ランダム加振による特性行列の同定に関する一研究*

日 野 順 市^{*1}, 芳 村 敏 夫^{*1}A Study on the Identification of Characteristic Matrices
by Random Excitation

Junichi HINO and Toshio YOSHIMURA

This paper is concerned with the system identification to calculate the characteristic matrices expressing the dynamic behaviors of structures by using the least squares method. The structure is excited by a random signal, and the measurements of the acceleration responses in a noisy environment are carried out. The accelerations, velocities and displacements of the structure are estimated from the measured noisy accelerations. The order of the structure is determined by evaluating the criterion of the identification. The effectiveness of the proposed approach is examined by the applications to a three-degree-of-freedom system as a numerical example, and to a cantilever beam as an experimental example.

Key Words: System Identification, Least Squares Method, Characteristic Matrices, Modal Analysis, Numerical Integration

1. 緒 言

機械や構造物の動特性を測定データを用いて表現する数学モデルを作成することを構造物の実験的同定というが、実験モード解析と呼ばれるものが一般的である。これは振動実験により伝達関数の周波数スペクトルや時刻歴応答曲線に適合するようにモード特性（固有振動数・固有モード・減衰率）を決定する方法であり、近年高度やモード解析装置の普及により急速な発展を遂げている^{(1)~(4)}。これら同定法は振動の挙動現象を把握するのに便利でありトラブルシューティング等に適しているが、モード特性は物理特性（質量、減衰および剛性）を直接表現する量ではないので、シミュレーション、最適設計および部分構造合成法等の高度な解析を続けて行うことには不便である。そのために、物理特性を直接表現する特性行列（質量、減衰および剛性行列）を同定することが必要であり、FEMとの直接結合、最適化への利用など高度な解析へと拡張することができる。しかし、特性パラメータの数が増加し

たり、減衰行列の同定が一般に容易でないなどの問題がある。

以上のように、従来の実験的方法または理論的方法による同定法は、それぞれ欠点を有し改善されるべきさまざまな問題がある。その様な観点から今日盛んに行われている系の同定に関する研究としては、長松らの一連の特性行列同定の研究⁽⁵⁾があり、実験的方法および理論的方法によって系の同定を行う際に両者の有する欠点を補う方法として考えられ、従来の曲線適合を用いて再構成された測定データを用い最小二乗法を適用した同定アルゴリズムを提案している。また、多自由度系に用いる動吸振器の設計に必要な等価質量を同定する方法⁽⁶⁾についても研究されている。

本研究では振動実験により得られた時刻歴応答のデータから直接特性行列を同定する手法を提案する。本手法は、ランダム加振により加速度応答を求め、得られた加速度応答に数値積分を用いて速度および変位応答を計算する。それらの時刻歴応答と入力信号を用いて、系のベクトル・行列表示された運動方程式に最小二乗法を適用することにより特性行列の同定を行う。そして本手法の有効性を数値実験によって確かめ、次に実際の片持ばりの同定を行う。その際、加速度応答に含まれる測定雑音の除去および同定の次数決定につ

* 平成元年10月15日 第67期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成元年12月25日。

^{*1} 正員、徳島大学工学部（〒770 徳島市南常三島2-1）。

いての判定に関する考察も行うものとする。

2. 特性行列の同定

一般に粘性減衰を有する多自由度系 (n 自由度) モデルに対するベクトル・行列表示した運動方程式は次の形で表されるものとする。

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \cdots \cdots (1)$$

ここで M , C , K , x および F の成分は

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (\because m_{ij} = m_{ji})$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (\because c_{ij} = c_{ji})$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (\because k_{ij} = k_{ji})$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

である。 M , C , K は質量行列, 減衰行列, 剛性行列で, それぞれ対称行列である。 x , F は変位ベクトル, 力ベクトルである。 m_{ii} , c_{ii} , k_{ii} , x_i , f_i はそれぞれの行列の i 行 i 列の成分およびベクトルの i 番目の成分であることを表す。

本手法は, 式(1)をもとにして特性行列 M , C , K の同定を行うことを目的とする。すなわち力ベクトル F のうち任意の 1 成分 f_1 のみを加振して系の加速度応答 $\ddot{x}$ を求め, f_1 と $\ddot{x}$ を用いて特性行列, M , C , K を同定する。式(1)をパラメータに関して書き換えれば

$$Ap = F_1 \cdots \cdots (2)$$

となる。ただし,

$$A = [A_a \ A_v \ A_d]$$

$$p = \{m_{11} \ m_{12} \cdots m_{nn} \ c_{11} \ c_{12} \cdots c_{nn} \ k_{11} \ k_{22} \cdots k_{nn}\}^T$$

$$F_1 = \{f_1 \ 0 \cdots 0\}^T$$

であり, A_a , A_v および A_d は各々加速度, 速度および変位について応答データより作成される行列であり A_d については以下になる。

$$A_d = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 & \cdots & \ddot{x}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddot{x}_1 & 0 & \cdots & 0 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 & \cdots & \ddot{x}_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{x}_1 & \cdots & 0 & 0 & \ddot{x}_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddot{x}_1 & 0 & 0 & \cdots & \ddot{x}_2 & 0 & \ddot{x}_{n-1} \ddot{x}_n \end{bmatrix}$$

A_v および A_d については行列の要素をそれぞれ $\dot{x}_i$, x_i に置き換えたものに対応する。ここで p は次の評価関数

$$J = E[(Ap - F_1)^T W (Ap - F_1)] \cdots \cdots (3)$$

を最小にするように決定されるものとする。ここで W は重みを表す対角行列で正定であるとする。上式より J を最小にする p の値 p^0 は, $\partial J / \partial p = 0$ とすれば以下のように求まる。

$$p^0 = T^{-1} Q \cdots \cdots (4)$$

となる。ただし

$$T = E[A^T W A], \quad Q = E[A^T W F_1]$$

式(4)を式(3)に代入すると

$$J^0 = r - Q^T T^{-1} Q \cdots \cdots (5)$$

となる。ただし

$$r = E(w_{11} f_1^2)$$

であり, w_{11} は W の 1 行 1 列成分である。

式(4)の T , Q の各要素は, 入力応答, 加速度応答, 速度応答および変位応答の統計量からなるが, これらの値はデータの離散化により

$$\left. \begin{aligned} E[x_l^{(i)} x_m^{(j)}] &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_l^{(i)}(k) x_m^{(j)}(k), \quad l, m=0, 1, 2 \\ E[x_l^{(i)} f_l] &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_l^{(i)}(k) f_l(k), \quad l=0, 1, 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

のように計算することができる⁽⁷⁾。ただし、 k は離散時間、 N はデータ個数、 l, m は時間 $k\Delta t$ (Δt は刻み時間)に関する微分の次数を表す。

ところが、係数行列 A に含まれる測定データに誤差を含むと、式(4)からもわかるように同定した p^0 にバイアスが生じることが考えられる。また、 p^0 を得るためには加速度応答 $\ddot{x}$ のほか速度応答 $\dot{x}$ および変位応答 x を測定する必要がある。しかしながら、本研究では $\ddot{x}$ しか得られないために、 $\ddot{x}$ の測定値よりその推定値 $\hat{\ddot{x}}$ を求め、次に数値積分により速度応答の推定値 $\hat{\dot{x}}$ および変位応答の推定値 $\hat{x}$ を得て、係数行列 A 決定することにする。これにより同定した p^0 にかかるバイアスは除去される。 $\ddot{x}$ の推定値は以下に示すようなローパスフィルタ⁽⁸⁾によって高周波と考えられる偶然誤差の雑音の除去を行う。

$$\hat{\ddot{x}}(t) = \frac{a + bz^{-1} + cz^{-2} + dz^{-3}}{e + fz^{-1} + gz^{-2} + hz^{-3}} \ddot{x}(t) \dots\dots\dots (7)$$

ただし、パラメータは

$$\begin{aligned} a &= \Delta t^3 \omega_c^3, \quad c = 3\Delta t^3 \omega_c^2 \\ b &= 3\Delta t^3 \omega_c^3, \quad d = \Delta t^3 \omega_c^3 \\ e &= 8 + 8\Delta t \omega_c + 4\Delta t^2 \omega_c^2 + \Delta t^3 \omega_c^3 \\ f &= -24 - 8\Delta t \omega_c + 4\Delta t^2 \omega_c^2 + 3\Delta t^3 \omega_c^3 \\ g &= 24 - 8\Delta t \omega_c - 4\Delta t^2 \omega_c^2 + 3\Delta t^3 \omega_c^3 \\ h &= -8 + 8\Delta t \omega_c - 4\Delta t^2 \omega_c^2 + \Delta t^3 \omega_c^3 \end{aligned}$$

表 1 3自由度系の特性行列の理論値

(i, j)	M	C	K
1, 1	0.05	0.3	70.0
1, 2	0.0	-0.05	-20.0
1, 3	0.0	0.0	0.0
2, 2	0.05	0.1	30.0
2, 3	0.0	-0.05	-10.0
3, 3	0.05	0.05	10.0

図 1 3自由度集中質量モデル

である。ここで ω_c は遮断周波数、 Δt は刻み時間とする。式(7)はまた次式のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{\ddot{x}}(t) &= \{a\ddot{x}(t) + b\ddot{x}(t-1) + c\ddot{x}(t-2) \\ &\quad + d\ddot{x}(t-3) - f\hat{\ddot{x}}(t-1) - g\hat{\ddot{x}}(t-2) \\ &\quad - h\hat{\ddot{x}}(t-3)\}/e \end{aligned}$$

以上の式より、雑音を除去した加速度応答を求めることができる。また、振動実験において計器の不具合や感度校正のずれによる系統誤差は、実験技術の向上によりある程度除去することができるが、ここでは圧電形加速度計が用いられるので、低周波の雑音が含まれる。よって、測定値をフーリエ変換して、まずパワースペクトル密度およびクロスパワースペクトル密度を求め、次に時間領域に逆フーリエ変換することにより低周波領域を除いた。このようにして $\hat{\ddot{x}}$ が求まれば、速度および変位応答は以下の差分式⁽⁹⁾により計算できる。

$$\hat{\dot{x}}(t) = \hat{\dot{x}}(t-1) + \{\hat{\ddot{x}}(t-1) + \hat{\ddot{x}}(t)\}\Delta t/2 \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{x}(t-1) + \Delta t \hat{\dot{x}}(t-1) + \Delta t^2 \hat{\ddot{x}}(t-1)/2 \\ &\quad + \beta \Delta t^2 \{\hat{\ddot{x}}(t) - \hat{\ddot{x}}(t-1)\} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

3. 振動系の次数の決定

前章において特性行列の同定手法について述べたが、ここでは振動系の次数 n の決定方法について述べる。パラメータは式(4)より決定できるので T の行列式が零でないことが必要である。行列式が零であるときは少なくとも次数が n より小さいことを意味するが、加速度を測定する際に互いに独立な雑音に乱されているので、同じ加速度を測定したとしても実際に得られる加速度の時系列は同一なものとはならない。したがって、もし次元が n より小さい場合でも T の行列式が零でないものとするのが一般的である。そのために、

$$\Delta J_n^0 = J_n^0 - J_{n-1}^0 \quad n=1, 2, \dots \dots\dots (10)$$

を選び、 ΔJ_n^0 が負値あるいはあるしきい値 ϵ より小となればその時点の n を次数とすれば良い。ただし T の行列式が十分小さくなって逆行列が計算できないときはその前の次元を選択することにする。

4. 具 体 例

実際の構造物の振動実験においては系統誤差と偶然誤差が生じるため、それらの誤差を除去して特性行列の同定を行わなければならない。系統誤差については実験技術の向上によりある程度は取り除くことが可能であるが、取り除けない部分についてはデータの統計処理を行う際にその部分を除外して考えるものとする。一方偶然誤差については、それが信号に対してよ

り高周波の成分も含んでいるために、ローパスフィルタによってある程度除去することができると考えられる。ここでは、まずシミュレーションによって手法の妥当性を確かめ、次に実際の構造物に対して適用することにする。

4.1 同定シミュレーション 図1に示す3自由度集中質量モデルを対象として、表1に示す特性行列の値を持つ系に本手法の適用を行う。外力(F_1)として正規性定常不規則信号(平均0, 分散1.5)を m_1 に加え、 m_1, m_2, m_3 の加速度応答を測定し、式(8)および式(9)を用いて速度および変位応答を求める。同定に用いる加速度応答データは2048個とし、測定雑音として加速度応答 $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3$ にそれぞれ雑音と信号のrms値が7.3%, 9.4%, 8.9%の白色雑音を混入する。そして、2・3節で示したローパスフィルタにより加速度応答の高周波領域の雑音を、遮断周波数領域 ω_c を200 rad/s (約32 Hz)として除去する。また数値積分はニューマーク β 波を用い、パラメータとして $\beta=1/4$ および刻み時間 Δt は1/1000秒とする。

特性行列を同定する系の次数として、2, 3および4次とした場合の J_n^0 の結果が、Table 2に示される。ここで、2次の場合は x_1 および x_2 の応答のみを用い、4次とした場合は x_1 を二重に測定し $x_4=x_1$ とみなして同定を行った。これらの次数に対して同定を行い ΔJ_n^0 を計算すると、 J_n^0 が最小になっていることを示

表2 3自由度系の J_n^0 の値

n	J_n^0
2	0.1709×10^4
3	0.4704×10^{-2}
4	0.2421×10^1

図2 理論値および同定値による伝達関数
(点1加振-点1応答)

し、系の自由度と一致していることがわかる。また表3に $n=3$ の場合に同定されたパラメータ値が示される。これを見れば十分精度良く同定されていることがわかるが、3自由度系の伝達関数についても図2に示すものとする。ここで、実線が同定された特性行列より計算された伝達関数、一点鎖線がシミュレーション系の設定値の特性行列より計算された伝達関数を示す。両者のピーク値はほぼ一致しており良好な結果が得られたことがわかり、本手法の妥当性が確認できた。

4.2 同定実験 同定実験の概要は図3に示す。すなわち、供試体の一点をランダム加振し、加振点および他の数点の加速度応答を加振力とともに測定する。得られたデータに対し本手法を適用し特性行列の同定を行うものとする。

供試体は図3に示すような形状の亚克力板とし、右端をバイスで固定した片持ばり状態としている。測定点1を加振点として選りバンド幅250 Hzの疑似ランダム波を加え、加振力と各測定点の加速度応答をサンプリング時間 $\Delta t=0.488$ msで測定する。ここで測定された加速度応答データから偶然誤差を取り除く必要があり、本実験では既に述べたローパスフィルタを用いる。遮断周波数については、測定点1の伝達関数の測定を行ったところ340 Hz以下に3個の固有振動数がみられ、それ以上の周波数では雑音の影響が大きくなっていたため $\omega_c=2500$ rad/s (約400 Hz)とした。また本実験においては、シミュレーション系では考慮する必要のなかった低周波雑音の影響が重大な問題となった。本実験において生じた低周波雑音は使用した小形加速度計の精度上の問題であり一種の系統誤差であると考えられる。それは一般に圧電形の小型加

表3 3自由度系の特性行列の同定値

(i, j)	M	C	K
1, 1	0.049	0.268	67.49
1, 2	0.0	-0.041	-20.78
1, 3	0.0	0.015	1.56
2, 2	0.051	0.106	31.75
2, 3	-0.004	-0.054	-11.04
3, 3	0.044	0.046	9.52

図3 実験に用いた片持ばり

速度計では、低周波領域では精度良く測定することが構造上困難となることから起因している。そこで本実験では、この低周波数領域の雑音を除去した時間領域の統計量を計算するために、まず測定された信号のパワースペクトル密度およびクロスパワースペクトル密度をフーリエ変換によって計算し、次にその逆フーリエ変換により時間領域の統計量を計算する段階において 15 Hz 以下の低周波領域を除去した。

以上により、本手法を用いて同定を行った際の評価規範 J_n^0 の値を表 4 に示した。ここで同定するさいのモデルの次数として $n=2, 3$ および 4 の場合についての計算を行った。また、ここでも測定する加速度応答のデータ個数は 2048 個とした。 $n=3$ の場合の特性行列が表 5 に示される。それらの特性行列から計算されるモード特性を、振動実験により FFT アナライザを用いて伝達関数を直接求めた際に得られたモード特性とともに表 6 に示す。伝達関数データから得られたモードの数は 3 次の振動数までであり、それ以上の次数のモードは励振力が弱くなっているため、雑音の影響を受け識別することは不可能であった。各々のモデル次数の同定結果について考察すると、 $n=2$ とした場合は、測定した加速度応答のデータには 3 次までの振動数成分が含まれているので、十分な精度を得ることは

表 4 片持ばりの J_n^0 の値

n	J_n^0
2	34.5
3	12.3
4	10.7

表 5 片持ばりの特性行列

(i, j)	M	C	K
1, 1	0.27	24.5	6972.3
1, 2	0.03	-2.7	-2775.4
1, 3	0.08	-14.5	-5953.3
2, 2	0.04	7.5	7689.1
2, 3	-0.06	-3.3	-5998.9
3, 3	0.34	17.3	18266.0

表 6 モード特性の比較

Mode	M-C-K	FRF DATA
1	ω (Hz)	25
	ζ	0.075
2	ω (Hz)	138
	ζ	0.045
3	ω (Hz)	340
	ζ	0.062

できなかった。 $n=3$ とした場合には、28 Hz, 138 Hz および 340 Hz の 3 次までの固有振動数は 5 % 程度以下の誤差で十分な一致を見ている。 $n=4$ とした場合は 1, 2 次の固有振動数と減衰比は $n=3$ と同様なものとなったが、3 次の固有振動数および減衰比は小さくなった。また 3 個の固有振動数の他に 4 番めのモード

(a) 点1加振-点1応答

(b) 点1加振-点2応答

(c) 点1加振-点3応答

図 4 片持ばりの伝達関数

が現れるが、これは雑音による影響が表れたものと考えられ、また $\xi=1.0$ となっているので真のモードではないといえる。以上のことから $n=3$ が妥当であることがわかる。

次に、 $n=3$ の場合について同定された特性行列より計算された伝達関数を、比較のためFFTアナライザにより測定した伝達関数とともに図4(a)-(c)に示した。それぞれ図4(a)は加振点1-応答点1の場合、図4(b)は加振点1-応答点2の場合および図4(c)は加振点1-応答点3の場合の結果であり、実線が特性行列より求めた値で、点線が平均操作を20回行って求めた伝達関数データを偏分反復法により曲線適合して得られた結果である。伝達関数データを得るためには2048個の応答データのみを用いただけでは十分な精度が得られず、平均操作を20回行った。したがって、本手法は1回で取り込んだ2048個のデータのみを用いて同定を行っており相対的に短いデータでの同定が可能であるといえる。

5. 結 言

本研究は、振動試験により得られた加速度応答のデータから直接特性行列を求める同定手法について示した。その際に、振動試験において考えられる測定雑音の除去についても考慮して同定を行った。まず集中質量モデルによるシミュレーションを行い本手法の検証を行い、実際の構造物としてアクリル製の片持ばりを供試体として同定実験を行い妥当性を確認した。

文 献

- (1) 長松, モード解析, (1985), 174, 培風館.
- (2) 日本機械学会編, モード解析の基礎と応用, (1986), 丸善.
- (3) 鈴木・河之辺, 機論, 53-496, C (1987), 2445.
- (4) 岡田・ほか2名, 機論, 54-507, C (1988), 2509.
- (5) 例えば, 大熊・長松, 機論, 52-478, C (1986), 1742, など.
- (6) 背戸, 他3名, 機論, 53-485, C (1987), 52.
- (7) J.S. ベンダット, A.G. ピアソル, ランダムデータの統計的处理, (1976), 133, 培風館.
- (8) 今井, デジタル信号処理, (1983), 85, 廣済堂産報.
- (9) 戸川, 有限要素法による振動解析, (1975), 28, サイエンス社.