圧電アクチュエータによる平板の 最適アクティブ振動制御*

長 屋 幸 助^{*1}, 山 本 哲 也^{*2}

Analysis of an Optimal Active Vibration Control of a Plate Using Piezoelectric Actuators

Kosuke NAGAYA and Tetsuya YAMAMOTO

This paper discusses a method for the optimal active vibration control of a plate using piezoelectric actuators. The analytical results under the optimal control were obtained by combining the eigenfunction procedure and the optimal active control theory. Numerical calculations were carried out for a clamped circular plate with concentrated masses which was controlled by bending moments generated by the piezoelectric actuators. It is confirmed that there is an optimal location for the actuator in each mode.

Key Words: Dynamics of Machinery, Vibration, Plate, Optimal Control, Optimal Regulator
Piezoelectric Actuator

1. 緒 言

近時騒音対策は種々の機器で重要視されるようになったが、板は剛性が低くかつ面積が大きいため、振動が起こりやすく騒音を発生しやすい発音源となるため、古くよりその振動研究が盛んに行われてきた。最近では材料を粘弾性にする、振動を小さくするように種々の拘束を加えるなどの従来の方法のほかアクチュエータを用いて制振する方法も研究されている⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。とくに背戸ら⁽¹⁾は平板の腹の位置に磁気ダンパを組込んだ動吸振器を設置する制振法を提案した。一方アクティブな構造物の制振法として長南ら⁽²⁾⁽³⁾は圧電アクチュエータによる片持ばりの制御法を提案している。圧電アクチュエータは単に構造物に貼り付けるだけでよいので、施行が簡単であり、かつスペースをほとんどとらないなどの利点があるが、現在のところまだ発生力が不十分な面は否めない。しかしこのアクチュエータの性能は急速に向上しており、平板程度の構造物を制振できるものが開発されるのも間近なことと思われる。本報ではこれらにかんがみ圧電アクチュエータ

により、モーメントを発生させ、それにより平板の振動制御を行う方法を考え、具体的な振動制御の解析を行ったものである。解析には、従来より振動解析に用いられてきた固有関数展開法を板の解析に適用し、まずモード座標に分離した運動方程式を求め、それに現代制御理論を適用して最適制御の解を求める方法を示した。具体例として適当なモデルを設定し、数値計算を行い、この方法により板の制御が可能であることを示し、ついで最適な圧電アクチュエータの設置位置について検討した。

2. 解 析

2・1 解析法 本報では図1に示すような平板の内部に複数の質点がある場合の振動制御問題を解析する。平板の中心に直交座標 x, y および極座標 r, θ の原点をとり、平板表面に対して垂直に z 軸をとる。平板の横振動に対する運動方程式は、極座標 r, θ を用いると次式で与えられる。

$$D\nabla^2\nabla^2w + \rho h(\partial^2w/\partial t^2) = q \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ は板の曲げ剛性、 ∇^2 は二次元のラプラス演算子、 w は z 軸方向の変位、 ρ は密度、 h は板厚、 q は板の振動を制御するための操作力および付加質量等の慣性力、 t は時間、 E はヤング

* 原稿受付 平成2年3月15日。

*¹ 正員、群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1)。

*² 日揮(株) (〒100 東京都千代田区大手町2-2-1)。

率, ν はポアソン比である。

$w=w(r, \theta, t)$, $q=q(r, \theta, t)$ をフーリエ展開すると

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n W_{kn}(r, t) \Phi_{kn} \\ q &= \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n Q_{kn}(r, t) \Phi_{kn} \end{aligned} \quad (2)$$

ここに

$$\begin{aligned} W_{kn}(r, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} X_{ksn}(r) f_{ksn}(t) \\ \varepsilon_0 &= 1/2, \varepsilon_n = 1, (n \geq 1) \quad (3) \\ \Phi_{1n} &= \cos n\theta, \Phi_{2n} = \sin n\theta \end{aligned}$$

であり, $X_{ksn}(r)$, $f_{ksn}(t)$ は s 次モードにおける固有関数および時間関数である。図1のように考えている場の点 $P(r=b_i, \theta=\theta_i, i=1, 2, 3, \dots, N)$ に N 個の質量 m_i の質点があるものとする。式(2)における Q_{kn} は、次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} Q_{kn}(r, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{q}_k \Phi_{kn} d\theta \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{R_{ki}(t)}{\pi b_i} \psi_{kin} \delta(r-b_i) \quad (4) \end{aligned}$$

ここに

$$\psi_{1in} = \cos n\theta_i, \psi_{2in} = \sin n\theta_i \quad (5)$$

であり $\bar{q}_k$ は板の振動を制御するための操作力, R_{ki} は付加質量の慣性力, $\delta(r-b_i)$ はディラックのデルタ関数である。式(1)~(4)より

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} p_s^2 X_{ksn} f_{ksn} + \sum_{s=1}^{\infty} X_{ksn} \frac{d^2 f_{ksn}}{dt^2} \\ = \frac{1}{\rho h} P_{ksn}(r, t) \quad (6) \end{aligned}$$

ここに

$$P_{ksn}(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{q}_{ksn}(r, \theta, t) \Phi_{kn} d\theta \quad (7)$$

であり, $\bar{q}_{ksn}$ は s 次モードの操作力, p_s は s 次の固有円振動数である。さらに固有関数の直交性

図1 解析モデルの座標関係

$$\int_{\Gamma} X_{kqn} X_{ksn} r dr = \begin{cases} e_{ksn}, & s=q \\ 0, & s \neq q \end{cases} \quad (8)$$

より, 式(6)は

$$\frac{d^2 f_{ksn}}{dt^2} + p_s^2 f_{ksn} = \frac{1}{\rho h e_{ksn}} Q_{ksn}(t) \quad (9)$$

ここに, Γ は板の外周境界を表し, 例えば円板の場合の積分式は $\int_0^a$ となる。また

$$Q_{ksn}(t) = \int_{\Gamma} P_{ksn}(r, t) X_{ksn}(r) r dr \quad (10)$$

系に減衰がある場合には式(9)に減衰を取り入れ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_{ksn}}{dt^2} + 2\mu_s \frac{df_{ksn}}{dt} + p_s^2 f_{ksn} \\ = \frac{1}{\rho h e_{ksn}} Q_{ksn}(t) \quad (11) \end{aligned}$$

ここに μ_s は s 次のモード減衰係数である。式(11)は s 次モードの振動に対する運動方程式であり, これよりモードごとに制振が可能であることがわかる。

すなわち, 本制御系における制御対象の運動方程式は式(11)で表される。ここで

$$\begin{aligned} x_1 &= f_{ksn}, x_2 = df_{ksn}/dt = \dot{x}_1 \\ u^0 &= \frac{1}{\rho h e_{ksn}} Q_{ksn} \quad (12) \end{aligned}$$

とし, 式(11)を状態方程式に直すと

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u^0(t) \quad (13)$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_s^2 & -2\mu_s \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(t) &= [x_1 \ x_2]^T, \dot{\mathbf{x}}(t) = d\mathbf{x}/dt \quad (14) \end{aligned}$$

評価関数 J は変位と操作力を最小とするように次式のようにおく。

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \tilde{r} u^0(t)^2] dt \quad (15)$$

ここに

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

また $\mathbf{Q}$ は状態変数 x_1, x_2 間の相対的な重みを示し $\tilde{q}_1/\tilde{r}, \tilde{q}_2/\tilde{r}$ は各変数と入力との相対的な重みを表す。

本系は1入力システムであるからカルマン方程式を用いて解くことができ, 最適制御入力 $u^0(t)$ は, 最適フィードバックベクトル $\mathbf{f}^0 = [\tilde{f}_1 \ \tilde{f}_2]$ を用いて, 次式で示される。

$$u^0(t) = -\mathbf{f}^0 \mathbf{x}(t) \quad (17)$$

カルマン方程式を解いて, 最適極の二乗は

$$\begin{aligned} s^2 &= 0.5 \{ -2p_s^2 + 4\mu_s^2 + \tilde{q}_2/\tilde{r} \\ &\pm \sqrt{(2p_s^2 - 4\mu_s^2 - \tilde{q}_2/\tilde{r})^2 - 4(p_s^4 + \tilde{q}_1/\tilde{r})} \} \quad (18) \end{aligned}$$

となり、実部が負である 2 根を λ_1, λ_2 とする。また、最

適フィードバック係数 $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ は

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1 &= (\lambda_1 \lambda_2 - p_s^2) \\ \tilde{f}_2 &= (-\lambda_1 - \lambda_2 - 2\mu_s)\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

さらに、状態量の応答は次式で与えられる。

$$\mathbf{x}(t) = \exp[(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{f}^0)t]\mathbf{x}(0) \quad \dots\dots\dots (20) \quad \text{ここに}$$

ここで、 $\lambda_1 = \lambda_{ksn}^1, \lambda_2 = \lambda_{ksn}^2$ とモードごとの最適極に書き換えると、平板の変位 $w(r, \theta, t)$ および速度 $\dot{w}(r,$

$$\begin{aligned}w &= \sum_{k=1}^2 \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X_{ksn}(r) f_{ksn}(t) \Phi_{kn} \\ \dot{w} &= \sum_{k=1}^2 \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X_{ksn}(r) \dot{f}_{ksn}(t) \Phi_{kn}\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned}f_{ksn}(t) &= \{[\lambda_{ksn}^2 \exp(\lambda_{ksn}^1 t) - \lambda_{ksn}^1 \exp(\lambda_{ksn}^2 t)] \bar{w} + [-\exp(\lambda_{ksn}^1 t) + \exp(\lambda_{ksn}^2 t)] \bar{v}\} / (\lambda_{ksn}^2 - \lambda_{ksn}^1) \\ \dot{f}_{ksn}(t) &= [\lambda_{ksn}^1 \lambda_{ksn}^2 \{\exp(\lambda_{ksn}^1 t) - \exp(\lambda_{ksn}^2 t)\} \bar{w} + \{-\lambda_{ksn}^1 \exp(\lambda_{ksn}^1 t) + \lambda_{ksn}^2 \exp(\lambda_{ksn}^2 t)\} \bar{v}] / (\lambda_{ksn}^2 - \lambda_{ksn}^1)\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (22)$$

であり、 $\bar{w}, \bar{v}$ は平板の初期条件により決定される係数である。

2・2 円板の制振 次一例として外周固定された半径 a の円板をとりあげ、制振問題を解析する。

円板の自由振動において変位 W_{kn} および点 i における質点の力 R_{ki} は

$$W_{kn}(r, t) = X_{kn}(r) \exp(ipt), R_{ki}(t) = F_{ki} \exp(ipt) \quad \dots\dots\dots (23)$$

と表すことができる。ここに、 F_{ki} は質点と板との連続条件により決定される未知定数である。

式(2)、(4)、(23)を式(1)に代入し板が中実であることを考慮し、まず同次解を求め、続いて特解をラグランジュの定数変化法を適用して求めそれを足し合せると一般解が求められる。すなわち

$$\begin{aligned}X_{kn}(r) &= A_{kn} J_n(ar) + B_{kn} I_n(ar) + \frac{1}{4D\alpha^2} \sum_{i=1}^N F_{ki} \{J_n(ar) Y_n(ab_i) - Y_n(ar) J_n(ab_i)\} \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \{I_n(ar) K_n(ab_i) - K_n(ar) I_n(ab_i)\} u(r - b_i) \Psi_{kin} \quad \dots\dots\dots (24)\end{aligned}$$

ここに

$$\alpha^4 = \frac{\rho h p^2}{D}, u(r - b_i) = \begin{cases} 1, & (r \geq b_i) \\ 0, & (r < b_i) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (25)$$

であり A_{kn}, B_{kn} は積分定数、 $J_n(ar)$ は n 次の第一種ベッセル関数、 $Y_n(ar)$ は n 次の第二種ベッセル関数、 $I_n(ar)$ は n 次の第一種変形ベッセル関数、 $K_n(ar)$ は n 次の第二種変形ベッセル関数であり、 $u(r - b_i)$ は単位ステップ関数である。円板の外周は完全に固定されている場合を考えると、その境界条件は

$$(X_{kn})_{r=a} = 0, (\partial X_{kn} / \partial r)_{r=a} = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

であり、式(24)を式(26)に代入すると

$$X_{kn}(r) = \sum_{i=1}^N \frac{F_{ki} a^2}{4D\Delta \alpha^2} \{G_{1kin}(\bar{\alpha}) J_n(\bar{\alpha} \eta) + G_{2kin}(\bar{\alpha}) I_n(\bar{\alpha} \eta) + G_{3kin}(\bar{\alpha} \eta)\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに

$$\begin{aligned}\Delta &= E_{1n}(\bar{\alpha}) I_n(\bar{\alpha}) - E_{2n}(\bar{\alpha}) J_n(\bar{\alpha}), E_{1n}(\bar{\alpha}) = J_{n-1}(\bar{\alpha}) - (n/\bar{\alpha}) J_n(\bar{\alpha}), E_{2n}(\bar{\alpha}) = I_{n-1}(\bar{\alpha}) - (n/\bar{\alpha}) I_n(\bar{\alpha}) \\ E_{3n}(\bar{\alpha}) &= Y_{n-1}(\bar{\alpha}) - (n/\bar{\alpha}) Y_n(\bar{\alpha}), E_{4n}(\bar{\alpha}) = K_{n-1}(\bar{\alpha}) + (n/\bar{\alpha}) K_n(\bar{\alpha}) \\ G_{1kin}(\bar{\alpha}) &= E_{2n}(\bar{\alpha}) C_{1kin}(\bar{\alpha}) - I_n(\bar{\alpha}) C_{2kin}(\bar{\alpha}), G_{2kin}(\bar{\alpha}) = J_n(\bar{\alpha}) C_{2kin}(\bar{\alpha}) - E_{1n}(\bar{\alpha}) C_{1kin}(\bar{\alpha}) \\ G_{3kin}(\bar{\alpha} \eta) &= \Delta \{J_n(\bar{\alpha} \eta) Y_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i) - Y_n(\bar{\alpha} \eta) J_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i)\} + \frac{2}{\pi} \{I_n(\bar{\alpha} \eta) K_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i) - K_n(\bar{\alpha} \eta) I_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i)\} u(\eta - \bar{b}_i) \Psi_{kin} \\ C_{1kin}(\bar{\alpha}) &= \{J_n(\bar{\alpha}) Y_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i) - Y_n(\bar{\alpha}) J_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i)\} + \frac{2}{\pi} \{I_n(\bar{\alpha}) K_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i) - K_n(\bar{\alpha}) I_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i)\} \Psi_{kin} \\ C_{2kin}(\bar{\alpha}) &= \{E_{1n}(\bar{\alpha}) Y_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i) - E_{3n}(\bar{\alpha}) J_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i)\} + \frac{2}{\pi} \{E_{2n}(\bar{\alpha}) K_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i) + E_{4n}(\bar{\alpha}) I_n(\bar{\alpha} \bar{b}_i)\} \Psi_{kin} \\ \bar{\alpha} &= \alpha a, \eta = r/a, \bar{b}_i = b_i/a \quad \dots\dots\dots (28)\end{aligned}$$

一方、 m_j の質点と板との連続条件は

$$\sum_{k=1}^2 R_{kj} = m_j p^2 (w)_{r=b_j, \theta=\theta_j}, (j=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (29)$$

式(2)、(6)を式(29)に代入すると、固有値 $\bar{\alpha}$ を求めるための振動数方程式は

$$\begin{vmatrix} H_{k11}-1 & \cdots & H_{k1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{kN1} & \cdots & H_{kNN}-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots \cdots (30)$$

ここに

$$H_{kji} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \bar{m}_j \bar{a}^2}{4\Delta} \{ G_{1kjin}(\bar{a}) J_n(\bar{a} \bar{b}_j) + G_{2kjin}(\bar{a}) I_n(\bar{a} \bar{b}_j) + G_{3kjin}(\bar{a} \bar{b}_j) \} \Psi_{kjin} \quad \cdots \cdots (31)$$

$$\bar{m}_j = \frac{m_j}{\rho h a^2}$$

式(30)より固有値 $\bar{a}$ が求められる。それらの第 s 次の固有値を $\bar{a}_s$ とおく。よって固有関数 $X_{ksn}(r)$ は、式(27)より

$$X_{ksn}(r) = \sum_{i=1}^N \frac{F_{kisi} \bar{a}_s^2}{4D\Delta \bar{a}_s^2} \left\{ G_{1kisin}(\bar{a}_s) J_n(\bar{a}_s \eta) + G_{2kisin}(\bar{a}_s) I_n(\bar{a}_s \eta) + G_{3kisin}(\bar{a}_s \eta) \right\} \quad \cdots \cdots (32)$$

以上本報では極座標 r, θ を用い、円板についての具体的解析例を示したが、長方形板等のように直交座標 x, y で表される場合も固有関数が求められれば、式(20)より応答が決定される。

3. 数値計算例(1)

本報では具体例として図2に示すモデルを考え質点の質量を同一に設定し、円板形状および質点状態の対

図2 数値計算モデル

称性を利用して計算を行った。すなわち $k=1$ についてのみ、また変位に対して影響の大きい軸対称一次および節直径1を有する二次の応答を考える。計算に用いた物理的諸定数は、 $E=206 \text{ GPa}$, $\rho=7.86 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$, $\nu=0.28$, $a=1.0 \times 10^2 \text{ mm}$, $h=0.6 \text{ mm}$, $m_i=2.4 \times 10^{-2} \text{ kg}$, $b_1=6.0 \text{ mm}$, $\theta_1=0^\circ$, $b_i=50.0 \text{ mm}$, $\theta_i=45^\circ + (i-2) \times 90^\circ (i=2, 3, 4, 5)$ とする。また一次および二次の減衰比を $\zeta_1=0.051$, $\zeta_2=0.081$ とする。以上の値を用い、本解析結果に基づき数値計算を行う。まず一次および二次の固有値 $\bar{a}_s$ は式(23)より求められ、 $\bar{a}_1=2.452$, $\bar{a}_2=3.538$ である。点 P_1 に、 $w=0.0 \text{ mm}$, $\dot{w}=157.0 \text{ mm/s}$ 、あるいは点 P_2 に $w=0.0 \text{ mm}$, $\dot{w}=168.2 \text{ mm/s}$ を初期条件として与えた場合の変位の時間応答を図3に示す。図中実線は点 P_1 、破線は点 P_2 における応答を表す。図3(a)は非制御時、(b)は変位に関する重みである $\bar{q}_1$ に重みをおき、(c)は速度に関する重み $\bar{q}_2$ に重みをおいている。図3から $\bar{q}_2$ に対し、 $\bar{q}_1$ に重みをおいてもほとんど影響が現れないのがわかる。

図4は非制御時および制御時 ($\bar{q}_1=10.0$, $\bar{q}_2=50.0$, $\bar{r}=0.002$) の $t=2, 9, 14 \text{ ms}$ の x 軸上のたわみ曲線である。時間の経過とともに二次の影響が小さくなるのがわかる。これは一次振動に比べ二次振動のほうが振動数が高いためより速く減衰するためである。

4. ドライバの構成法

本報の制御法の具体的適用例として図5に示すような圧電アクチュエータの配置により制振される円板を考える。圧電アクチュエータを図5のように半径方向に配置するものとし、その両端における s 次モードの操作モーメントを T_{ksn} とすると式(7)より

$$P_{ksn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{T_{ksn}}{r_a} \delta'(r-r_a) \delta(\theta-\beta) - \frac{T_{ksn}}{r_b} \delta'(r-r_b) \delta(\theta-\beta) \right\} \Phi_{knd} d\theta \quad \cdots \cdots (33)$$

(a) 非制御時 (b) 制御時 ($\bar{q}_1=100.0$, $\bar{q}_2=10.0$, $\bar{r}=0.002$) (c) 制御時 ($\bar{q}_1=10.0$, $\bar{q}_2=100.0$, $\bar{r}=0.002$)

図3 変位の時間応答 [—: 点 P_1 の場合, ---: 点 P_2 の場合]

ここに、 $\delta'(r-r_a)$, $\delta'(r-r_b)$ はダブレット関数である。

式(33)を式(10)に代入すると

$$Q_{ksn}(t) = \frac{T_{ksn}}{\pi} \left\{ \frac{X_{ksn}(r_a) + r_a X'_{ksn}(r_a)}{r_a} - \frac{X_{ksn}(r_b) + r_b X'_{ksn}(r_b)}{r_b} \right\} \bar{\Phi}_{ksn} \dots\dots\dots (34)$$

ここに

$$X'_{ksn}(r) = \frac{d}{dr} X_{ksn}(r) \\ \bar{\Phi}_{1n} = \cos n\beta, \bar{\Phi}_{2n} = \sin n\beta \dots\dots\dots (35)$$

式(12), (17), (34)より

$$T_{ksn}(t) = -\{\pi \rho h e_{ksn}(\tilde{f}_1 x_1 + \tilde{f}_2 x_2)\} \\ / \left[\left\{ \frac{X_{ksn}(r_a) + r_a X'_{ksn}(r_a)}{r_a} - \frac{X_{ksn}(r_b) + r_b X'_{ksn}(r_b)}{r_b} \right\} \bar{\Phi}_{ksn} \right] \dots\dots\dots (36)$$

また、圧電アクチュエータの操作モーメント $T_{ksn}(t)$ と制御電圧 $V_{ksn}(t)$ の関係は

$$T_{ksn}(t) = K_p V_{ksn}(t) \dots\dots\dots (37)$$

ここに、 K_p は圧電アクチュエータによって決まる定数である。

式(36), (37)より

$$V_{ksn}(t) = -A_{ksn}(\tilde{f}_1 x_1 + \tilde{f}_2 x_2) \\ = -A_{ksn}\{\tilde{f}_{ksn}^1 f_{ksn}(t) + \tilde{f}_{ksn}^2 \dot{f}_{ksn}(t)\} \dots\dots\dots (38)$$

(a) 非制御時

(b) 制御時 ($\bar{q}_1=10.0$, $\bar{q}_2=50.0$, $\bar{r}=0.002$)

図 4 x 軸上の変位分布

(—: $t=2$ ms, ---: $t=9$ ms, - - - - : $t=14$ ms)

ここに

$$A_{ksn} = (\pi \rho h e_{ksn} / K_p) \\ / \left[\left\{ \frac{X_{ksn}(r_a) + r_a X'_{ksn}(r_a)}{r_a} - \frac{X_{ksn}(r_b) + r_b X'_{ksn}(r_b)}{r_b} \right\} \bar{\Phi}_{ksn} \right] \dots\dots\dots (39)$$

であり、 $\tilde{f}_{ksn}^1$, $\tilde{f}_{ksn}^2$ はモードごとのフィードバック係数である

いま、一例として図 6 に示すように圧電アクチュエータを x 軸上に対称に 2 個配置すると、最適フィードバック入力に対称性が得られる。ゆえに $k=1$ について一次および二次モードについて考え、近似的に ($n=0, s=1$), ($n=1, s=2$) の組合せ、すなわち各モードの支配モードのみを考慮すると、圧電素子①, ②に加えられる操作モーメント M_{p1} , M_{p2} および制御電圧 V_{p1} , V_{p2} は

$$M_{p1} = (1/2)\{T_{110}(t) + T_{121}(t)\}_{\beta=0} \\ M_{p2} = (1/2)\{T_{110}(t) + T_{121}(t)\}_{\beta=\pi} \\ V_{p1} = (1/2)\{V_{110}(t) + V_{121}(t)\}_{\beta=0} \\ V_{p2} = (1/2)\{V_{110}(t) + V_{121}(t)\}_{\beta=\pi} \dots\dots\dots (40)$$

図 5 圧電アクチュエータを用いたドライバのモデル

図 6 2 個の圧電アクチュエータを用いたドライバのモデル

となる。

5. 数値計算例(2)

以上の構成により数値計算を行った。計算に用いた各諸量は、 $K_p=0.069\ 69\ \text{N}\cdot\text{mm}/\text{volt}$, $r_a=57.0\ \text{mm}$, $r_b=90.0\ \text{mm}$ とする。数値計算例(1)と同様に質点1, 2にそれぞれ $w=0\ \text{mm}$, $\dot{w}=157.0\ \text{mm}/\text{s}$ および $w=0\ \text{mm}$, $\dot{w}=168.2\ \text{mm}/\text{s}$ の初期条件が与えられたとする。このときの制御電圧 V_{P1} , V_{P2} および操作モーメント M_{P1} , M_{P2} の $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)=(10.0, 50.0)$, $(100.0, 50.0)$, $(10.0, 100.0)$, $\bar{r}=0.002$ と重みを変化させたときの時間変動を図7, 8に示す。図7, 8の(a), (b)を比較しても明らかなように変位 w のときと同様、速度に対する重み $\bar{q}_2$ より変位に対する重み $\bar{q}_1$ に重さを付けても制御出力にはあまり影響がないのがわかる。それに対して速度に関する重み $\bar{q}_2$ に、より重みを付けると図3で示されるように速やかに収束するが、そのかわり制御電圧、操作モーメントに大きな振れ幅を持つことが図7(c), 図8(c)よりわかる。また圧電アクチュエータ1, 2の制御電圧、操作モーメントに二次振動の影響が小さいのは二次振動の振幅が小さいことに加え、減衰が一次振動に比べ速いためと考えられる。

また $\bar{r}_{ab}=(r_a+r_b)/2a$, $\bar{r}=(r_b-r_a)/a$ とおき圧電

アクチュエータの x 軸上での位置ならびに圧電アクチュエータの長さがゲイン A_{1sn} に与える影響を図9に示す。図9において実線、破線、一点鎖線はそれぞれ圧電アクチュエータの長さを $33.0\ \text{mm}$, $40.0\ \text{mm}$, $50.0\ \text{mm}$ としたものである。図9より明らかなように一次モードに対するゲイン A_{110} は円板中心近くへアクチュエータを配置したほうが低い倍率で大きな制御モーメントが得られ、それに対し二次モードについては円板の端のほうへアクチュエータを配置したほうが有効であり、また一次、二次とも圧電アクチュエータの長さが長いほうがより効率的な制御が得られることがわかる。

6. 結 言

本報は内部に複数の質点を有する平板の振動をモーメントにより、制御する方法を提案し、その解析法を示したものである。

(1) 圧電アクチュエータ等によるモーメントによる平板の振動制御の問題を現代制御理論と固有関数展開法を用いて解析した。

(2) 適当な具体例を設定し、数値計算を行ったところ、理論的には強力な圧電アクチュエータがあれば、平板の振動をアクティブに制御できることがわかった。

図7 操作モーメント M_{P1} , M_{P2} の時間変動

図8 制御電圧 V_{P1} , V_{P2} の時間変動

図 9 アンプ倍率とアクチュエータの位置の関係 [—: $t=0.33$, ---: $t=0.40$, - · - · -: $t=0.50$]

(3) アクチュエータの配置場所, 長さ等については最適値が存在し, これらを考慮してアクチュエータを用いると, 最適な制御ができることがわかった。すなわち円板においては, 一次モードについては中心付近に, ひとつの節直径を有する二次モードについては, 円板の端側にアクチュエータを配置するのが有利であり, また長さもある程度長いほうが有利であることがわかった。

文 献

- (1) 山下・ほか 3 名, 52-484, C(1986), 3191-3197.
- (2) 谷・長南・ほか 4 名, 機講論, No. 890-26(1989-6), 154-155.
- (3) 長南・谷・ほか 1 名, 文献(2)の 156-157 ページ.
- (4) Bailey, T. and Hubbard, J. E. Jr., *J. Guidance, Control and Dynamics*, 8-5(1985), 605.