフ関数の優劣を例題システムへの適用から示している。

2. Liénard 形非線形システム

本論で対象とする Liénard 形非線形システムは次式で表される。

$$\ddot{x} + G(x)\dot{x} + h(x) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし, x は n 次元ベクトルであり,

$$h(x) = Bf(\sigma)$$

$$f^T(\sigma) = [f_1(\sigma_1), f_2(\sigma_2), \dots, f_m(\sigma_m)]$$

$$\sigma = B^T x$$

$G(x) (>0)$ はある行列 D, B を用いて,

$$G(x) = D \begin{bmatrix} g_1(\sigma_1) & & 0 \\ & g_2(\sigma_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & g_m(\sigma_m) \end{bmatrix} B^T \\ = D \{\text{diag} [g_i(\sigma_i)]\} B^T$$

* 平成元年 11 月 21 日 九州支部・中国四国支部合同長崎地方講演会において講演, 原稿受付 平成元年 4 月 5 日。

*¹ 正員, 第一工業大学 (〒899 国分市中央 1-10-2)。

*² 琉球大学工学部 (〒903 沖縄県中頭郡西原町字千原 1)。

と書けるものとする。ここで D, B の関係が一つのシステムの構造を与える。

また、非線形関数 $g_i(\sigma_i), f_i(\sigma_i)$ は連続で微分可能な関数であり、次の性質を満足するものとする⁽⁴⁾。

- (i) $\sigma_i \neq 0$ に対し, $g_i(\sigma_i) > 0$
- (ii) $\sigma_i \neq 0$ に対し, $\sigma_i f_i(\sigma_i) > 0$
- (iii) $|\sigma_i| \rightarrow \infty$ のとき $|\phi_i(\sigma_i)| \rightarrow \infty$

ただし,

$$\phi_i(\sigma_i) = \int_0^{\sigma_i} g_i(\sigma_i) d\sigma_i$$

3. システムの安定性

式(1)のシステムの安定性は行列 B, D の関係に依存し、次の安定定理が得られる。ただし、ここで言う安定とはリアプノフの意味の安定のことである。

[安定定理1]

式(1)で与えられるシステムは、もし、 $D=B$ が満たされるなら安定である。

(証明)

上記の定理は、次のリアプノフ関数（エネルギー関数）の存在によって証明される。

$$V(x) = \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{x} + \int_0^\sigma f^T(\sigma) d\sigma \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(2)の V の時間導関数を求めると

$$\dot{V}(x) = -\dot{x}^T \{D \operatorname{diag} [g_i(\sigma_i)] B^T\} \dot{x} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となるので、 $D=B$ ならば、式(3)は

$$\dot{V}(x) = -\dot{\sigma}^T \operatorname{diag} [g_i(\sigma_i)] \dot{\sigma} \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。よって $\dot{V}(x)$ は半負定値となる。したがって $V(x)$ はリアプノフ関数となり、リアプノフの定理に従ってシステムは安定である。なお、式(2)の右辺の積分値は $f_i(\sigma_i)$ についての条件(ii)により正定値であることが保証される。

[安定定理2]

式(1)のシステムは、もし $D^T B = \operatorname{diag} [\alpha_i]$ (α_i : 正の定数) が満たされるなら安定である。

(証明)

上記の定理は、次式のリアプノフ関数の存在によって証明される。

$$V(x) = \frac{1}{2} \{\dot{x} + D \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i)] \mathbf{1}\}^T \{\dot{x} + D \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i)] \mathbf{1}\} + \int_0^\sigma f^T(\sigma) d\sigma \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $\mathbf{1}$ はすべての要素を1とする列ベクトルである。

式(5)の時間導関数を求めると、

$$\dot{V}(x) = -\mathbf{1}^T \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i)] D^T B f(\sigma) \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり、もし $D^T B = \operatorname{diag} [\alpha_i]$ ならば、

$$\dot{V}(x) = -\mathbf{1}^T \operatorname{diag} [\alpha_i \phi_i(\sigma_i)] f(\sigma) = -\sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i(\sigma_i) f_i(\sigma_i) \leq 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。したがって、式(5)の $V(x)$ はリアプノフ関数となり、システムは安定である。

[安定定理3]

式(1)のシステムは、もし $D=B$ かつ $D^T B = \operatorname{diag} [\alpha_i]$ を満足するなら安定である。

(証明1)

この定理は、次のリアプノフ関数の存在によって証明される。

$$V(x) = \frac{1}{2} \{\dot{x} + n D \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i)] \mathbf{1}\}^T \{\dot{x} + n D \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i)] \mathbf{1}\} + \frac{1}{2} n(1-n) \mathbf{1}^T \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i)] D^T D \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i)] \mathbf{1} + \int_0^\sigma f^T(\sigma) d\sigma \quad (0 \leq n \leq 1) \quad \dots\dots\dots (8)$$

V の時間導関数は

$$\dot{V}(x) = -(1-n) \dot{x}^T D \operatorname{diag} [g_i(\sigma_i)] B^T \dot{x} - n \mathbf{1}^T \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i)] D^T B f(\sigma) \quad \dots\dots\dots (9)$$

となり、もし $D=B$ かつ $D^T B = \operatorname{diag} [\alpha_i]$ が満足されるなら次式となる。

$$\dot{V}(x) = -(1-n) \dot{\sigma}^T \operatorname{diag} [g_i(\sigma_i)] \dot{\sigma} - n \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i(\sigma_i) f_i(\sigma_i) \leq 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(8)の V は正定値であり、式(10)の $\dot{V}$ は半負定値となるので、リアプノフの定理に従いシステムは安定である。

定理3は定理1と定理2の結合であるが、定理3の条件を満足するシステムに対しては式(8)のリアプノフ関数は式(2), (5)を含む一般的なリアプノフ関数となっている。 $n=0$ のとき式(2), $n=1$ のとき式(5)に対応する。

(証明2)

定理3は、また、次の別のリアプノフ関数の存在によっても証明される。

$$\begin{aligned} V(x) = & \frac{1}{2} \{ \dot{x} + nD \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i) \mathbf{1}]^T \{ \dot{x} + nD \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i) \mathbf{1}] \\ & + \frac{1}{2} n(1-n) \mathbf{1}^T \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i)] D^T D \operatorname{diag} [\phi_i(\sigma_i)] \mathbf{1} + \int_0^\sigma f^T(\sigma) d\sigma \\ & + 2\sqrt{n(1-n)} \sum_{i=1}^m \left[\int_0^{\sigma_i} \sqrt{\alpha_i g_i(\sigma_i) \phi_i(\sigma_i) f_i(\sigma_i)} d\sigma_i \right] \quad (0 \leq n \leq 1) \end{aligned} \quad (11)$$

上式の V の時間導関数を求めると

$$\dot{V}(x) = - \sum_{i=1}^m \{ [\sqrt{(1-n)} g_i(\sigma_i) \dot{\sigma}_i - \sqrt{n \alpha_i \phi_i(\sigma_i) f_i(\sigma_i)}]^2 \} \leq 0 \quad (12)$$

式(11)の V が正定値であることを証明するため、文献(5)の手法に従い、この式の右辺の第1項を除いた三つの項の和を V_1 として、 V_1 は次式のように書き表す。

$$V_1 = \sum_{i=1}^m \left[\int_0^{\sigma_i} H(\sigma_i) d\sigma_i \right] \quad (13)$$

ここで、

$$H(\sigma_i) = n(1-n) \alpha_i g_i(\sigma_i) \phi_i(\sigma_i) + f_i(\sigma_i) + 2\sqrt{n(1-n)} \alpha_i \sqrt{g_i(\sigma_i) \phi_i(\sigma_i) f_i(\sigma_i)} \quad (14)$$

上記の $H(\sigma_i)$ は

$\sigma_i > 0$ に対して

$$H(\sigma_i) = [\sqrt{n(1-n)} \alpha_i g_i(\sigma_i) \sqrt{\phi_i(\sigma_i)} + \sqrt{f_i(\sigma_i)}]^2 \quad (15)$$

$\sigma_i < 0$ に対して

$$H(\sigma_i) = -[\sqrt{n(1-n)} \alpha_i g_i(\sigma_i) \sqrt{-\phi_i(\sigma_i)} - \sqrt{-f_i(\sigma_i)}]^2 \quad (16)$$

と変形でき、 $\sigma_i H(\sigma_i) \geq 0$ が保証されるので

$$\int_0^{\sigma_i} H(\sigma_i) d\sigma_i > 0$$

となり、式(13)の V_1 は正定値となる。したがって式(11)の V は正定値であることが保証され、式(12)の $\dot{V}$ は半負定値となるので、リアプノフの定理に従いシステムは安定である。

なお、定理1~3では、単に安定性について述べたが、もしシステムの任意の解軌道上で式(4)、(7)、(10)の $\dot{V}$ が恒等的に零にならないなら、これらの定理は漸近安定定理に置き換えることができる。また、 $g_i(\sigma_i)$ や $f_i(\sigma_i)$ が条件(i)、(ii)、(iii)を満足するならシステムの安定性は大域的であるが、多くの工学の問題では、 $g_i(\sigma_i)$ や $f_i(\sigma_i)$ の非線形性のため必ずしも、(i)、(ii)、(iii)の条件を満足するとは限らない。このとき、得られるリアプノフ関数は安定領域の決定に使用することができる。

4. 漸近安定領域の決定

前章で与えた安定定理は、原点の近傍の局所的な安定性について述べたもので、どれほどの大きさの初期状態に対して漸近安定性が保証されるかという安定の範囲については、ふれなかった。本章では漸近安定性が保証される初期条件の範囲、すなわちシステムの漸近安定領域の決定法について述べる。

ここでは、ラグランジュの乗数法⁽⁶⁾を用いて、 $\dot{V}(x)$

$=0$ の点で $V(x)$ を最小化することにより、 V のしきい値 V_c を求める。

ラグランジュ関数 L は次式のように与えられる。

$$L = V(x) + \lambda^T g(x) \quad (17)$$

ここで、 $g(x)$ は $\dot{V}(x)=0$ を与える条件式である。

$V(x)$ の極小点 x では

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \lambda = 0 \quad (18)$$

$$g(x) = 0$$

が成立しなければならない。式(18)の連立方程式を x と λ について解き、まず、 V の最小値を与える x の値 x_c を求める。この x_c の値を V の値へ代入すれば漸近安定領域内の V のしきい値 V_c が求まる。

この V_c についての位相面を描けば漸近安定領域を図示することができる。

5. 例題システムの適用

ここでは、 x が二次元ベクトルである Liénard 形非線形システムを取り上げ、システムの安定性について調べる。

本例題で取り上げる Liénard 形非線形システムは、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 + [g_1(\sigma_1) + g_2(\sigma_2)] x_1 + [g_1(\sigma_1) - g_2(\sigma_2)] x_2 \\ + f_1(\sigma_1) - f_2(\sigma_2) = 0 \\ \dot{x}_2 + [g_1(\sigma_1) - g_2(\sigma_2)] x_1 + [g_1(\sigma_1) + g_2(\sigma_2)] x_2 \\ + f_1(\sigma_1) + f_2(\sigma_2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ただし, $\sigma_1 = x_1 + x_2$, $\sigma_2 = x_2 - x_1$ で与えられる.

式(19)を式(1)の形式に書き改めると

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(\sigma_1) & 0 \\ 0 & g_2(\sigma_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\sigma_1) \\ f_2(\sigma_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

となるので, これより次の関係が成立することがわかる.

$$B = D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^T B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

すなわち, 定理1, 定理2, 定理3の条件が満たされる. したがって, 式(19)のシステムは安定であり, リアプノフ関数としては式(2), (5), (8), (11)のいずれかが考えられる. ここでは式(8)と式(11)の関数が一般的であることに着目し, その二つのリアプノフ関数について考える. 一方, 例題システム式(19)に対し

ては式(4), (7), (10), (12)の $\dot{V}$ は $\sigma_1 f_1(\sigma_1) > 0$, $\sigma_2 f_2(\sigma_2) > 0$ の領域内では, 原点を除くシステムの任意の解軌道上で恒等的に零になることはない. したがって, ここではシステムの漸近安定性について論じることができる.

式(8)から導かれるリアプノフ関数は次式のようになる.

$$\begin{aligned} V(x) = & \frac{1}{2} \{ [\dot{x}_1 + n(\phi_1(\sigma_1) - \phi_2(\sigma_2))]^2 \\ & + [\dot{x}_2 + n(\phi_1(\sigma_1) + \phi_2(\sigma_2))]^2 \} \\ & + n(1-n)[\phi_1^2(\sigma_1) + \phi_2^2(\sigma_2)] \\ & + \int_0^{\sigma_1} f_1(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_0^{\sigma_2} f_2(\sigma_2) d\sigma_2 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

式(22)において, $n=0, n=1$ とおけば, それぞれ式(2), 式(5)から導かれるリアプノフ関数となる. 式(22)において具体的に $\phi_i(\sigma_i) = \sigma_i^3/3$ [すなわち $g_i(\sigma_i) = \sigma_i^2$], $f_i(\sigma_i) = \sin(\sigma_i + \pi/3) - \sin(\pi/3)$ の場合について

(a) $\sigma_2=0, \dot{x}_2=0$

(b) $\dot{x}_1=0, \dot{x}_2=0$

図1 漸近安定領域の断面図

(a) $\sigma_2=0, \dot{x}_2=0$

(b) $\dot{x}_1=0, \dot{x}_2=0$

図2 漸近安定領域の断面図

てシステムの漸近安定領域の断面図を描いたものが図 1(a), (b)である. 図 1(a)は σ_1 対 $\dot{x}_1$, 図 1(b)は σ_1 対 σ_2 の断面図を示している.

これらの図から, n が 0 から 1 に変化するに従って漸近安定領域が大きくなっていくことがわかる.

式(19)のシステムに対して, 式(11)から導かれるリアプノフ関数を求めると

$$\begin{aligned} V(x) = & \frac{1}{2} \{ [\dot{x}_1 + n(\phi_1(\sigma_1) - \phi_2(\sigma_2))]^2 \\ & + [\dot{x}_2 + n(\phi_1(\sigma_1) + \phi_2(\sigma_2))]^2 \} + n(1-n) \\ & \times [\phi_1^2(\sigma_1) + \phi_2^2(\sigma_2)] \\ & + \int_0^{\sigma_1} f_1(\sigma_1) d\sigma_1 + \int_0^{\sigma_2} f_2(\sigma_2) d\sigma_2 \\ & + 2\sqrt{2n(1-n)} \left[\int_0^{\sigma_1} \sqrt{R(\sigma_1)} d\sigma_1 \right. \\ & \left. + \int_0^{\sigma_2} \sqrt{R(\sigma_2)} d\sigma_2 \right] \\ (0 \leq n \leq 1) \quad & \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ただし, $R(\sigma_i) = g_i(\sigma_i)\phi_i(\sigma_i)f_i(\sigma_i)$ となる.

式(23)において, $\phi_i(\sigma_i)$ と $f_i(\sigma_i)$ を $\phi_i(\sigma_i) = (2\sigma_i - \sigma_i^3/3)/3$, $f_i(\sigma_i) = \sin(\sigma_i + \pi/3) - \sin(\pi/3)$ としたときの漸近安定領域を図 2(a), (b)に示す.

これらの図と図 1(a), (b)を比べると, $n=0.5$ のときの漸近安定領域を見ればわかるように式(23)のリアプノフ関数が式(22)のリアプノフ関数より, より広い漸近安定領域を与える. したがって, リアプノフ関

数をシステムの漸近安定領域の評価に用いる場合には, 式(11)で与えられる関数を用いるほうが望ましいと言える.

6. 結 言

n 個の 2 階の常微分方程式で記述される Liénard 形非線形システムは, バネや回転機の機械システムをはじめ LRC 回路で表現される電気システムの一般形として知られ, 工学上適用範囲の広い重要なシステムの一つである. 本論では, Liénard 形非線形システムの原点の安定性がシステムの構造に依存することに着目し, 安定のための構造条件をリアプノフの直接法を基盤にして導いた. リアプノフ関数は安定定理の証明に用いられるが, 一つのシステムに対し種々のリアプノフ関数が考えられるので, より広い漸近安定領域を保証するリアプノフ関数の存在についても検討した.

文 献

- (1) 宮城(隼)・宮城(雅)・大城, 計自論, **24**-4 (1988), 344.
- (2) Miyagi, N. and Miyagi, H., *ASME DS*, **109**-4 (1987), 410.
- (3) 宮城(隼)・宮城(雅), 計自論, **23**-3 (1987), 247.
- (4) ラサール, J., レフシェッツ, S. (山本訳), リアプノフ法による安定性理論, (1975), 60, 産業図書.
- (5) Miyagi, H. and Yamashita, K., *Int. J. Control*, **48**-2 (1988), 805.
- (6) Willems, J. L., *Int. J. Control*, **10**-5 (1969), 537.