拡張四分木法を用いた要素分割手法*

中 島 憲 宏^{*1}An Intelligent Mesh Generation Technique for Two-Dimensional Objects
Based on the Extended Quadtree Representation Method

Norihiro NAKAJIMA

A mesh generation technique which generates a two-dimensional computational mechanics model is suggested for mechanical design work. The technique is based upon the extended quadtree representation method for a geometric model, and utilizes design model attributes, known as features, to generate a well-graded mesh. The design model is described by three kinds of data, geometric data, structural data, and product data. The product data are defined by the feature data, which are categorized into four types: environmental data, material data, functional data, and figure data. Each feature datum has a degree of importance to the design model. Also the feature describes the meaning of geometry, the intention of analysis, and so on. In the mesh generation procedure, the quadrant detects the degree of importance and the mesh density is controlled by handling the depth of the quadtree, in order to generate a well-graded mesh for either FEM, BEM, or FDM. The technique is also useful for an h-version of the remeshing process.

Key Words: Design Engineering, Structural Analysis, Computational Mechanics, CAD, CAE, FEM, BEM, FDM, Mesh, Quadtree

1. 緒 言

計算力学における要素分割技術の研究開発の歴史は古く、計算機を用いたものでは1958年に発表されたものが最古とされている⁽¹⁾。その後、数多くの要素分割の自動化手法が提案されてきた。また、各種手法の調査報告もいくつか報告され、分類もいろいろなされている^{(1)~(4)}。しかしながら、要素分割手法は数多く開発されてきているにもかかわらず、各々一長一短があると指摘されているのが現状である⁽³⁾。その理由として、現状の要素分割の仕方は定性的にも定量的にも明確な定義がないことから、経験や知識に頼った要素分割が最適なものとされていることがあげられる。

著者が提案している計算力学手法を用いた設計計算を支援する方式は、図1に示すような設計業務のなかで計算力学手法を用いた数値解析シミュレータを容易に利用可能とするものである⁽⁵⁾⁽⁶⁾。本方式が対象とするモデルは設計計算モデルと呼ぶもので、図2に示すように幾何モデルに属性データを付したものである⁽⁷⁾。本論では、この属性データを製品情報と呼ぶ。

そして製品情報とは、CAEのために必要な設計情報の部分集合情報と定義する。さらに、設計計算モデルとは設計対象の部分集合モデルであり、設計作業のうち解析作業を自動化していく上で必要不可欠なものとなる。本方式では、この設計計算モデルから解析モデルに自動変換する試みを行っている。そのために必要な技術課題は、(1)自動的に要素分割を行う技術確立すること、(2)解析情報を自動的に付加する技術を構築すること、の二つである。このうち特に重要な役割を果たすのが要素自動分割機能である。以下、本論では要素自動分割機能のうち、二次元形状を対象にした手法について述べる。そして、これを拡張四分木法

図1 設計計算モデルを用いた設計計算の支援方式

* 原稿受付 平成元年11月15日。

^{*1} 正員、(株)日立製作所日立研究所(〒319-12 日立市久慈町4026番地)。

による二次元要素自動分割手法と呼ぶ。

2. 拡張四分木法による 二次元要素自動分割

著者が提案している設計計算支援方式における二次元の解析対象とは、主に設計対象モデルのある断面(三次元形状のある断面形状)である。本要素分割手法は、形状の四分木表現法⁽⁸⁾と知識处理的な考え方を利用したものである。これまでに四分木や八分木表現法を要素分割に活用した手法はいくつか発表されているが^{(9)~(11)}、それらは幾何モデルあるいは図形のデータのみを対象とした網目法⁽²⁾による要素分割手法の一種である。本手法は、四分木構造を持つ正方格子により形状を表現する方法を基本として、設計計算モデルが持つ製品情報を木構造をした形状データと有機的に連携させることで、粗密付けを含む要素分割を自動的に行うものである。その特長としては、

(a) 正方格子を基本図形としているために、

(1) 有限要素法、境界要素法、差分法に共通な要素分割が実現できる。

(ii) 四辺形という位相情報が保持できるため、四辺形要素を容易に生成できる

(iii) 要素寸法を調整しやすく、要素分割をある程度規則的にできる

(iv) 節点数や要素数の制御ができる

(b) 形状の表現精度の制御が可能であることを利用して、

(i) 要素分割の粗密を付けることができる

(ii) 形状の省略による抽象化を行うことができる

(c) 木構造のデータ構造を持つことから、これを抽象階層構造⁽¹²⁾に見立てて

図2 設計計算モデルの記述

- (i) 要素分割の粗密付けを動的に行うことができる
- (ii) 処理や操作の履歴を保存や再生することができる
- (iii) 解析情報データ継承が上位のクラス(木)と下位のクラスで行うことができる
などがあげられる。

3. 要素分割アルゴリズム

本処理は、一般に複数の穴を持つ有界連結な閉じた平面分の要素自動分割を四辺形要素を基本要素として行う。ただし、四分木格子の隣接クラスが異なる時と形状の境界周辺部では、三辺形要素による結合を許す。この要素自動分割処理の基本的な処理の流れを図3に示す。以下、図3のステップ1からステップ6までの処理を詳細に述べる。ただし、ステップ2については、本論ではステップ2-aの全自動処理の場合についてのみ述べる。

ステップ1：基本座標系の設定処理

本アルゴリズムで扱う二次元平面空間は、図4(a)で示すような U, V, W で定義する。この時、 U, V が平面を表し、 W がその法線方向を表す。つまり、三次元座標系で定義されている設計計算モデルの図形情報

図3 要素自動分割処理の基本的な処理の流れ図

図4 座標変換処理

報から平面の法線ベクトルを抽出し、これを W 軸とする直交座標系 (U, V, W) を生成し、図形情報を二次元 (U, V) 座標系に座標変換する。次に、この二次元 (U, V) 座標系において、座標値 (U, V) の最大値 ($U_{\max}, V_{\max}$) と最小値 ($U_{\min}, V_{\min}$) を求める。そして、これらの最大値と最小値から得られる距離を一辺の長さ (D) とする、形状を包含するような正方形を定義し、最小値が二次元 (U, V) 座標系の原点となるように座標系の平行移動を図 4 (b) に示すように行う。そして、この正方形の一辺の長さを $256 (=4^8)$ とするパラメトリックな二次元平面空間を作成し、これを以後の分割処理の基本座標系として用いる。本処理により、形状全体の大きさと広がり方を把握する。また局所的な形状の特徴や広がり方は、このパラメトリックな二次元平面空間を再帰的に分割して、その局所座標系を作成することで把握していく。つまり、ここで最初に定義した正方形を四分木構造のクラス 0 とし、その正方形を四つの正方形に分割したものをクラス 1 とする。以下同様にクラス数が大きくなるに従い、四分木構造の階層が図 5 に示すように再帰的に深くなる、と同時に正方形も小さくなる。その最大深さは、本論では 8 としている。そして、クラス 8 の 1 個の大きさは、長さ 1×1 になる。本論では、これら各クラスごとに現れる最小単位を四分木格子要素 (以下、格子要素と略す) と呼び、これらの分割状態は $256 \times 256 (=4^8)$ の配列で記憶することとする。

ステップ 2-a: 全自動要素分割処理

(1) 一様な要素分割状態の設定処理

本処理は、利用者が要求する要素または節点数で要素分割を実現するために必要な前処理である。まず初

めに、適切な四分木構造のクラスを与えることで一様な四分木格子を生成し、要素分割の初期状態を設定する。四分木構造のクラスは、次の式

$$G=4^n (n=0, 1, 2, \dots, 8) \dots\dots\dots (1)$$

G : クラス n における格子要素の総数

n : 四分木構造のクラス (深さ)

のように表されるので、ここでは最適なクラス n を見つけることが本処理の目的となる。以下、要素数の場合を例にとり本処理について述べる。

利用者が要求する要素数 (以下、要求要素数と呼ぶ) に最も近い G の最大および最小値を生成しうる n を求める。例えば、要求要素数が 1000 個の場合、 n は $4(4^4=256)$ および $5(4^5=1024)$ となる。次に、ステップ 1 で求めた形状の最大および最小値範囲のなかで、形状と交差する格子要素の総数 (N) をクラス数が小さい四分木格子の場合から (この場合は、 $G=4^4$ を持つ一様な四分木格子のほうから) 順に求める。ここで言う形状と交差する格子要素とは、格子要素が形状と交差するものから格子要素内に形状が存在するものまでをさす。この場合ならば、クラス数が $n=4$ の場合の形状に含まれる格子要素の総数 (N) を求めてから、 $n=5$ の場合の N を算出する。そして、予想要素数 (E_{est}) を式 (2) からそれぞれの場合について求める。式 (2) において C は、係数であり本論では 5.5 である。この予想要素数が、要求要素数よりも少なくても最も近い値をとるような n を最適なクラスとして定める。

$$E_{\text{est}} = C \times N \dots\dots\dots (2)$$

以上のようにして、 n を求め一様な要素分割状態を設定する。本処理で式 (2) の係数 C を 5.5 に設定している理由は、次のステップ 3 で述べる粗密付け処理において用いているパラメータから算出したからである。ステップ 3 の処理によれば、平均的に考えると全体の格子要素の半分は、クラスが 1 または 2 大きくなって分割されることになるからである。式 (2) の係数 C は、 $\{(25\% \times N \times 4^2) + (25\% \times N \times 4^1) + (50\% \times N \times 4^0)\} = (5.5) \times N$ のようにして求めた。また、形状に含まれる格子要素の抽出は、形状と格子要素の構成点との包含関係を調べることにより行う。現実的な処理のなかでは、この包含関係の情報をもとに要素を生成するためにその情報を保存する必要がある。具体的には、格子要素の構成点 (四分木格子点のこと、以下、格子点と呼ぶ) に包含関係フラグを設定する処理を行う。そして、この処理ステップを包含関係フラグ設定処理と呼ぶ。格子点の包含関係を調べる方法は、図 6 に示すように格子点から最短距離の向きづけられた外形線 (v) と外形線の始点から格子点に向きを持つベクトル (u)

図 5 四分木構造とクラス

から判定する。ここで、形状の外形線は、図形処理の精度内で多角形表現されたものとする。また、外形線の始点と格子点を結ぶベクトルは他の外形線を横切らないものである。そして、形状に含まれる点を IN, 含まれない点を OUT という包含関係フラグとその座標値を各格子点に与える。また、形状上にある点のフラグは ON とする。

(2) 粗密付け処理

粗密付け処理は、一様な分割状態を局所的に粗くしていく方法と密にしていく方法の 2 通りが考えられる。本論では後者の方法、すなわち要素分割を細くしたいところの四分木構造のクラスを深くする方法について述べる。クラスを深くするための判断基準は、式(3)に示すような粗密付け関数によって行う。式(3)のような形で粗密付けを判断するのは、実践上の効率を考慮したからである。

$$F_i = \frac{\sum a_i * a_i + \sum b_i * b_i + \sum c_i * c_i}{\sum a_i + \sum b_i + \sum c_i} \dots\dots\dots (3)$$

F : 粗密付け重要度, i : 格子要素番号

a_i : 図形情報の粗密分割重要度

b_i : 構造関係情報の粗密分割重要度

c_i : 製品情報の粗密分割重要度

式(3)において、図形情報は、図 2 の設計計算モ

デルの記述で示した④の形状情報(Figure)と設計計算モデルの幾何と位相情報(幾何モデル部分の情報)に関するものである。構造関係情報は、図 2 の②の材料情報(Material)と③の機能情報(Function)と設計計算モデルの構造表現(部品や立体、面など)情報から、また製品情報は、①の環境情報(Environment)～④の形状情報までの四つの情報から求めるものである。特に製品情報は、図形や構造単位の機能や役割、意味、そして設計者の意図などを表すデータで、粗密付け処理において重要な役割を果たすことになる。これらの重要度とは、利用者や設計部署によって決められるものでありデータベースに登録されるものである。データベースの概略的な記述は、「情報のタイプ/重要度数/情報内容」のようにになっている。ここで情報のタイプとは、図形情報、構造関係情報、製品情報の 3 種である。重要度は [0, 16 383] の整数値で表現され、情報内容は製品情報の詳細な意味の記述をするものである⁽⁷⁾。

次に、粗密付け処理方法について述べる。まず全ての格子要素について各々の格子要素領域内にどういった情報があるか抽出し、各々の重要度を求める。そして、式(3)により粗密付け重要度(F)を求める。粗密付けの方法は、求めた粗密付け重要度の大きい順に 25% 区切りで四分木構造のクラスの深さを深くする。本論では、粗密付け重要度の大きい順に最上位の 25% に対しては 2 クラス、次の 25% に対しては 1 クラスずつ深くしている。

以下、本処理例を図 7 を用いて具体的に示す。図 7 は、図形情報、構造関係情報、製品情報別に重要度の異なる場合の要素自動分割例である。図形情報については図 7 (a)に示すように、穴の境界線のほうが外形線よりも重要度が高いと設定すれば、図形としては同じ円であっても穴境界周辺が密に分割される。図 7 (b)では構造関係情報に関する例を示したもので、幾何モデルでは同じ表現ではあるがその意味は一体物とはめあいとは大きく異なる。本例では、はめあい物のほうが重要度が高いとした。同様に製品情報のうち穴に関する機能情報の例では、ねじ穴の方が抜き穴よりも重要度が高いとした。その結果、図 7 (c)に示すようにねじ穴のほうが密な分割となる。

以上の処理により粗密がつけられたならば最終的に、隣接する格子要素のクラス差補正処理を行う。クラス差補正処理とは、粗密付け処理によって生じた格子要素のクラスの差を調整する処理のことで図 8 に示すように隣接する格子要素のクラス差が 2 以上ある場合、そのクラス差を 1 にする処理である。

図 6 包含関係フラグの設定処理

図 7 粗密付け重要度の設定処理

ステップ3：形状特徴の把握処理

粗密分割処理が終了した時点で形状特徴の把握処理を行う。形状特徴の把握処理は、格子により形状の表現の不完全性を克服するための処理である。ここで言う形状表現の不完全性とは、一般に網目法による形状把握を行う場合に発現するものである。具体的には次のような場合がある。ステップ2で行われた包含関係フラグ設定処理のフラグ情報を単純に処理すると、図9の(a)に示すように形状の包含関係を明確に把握できない場合がある。図9の(a)は、包含関係フラグがINのものだけを考慮した場合に発現する形状表現の不完全性の例である。図9の(a)は、形状の特徴把握処理を単純に行った場合に発生する問題点を具体的に示したものであり、網目法における頂点の欠落や凹凸部の省略が発生する場合の現象例である。つまりこのような現象は包含関係フラグが図9の(a)のような場合、すなわち隣接する格子点の包含関係フラグが同じ(IN-IN または OUT-OUT の状態)時に発現する。これは、一般に解像度の問題として片付けられるが、無限に解像度をあげても解決できない場合もある。また、要素分割においてはその粗密付けは、理由づけられたものである必要があり、解像度に左右される形状把握方法は不合理となる。この問題を解決するために最終的な粗密分布が決まった後、図10の特徴把握処理の流れ図に示すようなアルゴリズムを導入した。本アルゴリズムの特長は、包含関係フラグの同定処理ステップにある。具体的には、

(1) 隣接する格子点のフラグが等しくない(OP

図8 クラス差の補正処理

●: IN or NODE ○: OUT □: ON
■: VERTEX WITH HIGHER F

図9 形状表現の不完全性と特長把握

≠NP) 時、交点を求め節点座標値を交点座標値と入れ替える処理を導入したこと

(2) 隣接する格子点のフラグが等しい(OP=NP) 時、一時的にその格子要素のクラスを深く詳細なフラグを求め、フラグの同定を詳細に行う処理を導入したこと

(3) 設計計算モデルの重要度の高い格子要素内では、節点座標値の再配置を行う処理を導入したこと
の三つである。本アルゴリズムによる処理例を図9の(b)、(c)と(d)に示す。図9の(b)と(c)は、設計計算モデルの重要度があまり高くない箇所での形状の特徴把握処理を行った例である。それゆえ、意味のある形状の抽象化表現が行われている。図9の(d)は、その格子要素内に重要度の高い情報(この場合、端点の座標値が優先)がある場合の例で、形状の抽象化が行われずに形状の特徴を把握した例である。さらに図11の(a)に示すような形状を具体的な例にとり、形状特徴の把握処理を行った結果を(b)~(d)に示す。図11の(b)では、小さい丸い穴は正しくその形状特徴が把握され、穴としては大きい長円が省略されている。図11の(c)と(d)では、長円の重要度を少しずつ高し

図10 形状特徴の把握処理の流れ図

図11 形状把握処理例

た。その結果、長円が穴として認識され、その形が変化する様子を示した。この長円の例のように重要度を変化させることで、2章で述べた本方法の基本方針(4)という抽象化を行うことができる。図11の(b)の場合で言えば、長円形の穴は解析上無視してもよいと判断されたということになる。本処理により、相異なる二つの問題である形状表現の不完全性の克服と解析形状の抽象化を実現できる。

ステップ4：節点/要素データ生成処理

ステップ4は、有限要素法と境界要素法のための処理と差分法のための処理の2系統に分かれる。前者をステップ4-a、後者をステップ4-bとする。

ステップ4-a：有限要素法と境界要素法のための節点/要素データ生成処理

ステップ2の粗密付け処理より得られた隣接する格子要素間のクラス差0または1の四分木格子に対し、有限要素または境界要素(以下、要素と略す)を生成する。要素の生成処理は、ステップ3で付けられた包含関係フラグをもとに三または四辺形の要素を生成して記憶することである。まず、包含関係フラグから外形線を含む可能性のある格子要素を抽出する。抽出した格子要素に関しては、生成する要素が潰れたり、反転したりしないように要素の生成を行う。また、要素は形状の面の法線に一致させて向き付ける。次に、各格子要素に対し、三または四辺形の要素を生成するか否かは包含関係フラグによって決める。具体的には、格子点がINのフラグを一つ以上持つ格子要素とすべての格子点がONのフラグを持ち、かつ格子要素の中心点がINとなるような格子要素については、要素を生成する。それ以外の格子要素については要素を生成しない。要素を生成する格子要素として判定されたものでOUTフラグを持つ場合、生成される要素の三辺形となる。生成する節点は、IN または ON のフラグを持つ格子点のみである。クラス差1をもつ格子要素では、図12の(a)~(e)に示すようにクラスの浅いほうの

図12 格子要素間の結合パターン

格子要素を三辺形要素で分割する。三辺形要素で分割するのは、ゆがんだ要素の生成を避けるためである。そのパターンは、クラスの浅い格子要素を持つ格子点の数によって異なる。図12に示したパターンは、本来ならば要素の節点共有関係を考慮して行うべきであるが、本論ではとりあえず図形処理的に結合した。なるべく四辺形要素だけを用いて結合することも可能であり、そのパターン例を図12(e)に示す。

ステップ4-b：差分法のための節点/要素データ生成処理

差分法のための要素分割は、直交座標系の分割を例にとり述べる。まず初めに、四分木格子の粗密状態のチェックを行う。粗密状態のチェックは、粗密付けられた四分木格子のU、V方向に対して、最も深いクラスでU、V行列のインデックスを図13の(a)に示すように設ける。そして、各インデックスの行または列に格子点があるか否か検査し、その有無に関するフラグ(0または1)をつける。この時、U、V方向行列のインデックスがともに無(0)でないU、V行列に、図13の(b)に示すように差分格子点を作成する。そして、図13の(c)に示すように各節点を結ぶことで差分法のための要素分割を行う。

ステップ5：生成した節点/要素数の検査処理

最終的に、生成した節点/要素数が定まった段階で節点あるいは要素数の検査を再度行う。この段階で、例えば生成した要素数が要求要素数よりも多い場合は、密に分割された部分の重要度が小さいものから粗に分割する。本方法では、処理過程で生成する図5に示したような四分木構造を保存しているため、この木構造の深さを局所的に調整することで再帰的に粗密調整ができる。また、生成した要素数が要求要素数よりも少ない場合は、密に分割された部分の重要度が大きいものからさらに密に分割する。ここで、生成した要素数が要求要素数に十分近い値に収束したか否かを判定するために、式(4)を用いてその許容範囲を決める。これにより、生成した要素数が「要求要素数 ± 評価基準値(C)」の範囲内になるように制御する。一方、式(4)の掛け率(H)の範囲 ±25 であり、この許容範囲を定めることにより実践的な処理効率を確保する。

$$|C| = n \times H \quad \dots\dots\dots (4)$$

図13 差分メッシュの生成処理

C: 評価基準値

n: クラス数

H: 掛け率(標準値=25)

ステップ6: 要素平滑化処理

ここで言う要素平滑化処理とは、必要に応じて要素の形を修正する処理のことであり、基本的には有限要素法のための要素分割の場合における利用を想定している。具体的には、要素およびその周辺の要素の面積の大きさが互いに近づいて行くように節点を移動させて要素形状を修正する。ただし、移動可能な節点は包含関係フラグがINのものだけである。本処理の目的は、粗密付けが滑らかになるようにすることであり、近隣の要素の大きさが唐突に変化しないように隣接格子の大きさを調節する。節点の移動は、移動させたい節点を共有するすべての要素の節点の座標値 $P_i (i=1 \sim N)$ を抽出し、これらの節点で構成される多角形を想定し、その重心値を移動させた節点の新しい座標値とすることで実現する[式(5)]。すべてのINのフ

ラグを持った節点について処理を行ったものを1回の処理とし、この処理を繰返すことで平滑化の度合いが進む。処理例を図14に示す。図14の(a)は式(5)の図解例で、(b)は平滑化を行わない状態のもので、(c)は平滑化処理後のものである。

$$\text{新座標値}(X_{\text{NEW}}, Y_{\text{NEW}}) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{N}$$

$$P_i(X_i, Y_i), i=1 \sim N \dots \dots \dots (5)$$

N: 節点の個数

4. 実験と結果の検討

今回提案した要素自動分割手法をプログラム化し、100ケースほどの実務に活用した。本論ではそのうちの一部を図15と16に示す。図15は、自動車用ジェネレータのケーシング部品の任意断面を要素分割したものである。図15(a)のケーシング形状には、軸受部、解析興味部、接合部などの属性データが与えられており、その断面形状(b)が抽出され要素分割されると(c)のようになる。(c)に比べ、要求要素数を少なくすると(d)のような結果を得る。これらの属性の重要度は、解析興味部、軸受部、接合部の順に30, 20, 10と機能情報の重要度が設定されている。材料は均一であるので、材料属性の重要度は0とし、この場合粗密付けに影響しない。また、すべての端点の幾何情報の重要度を10とすると式(3)から、解析興味部の属性が与えられているところが最も密に分割され、次に軸受部が密に分割される。粗密の度合は、図15の(c)と(d)を比較するとわかるように要求要素数が多いほうが粗密の度合も大きくなる。他の要素分割例として、図15の(e)に水平断面の場合を示す。図16は差分メッシュの例である。図17には定量的な結果の検討をするために、サーフェースモデルのデータ量(双3次

図14 要素平滑化処理

図15 ジェネレータ部品の任意断面の要素自動分割

図16 差分メッシュ分割

図17 サーフェースモデルのデータ量と処理時間

図18 要素数と処理時間

Bézier パッチ数)と計算処理時間(M-680 H による CPU 時間)の関係を示す。また、図 18 に要素数と計算処理時間の関係を示す。

実験結果としては、以下のようなことが得られた。

(1) 入力データである双 3 次 Bézier パッチの増加に伴い、処理時間は大幅に増大する。

(2) 節点数や要素数の増加に伴い、計算処理時間は図 17 に示すように増加する。

(3) 質的には、図 15 の分割結果からもわかるとおり、要素分割が粗密に推移しても、つぶれたりすることなく良好な結果を得た。

(4) 要素分割の粗密付けは、要素数が増加すると粗密付けの度合いが強くなる傾向にある。

5. 結 言

計算力学手法(有限要素法、境界要素法、差分法)を用いた設計計算を支援するシステムの中核技術である要素自動分割機能のうち二次元版を開発した。今回開発した機能は、幾何モデルに設計情報や形状情報を属性情報としてもたせたことにより、任意の二次元の形状を自動的に粗密付けして要素分割するものである。これをプログラム化し実務に適用した結果、設計者は設計案の確認、改良が容易に行えるようになった。今回の研究開発からは、次に述べるような結果が得られた。

(1) 有限要素法、境界要素法、差分法に共通な二次元自動要素分割方法を開発し、実務に活用した。

(2) 解析作業が設計計算モデルから直接的に行え

るようになり、作業時間の大幅な短縮が可能となった。

(3) 設計者が計算力学手法を用いたシミュレーションを設計計算の一部として容易に活用できる環境の一部を実現できた。

文 献

- (1) Buell, W. R., Mesh generation-A survey, *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, **95**(1973), 332.
- (2) 横山, 有限要素解析のための自動要素分割技法, *精機*, **48**-12(1982), 116.
- (3) 尾田, 有限要素自動分割法の現状とその利用法(1), *機械の研究*, **37**-6(1985), 26.
- (4) 大坪, FEM の最近の動向(4), *船誌*, **702**(1987), 37.
- (5) 中島・徳増, 計算力学手法を用いた設計計算の支援方式, *機論*, **55**-518, C (1989), 2649.
- (6) 中島・ほか 3 名, 統合形 CAE シミュレーション支援システム-CAESA の開発, *電論誌*, **109D**-3(1989), 153.
- (7) Nakajima, N., An approach to automate CAE modeling by automatic mesh generation with a knowledge based problem specification technique, *Proc. MICAD90*, **1**(1990), 232.
- (8) Samet, H., Region representation: Quadrees from boundary codes, *Graphics & Image Processing*, **23**-3(1980), 163.
- (9) 城・舟田, 有限要素法のための可変メッシュ生成プログラム, *精機*, **47**-4(1981), 13.
- (10) Yerry, M. A., A modified quadtree approach to finite element mesh generation, *Computer Graphics & Applications*, **1**/2(1983), 39.
- (11) 相沢・松田, 4 分木モデルによる三角形分割アルゴリズム, *構造工学における数値解析法シンポジウム論文集*, **10**(1986-7), 70.
- (12) 大須賀, 次世代 CAD/CAM のための知識処理の応用, (1985), 298, マグロウヒル.