食違い軸歯車におけるかみあい条件の平歯車的性質*

大 竹 与 志 知^{*1}Characteristics of the Contact Condition
of Skew Gears Similar to Spur Gears

Yoshichi OHTAKE

First, the position where the component of relative velocity on a plane is zero, secondly, the distribution of relative velocity centered by the zero point on a plane, and finally, the contact condition of skew gears on a plane based on the zero point and the relative velocity were investigated. From the results, the contact condition of skew gears by the medium of a plane such as spur gears is obtained. Also, the characteristics of the contact condition of skew gears similar to that of spur gears are obtained.

Key Words: Machine Element, Gear, Skew Gears, Plane, Pitch Point, Relative Velocity, Contact Condition

1. ま え が き

食違い軸歯車においては、平歯車における平面、傘歯車における球面のごとき、その上で歯形を論ずることのできるいわばかみあい面にあたる曲面が、存在しないことが酒井⁽¹⁾によって証明されている。ここで、かみあい面は、対をなすすべり線およびこれに対応する軌線を含むものとして定義されている。これが、食違い軸歯車の歯形理論が難解であるとされる一つの理由である。

本論文の目的は、食違い軸歯車の歯形理論の内の一つであるかみあい条件に関して、平歯車のかみあい面である平面をかみあい面に準ずるものとして考え、この平面を媒介として平歯車的解法を導くことにある。そして、この解法に付随する平歯車的性質を中心とする諸性質を明らかにし、食違い軸歯車と平歯車の一つの親近性を示すことにある。

2. 範囲・定義・進め方

論を進めるにあたり、はじめに、ここで扱う範囲、

言葉の定義、進め方等の主な点を明確にしておく。まず、図1に示すように、一对の食違い軸歯車1, 2を考える。歯車運動は、ネジ運動を一般形とし、その特別な形として純回転運動を考える。また、平行軸歯車を考え、ここで得られる食違い軸歯車の理論を適用する。平行軸歯車は、一般形から順にネジ運動平行軸歯車、純回転平行軸歯車(円筒歯車)、純回転平行軸歯車でかみあい面を歯車軸に直角にとった場合に区別する。本論文では、純回転平行軸歯車でかみあい面を歯車軸に直角にとった場合を平歯車とし、平歯車的性質とはこの歯車との比較による類似性をさすものとする。

次に、食違い軸歯車に対し、空間に任意の平面Aを

図1 食違い軸歯車と準かみあい面

* 原稿受付 平成2年1月10日.

*¹ 正員、日本ビクター(株) (〒221 横浜市神奈川区守屋町3-12).

考える。A 平面上には、A 平面上の相対速度成分が零の点、すなわち相対速度 V が A 平面に垂直な点が存在する。この点は、A 平面上に接触点を考えるとき、接触点での相対速度やかみあい条件に対して、平歯車のピッチ点に準じる働きをする。そこで、この点を準ピッチ点 P と呼ぶ。かみあい条件を満たしているかを判定するのに、準ピッチ点を始点とし接触点を終点とするベクトルを用いるが、このベクトルをかみあいベクトル r とよぶ。また、A 平面上で準ピッチ点を用いてかみあい条件を論じる場合、A 平面をかみあい面に準じるものとして考え、準かみあい面 A と呼ぶことにする。ここで扱う A 平面は、両歯車軸を切る場合だけでなく、歯車軸に平行な場合や瞬間軸に平行な場合等を含むすべての平面を対象とする。

本論文では、まず、A 平面上の準ピッチ点の位置を求める。はじめに一般形を求め、次に、A 平面が両歯車軸を切る場合、一方の歯車軸に平行な場合、瞬間軸に平行な場合等に分類してさらに詳しくみる。次に、準ピッチ点を中心とする A 平面上の相対速度場を明らかにする。最後に、準ピッチ点やこの相対速度場の性質等を用いた三種類のかみあい条件を求める。

3. 準ピッチ点

3.1 準ピッチ点の式 ここでは、図 2 に示すように、任意の平面 A を与えた場合の、A 平面上の準ピッチ点の位置を求める。定義より、準ピッチ点 P は、相対速度 V_p の A 平面上成分が零の点であり、相対速度 V_p は A 平面に直交する。したがって、A 平面の単位法線ベクトルを a とすれば、準ピッチ点 P の位置は次式を満たす点として求まる。

$$a \times V_p = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

歯車 1, 2 の角速度を w_1, w_2 、相対角速度を w とし、並進速度を w_1, w_2 、相対並進速度を w とする。歯車 1, 2 軸を S_1, S_2 とし、歯車 1, 2 軸上の点を O_1, O_2 とする。 O_1, O_2 を始点として P 点を終点とするベクトル

を r_1, r_2 とする。このとき、P 点における相対速度 V_p は次式となる。

$$V_p = (w_2 \times r_2 - w_1 \times r_1) + w \quad \dots\dots\dots (2)$$

式 (1) に上式を代入すれば次式を得る。

$$a \times V_p = a \times (w_2 \times r_2 - w_1 \times r_1) + a \times w = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

次に、準ピッチ点 P の位置を、A 平面上の任意の 2 点を介して表してみる。図 3 に示すように、A 平面上の任意の 2 点を O_3, O_4 とし、始点を O_1, O_2 とし終点を O_3, O_4 とするベクトルを r_{13}, r_{24} とする。また、 O_3, O_4 を始点として P 点を終点とするベクトルを r_3, r_4 とする。このとき、P 点における相対速度 V_p は、次式となる。

$$\begin{aligned} V_p &= w_2 \times (r_{24} + r_4) - w_1 \times (r_{13} + r_3) + w \\ &= (w_2 \times r_4 - w_1 \times r_3) \\ &\quad + \{(w_2 \times r_{24} - w_1 \times r_{13}) + w\} \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここで、 $\{ \}$ 内の式は、 O_3 での歯車 1 の速度と O_4 での歯車 2 の速度の差を表す。この速度の差を V_{34} とすれば、この式は次式となる。

$$V_p = (w_2 \times r_4 - w_1 \times r_3) + V_{34} \quad \dots\dots\dots (5)$$

この式を (1) に代入すれば、

$$\begin{aligned} a \times V_p &= a \times (w_2 \times r_4 - w_1 \times r_3) + a \times V_{34} \\ &= (w_2 r_4 \cdot a - r_4 a \cdot w_2) - (w_1 r_3 \cdot a \\ &\quad - r_3 a \cdot w_1) + a \times V_{34} = 0 \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 r_4, r_3 は A 上にあるから、 $r_4 \cdot a, r_3 \cdot a$ は零となる。したがって、上式は次式となる。

$$-r_4 a \cdot w_2 + r_3 a \cdot w_1 + a \times V_{34} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

この式が、A 平面上の任意の点 O_3, O_4 を介した場合の、準ピッチ点 P を与える式である。 O_3 を始点として O_4 を終点とするベクトルを r_{34} とすれば、この式は次式となる。

$$\begin{aligned} r_3 a \cdot w_1 &= (-r_{34} + r_3) a \cdot w_2 - a \times V_{34} \\ r_3 a \cdot (w_1 - w_2) &= -r_{34} a \cdot w_2 - a \times V_{34} \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

この式より次式を得る。ここで、 r_3 は、 O_3 を起点とし

図 2 A 平面と準ピッチ点

図 3 A 平面上の 2 点を介した場合

て準ピッチ点 P の位置を表すベクトルである。

$$r_3 = (r_{34}a \cdot w_2 + a \times V_{34}) / a \cdot w \quad (9)$$

同様に、

$$r_4 = (r_{34}a \cdot w_1 + a \times V_{34}) / a \cdot w \quad (10)$$

次に、準ピッチ点 P の位置を、A 平面上の任意の 1 点を介して表してみる。この場合は、上記の A 平面上の任意の 2 点を介して表した場合の変形として求まる。図 4 に示すように、 $O_4 = O_3$ 、 $r_4 = r_3$ 、 $r_{34} = 0$ 、 $r_{24} = r_{23}$ とすればよい。 V_{34} は O_3 での歯車 1, 2 の相対速度 V_3 を表す。このとき式 (7), (9), (10) は次の一つの式に変形される。

$$r_3 = a \times V_3 / a \cdot w \quad (11)$$

ここで、

$$V_3 = w_2 \times r_{23} - w_1 \times r_{13} + \underline{w} \quad (12)$$

この式より、準ピッチ点は、A 平面上の任意の点 O_3 での相対速度と A 平面の垂線の共面に垂直な、 O_3 を通る直線上にのることがわかる。したがって、準ピッチ点 P の位置は、A 平面上の任意の 2 点でのこの二つの直線の交点として求めることもできる。

3.2 両歯車軸を切る場合と平歯車の性質

ここでは、A 平面が両歯車軸を切る場合を考える。図 5 に示すように、A 平面上の任意の 2 点を介して準ピッチ点を表した場合において、A 平面上の歯車 1, 2 の速度が A 平面に垂直な点を O_3 , O_4 とする。このとき、 a と V_{34} の外積は零となる。したがって、この場合、式 (7), (9), (10) は次式となる。

$$r_3 a \cdot w_1 = r_4 a \cdot w_2 \quad (13)$$

$$r_3 = r_{34} a \cdot w_2 / a \cdot w \quad (14)$$

$$r_4 = r_{34} a \cdot w_1 / a \cdot w \quad (15)$$

式 (13) より、準ピッチ点 P は、直線 $O_3 O_4$ 上にのることがわかる。また、 w_1 , w_2 の A 平面に垂直な成分の大きさを w'_1 , w'_2 とすれば、準ピッチ点 P は直線 $O_3 O_4$ 上で、2 点間 $O_3 O_4$ を、 $O_3 P : O_4 P = w'_2 : w'_1$ に内分あるいは外分する点として求まることがわかる。

式 (13) ~ (15) は、A 平面上の点 O_3 , O_4 を通り、A

平面に垂直な歯車軸 S'_1 , S'_2 を有し、 w_1 , w_2 の A 平面に垂直な成分 w'_1 , w'_2 を角速度とする平歯車 1, 2 のピッチ点を与える式でもある。この平歯車を等価平歯車と呼ぶことにする。したがって、一对のネジ運動食違い軸歯車 1, 2 の準ピッチ点は、等価平歯車を用いて、平歯車同様に求めることができる。この性質を、食違い軸歯車の準ピッチ点に関する平歯車の性質と呼ぶ。A 平面が瞬間軸に直交する場合、瞬間軸における相対速度の性質より、準ピッチ点は A 平面と瞬間軸との交点に一致する。したがって、A 平面が相対角速度に直交する場合の準ピッチ点の位置は瞬間軸の位置を表すことになる。

A 平面上の点 O_3 を与える式は、定義より次式となる。

$$a \times (w_1 \times r_{13} + \underline{w}_1) = 0 \quad (16)$$

O_1 を歯車軸と A 平面の交点にとれば、

$$a \times (w_1 \times r_{13} + \underline{w}_1) = w_1 a \cdot r_{13} - r_{13} a \cdot w_1 + a \times \underline{w}_1 = -r_{13} a \cdot w_1 + a \times \underline{w}_1 = 0 \quad (17)$$

よって、 O_1 を起点として O_3 を与えるベクトル r_{13} は、次式となる。

$$r_{13} = a \times \underline{w}_1 / a \cdot w_1 \quad (18)$$

A 平面上の点 O_4 を与える式も同様に求めて、次式となる。

$$a \times (w_2 \times r_{24} + \underline{w}_2) = 0 \quad (19)$$

$$r_{24} = a \times \underline{w}_2 / a \cdot w_2 \quad (20)$$

歯車が純回転の場合、式 (18), (20) の r_{13} , r_{24} は零となり、 O_3 , O_4 は、歯車 1, 2 軸と A 平面の交点 O_1 , O_2 に一致する。

ネジ運動平行軸歯車の場合、食違い軸歯車と同様に相対速度が瞬間軸のまわりのネジ運動として表されるので、食違い軸歯車と同様の扱いとなる。純回転平行軸歯車の場合、 r_3 と r_4 の比は一定となり、準ピッチ点 P は、A 平面と瞬間軸であるピッチ母線との交点であるピッチ点に一致する。これは、食違い軸歯車と異なり、相対速度が瞬間軸のまわりの純回転運動とし

図 4 A 平面上の 1 点を介した場合

図 5 等価平歯車と平歯車の性質

て表されるためである。平歯車の場合、等価平歯車は平歯車に一致する。

3・3 歯車軸に平行な場合 A平面が一方の歯車軸を切り、歯車軸の片方に平行な場合は、両歯車軸を切るA平面が回転して限りなく一方の歯車軸に平行に近づいた極限の場合と考えられる。このとき、A平面と歯車軸の交点は無限遠点に遠ざかる。したがって、この場合、A平面が両歯車軸を切る場合の式ではとらえきれない。そこで、ここでは、任意の1点を介して表した式(11)を用いる。

図6に示すように、A平面が歯車2軸に平行な場合、歯車1軸とA平面との交点を O_1 とし、A平面上の歯車1の速度がA平面に垂直な点を O_3 とする。このとき、 $\mathbf{a}$ と O_3 での相対速度の外積および $\mathbf{a}$ と $\mathbf{w}_2$ の内積は零となるから、式(11)は次式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 &= \mathbf{a} \times \{(\mathbf{w}_2 \times \mathbf{r}_{23} + \mathbf{w}_2) - (\mathbf{w}_1 \times \mathbf{r}_{13} + \mathbf{w}_1)\} / \mathbf{a} \\ &\quad \cdot (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) = -\mathbf{a} \times (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{r}_{23} + \mathbf{w}_2) / \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_1 \\ &= -(\mathbf{w}_2 \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{r}_{23} \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{a} \times \mathbf{w}_2) / \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

よって、

$$\mathbf{r}_3 = -(\mathbf{w}_2 \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{w}_2) / \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_1 \quad \dots\dots\dots (22)$$

この式より、準ピッチ点Pの位置は、 O_3 を始点とし、歯車2軸とA平面の最短距離の大きさに $\mathbf{w}_2$ の大きさをかけた大きさを歯車2軸方向の成分とし、 $\mathbf{w}_2$ の大きさを歯車2軸に垂直な方向の成分とするA平面上のベクトル方向にあることがわかる。歯車2軸がA上にある場合、歯車2軸方向成分は零となる。

歯車1に関していえば、A平面が両歯車軸を切る場合同様、等価平歯車を考えることができる。歯車2が純回転の場合、準ピッチ点Pの位置は、 O_3 を通り、歯車2軸に平行なA平面上の直線上にあることがわかる。この場合、歯車2軸がA平面上にあれば、準ピッチ点Pは O_3 に一致する。歯車2が並進運動の場合、準ピッチ点Pの位置は、 O_3 を通り、歯車2軸に垂直なA平面上の直線上にあることがわかる。A平面が歯車1軸に平行な場合も、A平面が歯車2軸に平行な場合

図6 A平面が歯車2軸に平行な場合

と同様に求まる。平行軸歯車においては、A平面が歯車軸に平行な場合は瞬間軸に平行な場合となる。

3・4 瞬間軸に平行な場合 ここでは、A平面が瞬間軸に平行な場合、すなわち、相対角速度に平行な場合の準ピッチ点を考えてみる。準ピッチ点を任意の1点を介して表せば、前述のように、準ピッチ点は、A平面上の任意の点 O_3 での相対速度とA平面の垂線の共面に垂直な O_3 を通るA平面上の直線にのる。図7に示すように、準ピッチ点は、この直線を含み瞬間軸Sを切るA平面を回転して限りなく瞬間軸に平行に近づけた極限の場合の、A平面上の準ピッチ点として求まる。A平面が限りなく瞬間軸に平行に近づいた場合、準ピッチ点の位置を表す式(11)の右辺の分母は零に近づく。これより、準ピッチ点の位置は、式(11)右辺分子のベクトル方向へ無限に遠ざかることがわかる。したがって、準ピッチ点Pの位置は、A平面上の任意の点 O_3 での相対速度とA平面の垂線の共面に垂直な O_3 を通るA平面上の直線上無限遠方にある。これは、 O_3 での相対速度のA平面成分に垂直な、 O_3 を通るA平面上の直線上無限遠方にあると言い替えることができる。瞬間軸のA平面への投影線上では、相対速度は相対速度のA平面成分に一致する。式(11)の右辺、分子のベクトルの式を展開すれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{V}_3 &= \mathbf{a} \times (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{r}_{23} - \mathbf{w}_1 \times \mathbf{r}_{13} + \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{w}_2 \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{r}_{23} \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{r}_{13} \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_1 + \mathbf{a} \\ &\quad \times \mathbf{w} = -(-\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{13}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{r}_{13} \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_1 \\ &\quad + \mathbf{w}_2 \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{w}_1 \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{w} \\ &= \mathbf{r}_{12} \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_2 - \mathbf{r}_{13} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) \\ &\quad + \mathbf{w}_2 \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{w}_1 \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{w} \\ &= \mathbf{r}_{12} \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_2 \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{w}_1 \mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{w} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

この式で、 O_3 の位置の関数となっているのは、 $\mathbf{r}_{23}$ 、 $\mathbf{r}_{13}$ であるが、 $\mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{a}$ 、 $\mathbf{r}_{13} \cdot \mathbf{a}$ は、 O_1 、 O_2 からA平面への最短距離を示す。したがって、準ピッチ点の方向は、 O_3

図7 A平面が瞬間軸に平行な場合

の位置にかかわらず一定であることがわかる。A 平面が瞬間軸を含む場合、瞬間軸での相対速度の性質より、準ピッチ点の方向は瞬間軸に直交する方向となる。

ネジ運動平行軸歯車の場合も同様である。純回転平行軸歯車の場合は、式(23)で第1, 4項が零となり第2, 3項は歯車軸方向を向くので、準ピッチ点の方向は歯車軸方向となる。これは、準ピッチ点が瞬間軸上無限遠方にあることを示す。純回転平行軸歯車で、A 平面がピッチ母線である瞬間軸を含む場合、式(11)の r_3 は不定となり、準ピッチ点は A 平面上任意の点をとることができる。これは、A 平面上での相対速度がすべての点で A 平面に直交しており、A 平面上のすべての点が準ピッチ点になることを意味している。

4. 相 対 速 度

4.1 相対速度の式 ここでは、準ピッチ点を中心とする A 平面上の相対速度場を求める。図8に示すように、A 平面上の任意の点を Q とする。歯車 1, 2 軸上の点 O_1, O_2 を始点とし Q 点を終点とするベクトルを r_a, r_b とする。このとき、Q 点における相対速度 V は次式で表される。

$$V = (w_2 \times r_b - w_1 \times r_a) + w \quad \text{.....(24)}$$

歯車 1, 2 の A 平面上の相対速度成分が零である準ピッチ点 P を始点とし、Q 点を終点とするベクトル r を用いれば、Q 点における相対速度 V は次式で表される。

$$\begin{aligned} V &= \{w_2 \times (r_2 + r) - w_1 \times (r_1 + r)\} + w \\ &= \{(w_2 \times r_2 - w_1 \times r_1) + w\} + w \times r \end{aligned} \quad \text{.....(25)}$$

上式の { } 内は、準ピッチ点 P における相対速度 V_p を表す。したがって、相対速度 V の式は最終的に次式となる。

$$V = V_p + w \times r \quad \text{.....(26)}$$

4.2 相対速度の平歯車的性質 w の A 平面に垂直な成分および A 平面上成分を、 w' および w'' とすれば、式(26)は次式となる。

$$\begin{aligned} V &= V_p + (w' + w'') \times r \\ &= (w' \times r) + (V_p + w'' \times r) \quad \text{.....(27)} \end{aligned}$$

この式の第一の () の式および第二の () の式は、それぞれ相対速度 V の A 平面上成分および A 平面に垂直な成分を表す。式より、相対速度 V の A 平面上成分は、準ピッチ点を中心とする周速度で表されることがわかる。そして、A 平面上成分の大きさは、準ピッチ点 P を零として P 点からの距離に比例して大きくなる。したがって、図9に示すように、相対速度の A 平面上の成分は、準ピッチ点を中心とする円群に接するベクトル場を形成する。これは、平歯車の相対速度場と類似した性質であり、この性質を、相対速度における平歯車的性質と呼ぶことにする。また、相対速度は、準ピッチ点を通り A 平面に垂直な直線を軸とする、円筒群に接するベクトル場を形成するといえる。先に、準ピッチ点 P の位置は、A 平面上の任意の点を考えた場合、この点での相対速度と A 平面の垂線の共面に垂直なこの点を通る直線上にのることを示した。これよりも、相対速度は準ピッチ点 P を通る A 平面の垂線を中心とする円筒に接するという性質が導かれる。上記の性質より、準ピッチ点を通る A 平面上の直線上での相対速度は、この直線に直交することがわかる。また、準ピッチ点に関する一対の等価平歯車に対して、歯車軸と A 平面の二つの交点をむすぶ直線上の相対速度は、この直線に直交することがわかる。

式(27)の第二の () 内の式より、相対速度の A 平面に垂直な成分の大きさは、準ピッチ点 P を通り、ベクトル w'' 方向をもつ直線に平行な線上で一定となり、P 点から w'' に垂直な方向の距離に比例して大きさが変化することがわかる。A 平面に垂直な成分の大きさが零の線では、A 平面成分が相対速度になるから、この線は相対速度が A 平面に接する点の集合であることがわかる。A 平面に垂直な成分の大きさが零の線は、式(27)の第二の () 内の式が零となる場合であるから、次式を満たす線である。

図 8 A 平面上の相対速度

図 9 相対速度の平歯車的性質

$$V_p + w'' \times r = 0 \quad (28)$$

P点からこの零の線までの最短距離を r , V_p , w'' の大きさを V_p , w'' とすれば, r は次式で表される。

$$r = V_p / w'' \quad (29)$$

A 平面が瞬間軸に垂直な場合, この零の線は無限遠方に遠ざかる。

A 平面が瞬間軸 S に平行な場合は, 前述のように, 準ピッチ点の位置は, 式(11)の右辺の分子のベクトル $a \times V_3$ 方向へ無限に遠ざかる。したがって, 図 10 に示すように, 準ピッチ点を通り A 平面に垂直な直線を軸とする円筒群に接するベクトル場は, 歯車軸の近くでは, 準ピッチ点方向に直交する平行平面群に接するベクトル場とみなせる。相対速度の性質より, 相対速度は, 瞬間軸に平行な A 平面上の直線上では同じであり, 瞬間軸の A 平面に垂直な方向の A 平面への投影線上では A 平面上にのる。

ネジ運動平行軸歯車の場合は, 食違い軸歯車と同様に相対速度が瞬間軸のまわりのネジ運動として表されるので, 食違い軸歯車と同様の扱いとなる。純回転平行軸歯車の場合は, V_p は零となるから式(28)より, A 平面に垂直な成分の大きさが零の線は準ピッチ点 P を通る。平歯車の場合, A 平面上のすべての点で A 平面に垂直な成分は零となる。

5. かみあい条件

5.1 かみあい条件 ここでは, 前述の A 平面, 準ピッチ点, 準ピッチ点を中心とする相対速度等を用いて表した場合の, 食違い軸歯車のかみあい条件を, 3 種類について求める。

図 11 に示すように, 接触点 Q と接触点における相対速度を含む準かみあい面 A を考える。あるいは, 準かみあい面 A を考え, 相対速度が準かみあい面上にある点を接触点 Q とする。ここで, 準かみあい面は, 先に定義したように, その上で準ピッチ点を用いてか

みあい条件を論じる場合の A 平面である。かみあい条件の一般的な表現は, 接触点で歯面が相対速度に接することである。接触点で, 準かみあい面上の歯形が相対速度に接すれば, 歯面が相対速度に接することになる。歯形が相対速度に接するということは, 接触点での歯形の法線 n が相対速度に直交することでもある。したがって, かみあい条件は, 接触点で歯形の法線が相対速度に直交することであると言い直せる。この条件を満たす歯形法線は一つ定まる。

準かみあい面上の歯形の単位法線ベクトルを n , 接触点での相対速度を V とすれば, かみあい条件式は次式となる。

$$n \cdot V = 0 \quad (30)$$

かみあい条件式(30)に, 接触点で相対速度の式(26)を代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} n \cdot V &= n \cdot V_p + n \cdot w \times r \\ &= n \cdot V_p + w \cdot r \times n \end{aligned} \quad (31)$$

ここで, ベクトル r は, 先に定義したように, 準ピッチ点 P 点を始点とし接触点 Q を終点とするベクトルである。また, V_p は準ピッチ点 P における相対速度である。 V_p は準ピッチ点の定義より準かみあい面に垂直であり, ベクトル n は準かみあい面上にあるから, n は V_p に直交する。したがって, n と V_p の内積は零なる。このとき, 式(31)は次式となる。

$$n \cdot V = w \cdot r \times n = 0 \quad (32)$$

いま, 次式で与えられる条件式を考える。

$$r \times n = 0 \quad (33)$$

この式は, 式(32)式の一つの解であることがわかる。前述のように解は一つであるから, 式(33)は, 式(32)の解となる。したがって, この場合のかみあい条件式は, 最終的に式(33)に変形されることがわかる。

次に, 図 12 に示すように, 接触点 Q を通る準かみあい面 A を考える。あるいは, 準かみあい面 A を考え, 準かみあい面上に接触点 Q を考える。接触点で, 相対速度と準かみあい面上の準ピッチ点を含む平面 B

図 10 A 平面が瞬間軸に平行な場合

図 11 かみあい条件 a

を考える。これは、相対速度とかみあいベクトル $\mathbf{r}$ を含む平面である。前述のように、この場合のかみあい条件は、接触点で平面 B の歯形法線が相対速度に直交することである。この条件を満たす歯形法線は一つ定まる。平面 B 上の歯形の単位法線ベクトルも $\mathbf{n}$ として式で表せば、かみあい条件式(30)、(31)を得る。いま、条件式(33)を考える。この式は、歯形の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ がかみあいベクトル $\mathbf{r}$ 上にのることを表す。 $\mathbf{r}$ は準かみあい面上にあるから、 $\mathbf{r}$ は $\mathbf{V}_p$ に直交する。したがって、 $\mathbf{n}$ も $\mathbf{V}_p$ に直交し、 $\mathbf{n}$ と $\mathbf{V}_p$ の内積は零となる。よって、式(33)は式(31)式の一つの解であることがわかる。解は一つであるから、式(33)は、式(31)の解となる。したがって、この場合のかみあい条件式も、最終的に式(33)に変形されることがわかる。ここで、異なるのは、歯形法線の与え方である。

次に、図 13 に示すように、接触点 Q における歯面法線 N を含む準かみあい面 A を考える。あるいは、準かみあい面 A 上に、接触点と接触点における歯面法線 N がのる歯面を考える。この場合、上記の解法がそのまま成立するが、ここでは、以下の解法をとることにする。かみあい条件は、接触点で歯面法線が相対速度に直交することであると言い替えることができる。接触点を通る準かみあい面を考えた場合、この条件を満たす準かみあい面上の歯面法線は、一般に、この準かみあい面と相対速度に直交する平面との交線として一つ定まる。特別な場合で、この二つの平面が一致する場合は、条件を満たす歯面法線はすべてこの平面上にのる。準ピッチ点を接触点とする場合は、相対速度に直交する平面は準かみあい面に一致する。接触点における歯面法線が準かみあい面上にのる場合、歯面法線 N は、準かみあい面の歯形法線 $\mathbf{n}$ でもある。準かみあい面 A 上の歯形の単位法線ベクトルも $\mathbf{n}$ として式で表せば、かみあい条件式(30)、(32)を得る。いま、条件式(33)を考えれば、式(33)は式(32)の一つの解であることがわかる。前述のように解は一つであるから、

式(33)は、式(32)の解となる。したがって、この場合も、かみあい条件式は式(33)となることがわかる。ここで、異なるのは、歯形法線の与え方である。

以下、接触点 Q と接触点における相対速度を含む準かみあい面 A 上の歯形法線と考えた場合のかみあい条件を、かみあい条件 a と呼ぶ。また、接触点での相対速度と準かみあい面上の準ピッチ点を含む平面上の歯形法線と考えた場合のかみあい条件を、かみあい条件 b と呼ぶ。また、接触点での歯面法線が準かみあい面上にのる場合で、準かみあい面上の歯形法線を考える場合のかみあい条件を、かみあい条件 c と呼ぶ。

5.2 かみあい条件の平歯車的性質 かみあい条件式(33)を言葉で表せば、接触点での歯形法線が準ピッチ点を通ることであるといえる。この表現は、平歯車のかみあい条件の表現と類似している。そこで、これを、かみあい条件の平歯車的表現と呼ぶことにする。A 平面が瞬間軸に平行な場合は、前述のように、準ピッチ点の位置は一定方向へ無限に遠ざかる。したがって、歯車軸の近くでのかみあい条件は、歯形法線が準ピッチ点 P 方向を向くことであると言い替えることができる。これは、かみあい条件 a, b, c 共通である。

次にこのかみあい条件を、前述の準かみあい面(A 平面)上の相対速度の平歯車的性質を用いて導いてみる。前述のようにかみあい条件は、歯形法線が相対速度に直交することであると言い直すことができる。相対速度の平歯車的性質より、準かみあい面上の相対速度は、準ピッチ点 P を通り A 平面に垂直な直線を軸とする円筒群に接するベクトル場を形成する。この性質より、準かみあい面上の接触点と準ピッチ点を通る直線は相対速度に直交することがわかる。ここで、この直線は、歯形を与える平面上にある。したがって、歯面のかみあい条件は、歯形法線がこの直線に一致することであるといえる。これは、歯形法線が、準ピッチ点 P を通ることであるという上の結果を導く。

図 12 かみあい条件 b

図 13 かみあい条件 c

かみあい条件 b, c で, 準ピッチ点 P を接触点とする場合, 歯形法線が準かみあい面上にあれば, 歯形法線が必ず準ピッチ点 P を通りかみあい条件を満たす。したがって, 準ピッチ点 P を接触点とする場合, かみあい条件は, 歯形法線が準かみあい面上にあることであるといえる。この条件は, 接触点における歯面法線が相対速度に直交することであるという, 接触点のかみあい条件の一般的な表現に帰着する。

すべての接触点や歯面に対し, 準かみあい面を与えることができるが, ここでは, 先に準かみあい面を与える場合について考えてみる。いま, 一つの準かみあい面を考え, この上でかみあいを論じることのできる歯面をみでみる。かみあい条件 a の場合は, 準かみあい面 A 上の一つの直線上に接触点を持つ歯面群についてかみあいを論じることができる。かみあい条件 b の場合は, 準かみあい面 A 上に接触点を持つすべての歯面群に対してかみあいを論じることができる。かみあい条件 c の場合は, 準かみあい面 A 上に接触点を持ち歯面法線が準かみあい面上にある歯面群に対してかみあいを論じることができる。すなわち, これらの歯面群に対し, 準かみあい面上の定点である準ピッチ点 P を用い, 平歯車同様一義的にかみあい条件を表すことができるといえる。これを, かみあい条件の一義的性質と呼ぶことにする。また, この性質とかみあい条件の平歯車の表現と合わせて, かみあい条件の平歯車の性質と呼ぶことにする。

ねじ運動平行軸歯車の場合は, 食違い軸歯車と同様の扱いとなる。純回転平行軸歯車の場合も, 食違い軸歯車と同様の扱いとなる。平歯車の場合, 相対速度が準かみあい面にのる領域は線から準かみあい面全領域に広がる。したがって, かみあい条件 a の一義的性質は, 準かみあい面 A 上のすべての点で成り立つ。また, かみあい条件 b はかみあい条件 a に一致する。

5.3 各かみあい条件の特徴 以上 3 種類のかみあい条件を求めたが, 各かみあい条件の特徴をまとめると次のようになる。かみあい条件 a の場合, 一義的性質は, 準かみあい面 A 上の直線上に限定されるが, 扱う歯形が準かみあい面上にある。したがって, かみあい条件 a は, 3 種類のかみあい条件の中で最も平歯

車に近い形といえる。かみあい条件 b の場合, 一義的性質は, 準かみあい面 A 上のすべての点で成立するが, 扱う歯形は一般に準かみあい面 A にのらない。かみあい条件 c の場合, 一義的性質は, 準かみあい面 A 上のすべての点で成立し, 扱う歯形も準かみあい面 A にのるが, 歯面法線が準かみあい面上にのる必要がある。

このように, かみあい条件 a, b, c は, それぞれ異なる特徴をもつ。かみあい条件 c の純回転食違い軸歯車への具体的適用については先に論じている⁽²⁾。準かみあい面上に接触点軌跡線と各接触点での歯面法線がのる歯車系では, かみあい条件 c の一義的性質は特に有効な手段となる⁽³⁾。平行準かみあい面上に接触点と歯面法線がのる歯車系に対しても, かみあい条件 c は有効な手段となる⁽⁴⁾。

6. 結 論

ネジ運動食違い軸歯車に対し, 任意の平面を考え, 平面上での相対速度成分が零の点の位置, この点を中心とした平面上の相対速度場, この点を媒介とした 3 種類のかみあい条件等を求めた。ここで, この平面および相対速度成分が零の点は, 平歯車のかみあい面およびピッチ点に準じた役割を持つ。相対速度場およびかみあい条件は, 平歯車の相対速度場およびかみあい条件に類似している。

結果として, 食違い軸歯車のかみあい条件に関し, 平面を媒介とする平歯車の解法が導かれた。また, この解法に付随する, 平歯車の性質を中心とする諸性質が明らかになった。平歯車の性質は, 平歯車の場合に比べ条件付きとなり, 平歯車の性質と等価に扱えないが, 平歯車の性質に類似した性質といえる。見方を変えれば, この性質は平歯車の性質の食違い軸歯車への拡張であり, 平歯車の性質はこの性質の平歯車への適用であるといえる。

文 献

- (1) 酒井, 機論, 21-102(1955), 170.
- (2) 大竹, 機講論, No. 830-5(1983-3), 195.
- (3) 大竹, 新潟地方講演会講演論文集, (1976-6), 153.
- (4) 大竹, 機講論, No. 760-17(1976-10), 120.