任意形状の外周境界を有し内部に複数の任意 形状偏心境界を有するヘルムホルツ方程式の固有値解析*

長 屋 幸 助^{*1}, 山 口 俊 澄^{*2}

Analysis of Eigenvalue Problems of the Helmholtz Equation with an Arbitrarily Shaped Outer Boundary and a Number of Eccentric Inner Boundaries of Arbitrary Shape

Kosuke NAGAYA and Toshizumi YAMAGUCHI

This paper presents a method for solving eigenvalue problems of various phenomena which are governed by the Helmholtz equation with an arbitrarily shaped outer boundary and a number of eccentric boundaries of arbitrary shape. In the analysis, the outer boundary condition is satisfied by means of the Fourier expansion collocation method using the exact solution of the equation of motion. To satisfy the inner boundary conditions, the point restraints are added to the equation of motion, and the inner boundary conditions are satisfied by making use of a point-matching procedure. The equations for finding the eigenvalues are derived, and numerical calculations are carried out for cases of elliptical outer and a number of elliptical inner boundaries, and polygonal outer and a number of elliptical inner boundaries.

Key Words: Helmholtz Equation, Eigenvalue, Vibration, Arbitrary Shape, Multiboundaries, Membrane, Waveguide, Diffusion of Neutrons, Polygonal Boundary, Elliptical Boundary

1. 結 言

ヘルムホルツ方程式で表される物理現象は非常に多く、特にその固有値問題の結果は膜の振動、単純支持板の振動、導波管、核拡散等の多くの分野に応用できる。そのためこの問題に対する解析は古くから注目され、多くの研究者により取扱われてきた^{(1)~(21)}。しかし内部に複数の境界を有する場合は、基礎方程式の解の数と境界条件の数が不一致となるので通常の境界値問題の解法は適用できないため、取扱われた例は非常に少なく、偏心円形境界を有する円形膜の振動解析が報告されているにすぎない⁽²¹⁾。特に内、外部の境界が異形の場合を解析した例は見受けられない。

本報ではこれらにかんがみ、内、外部の境界がともに任意形状でかつ内部に複数の偏心境界を有する問題を扱い、ヘルムホルツ方程式で表される物理現象のすべての固有値問題に適用できる一般解を誘導する。解析では外周の境界処理にフーリエ展開境界値平均法^{(8)~(10)}を適用し、内部の境界処理には場の対称性を考慮した選点法⁽²¹⁾を適用し、ヘルムホルツ方程式の

厳密解を用いて固有値を求める方程式を誘導した。

ついで具体例として外周が円形、正多角形で内部に2個あるいは4個の同大等配置の偏心円形境界を有する場合の三つを取り上げ数値計算を行い、それぞれの結果をモードごとに分類して図示した。

2. 解 析

ヘルムホルツ方程式は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \Phi = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

で与えられる。ここに r, θ は考えている場の極座標であり、 Φ はスカラー量、 α は固有値で定数である。この方程式は膜の振動、単純支持板の振動、導波管のカットオフ値、原子核の拡散などの問題の基礎方程式であり、固有値 α はそれぞれの問題に対して共通であるが、物理的意味のみが異なる [文献(1)~(20)]。例えば最も一般的な膜の振動では、 $\alpha^2 = \rho \omega^2 / T$ であり、 ω は固有円振動数、 ρ は膜の面密度、 T は張力、 Φ は膜の変位となる。本報では内部に多数の境界を有する場合を扱うので、式(1)を用いて直接固有値を求めることはできない。そこで本解析では式(1)に多数の点拘束を与え、選点法により境界条件を満足させることとする。すなわち図1のように考えている場の点P(r

* 原稿受付 平成2年5月7日。

^{*1} 正員、群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1)。

^{*2} 本田技研工業(株) (〒107 東京都港区南青山2-1-1)。

$=b_i, \theta=\theta_i, i=1, 2, \dots, I)$ に I 個の点拘束があるとすると、基礎方程式(1)は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \Phi = q \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに

$$q(r, \theta) = -\sum_{i=1}^I R_i \delta(r-b_i) \delta(\theta-\theta_i) \quad \dots\dots\dots (3)$$

であり、 R_i は内部の境界条件により決定される未定定数、 $\delta(r-b_i), \delta(\theta-\theta_i)$ はディラックのデルタ関数である。式(2)の一般解をラグランジェの定数変化法を適用して求めると

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) = & \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n [A_{jn} J_n(ar) \\ & + (\pi/2) \int_0^r q_{jn}(\xi) \{Y_n(ar) J_n(a\xi) \\ & - J_n(ar) Y_n(a\xi)\} \xi d\xi] \phi_{jn} \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} q_{jn}(r) = & (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} q(r, \theta) \phi_{jn} d\theta \\ \varepsilon_0 = & 1/2, \varepsilon_n = 1, (n \geq 1) \quad \dots\dots\dots (5) \\ \phi_{1n} = & \cos n\theta, \phi_{2n} = \sin n\theta \end{aligned}$$

であり、 A_{jn} は積分定数、 $J_n(ar), Y_n(ar)$ はそれぞれ n 次の第一種および第二種ベッセル関数である。いま考えている場が X 軸に対称な場合、解析は X 軸に対称なモードと反対称なモードに分離して取扱うことができ、対称な場合は $j=1$ で与えられ、反対称な場合は $j=2$ で与えられる。式(5)を式(4)に代入すると

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{j=1}^2 \Phi_j \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに

$$\begin{aligned} \Phi_j = & \sum_n \varepsilon_n [A_{jn} J_n(ar) \\ & - (1/2) \sum_{i=1}^I b_i R_{ji} \{Y_n(ar) J_n(ab_i) \\ & - J_n(ar) Y_n(ab_i)\} u(r-b_i) \psi_{jin}] \phi_{jn} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

図 1 外周境界の形状が任意で内部が点拘束された場合の座標関係

$$\psi_{1in} = \cos n\theta_i, \psi_{2in} = \sin n\theta_i \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$u(r-b_i) = \begin{cases} 1, & (r \geq b_i) \\ 0, & (r < b_i) \end{cases}$$

であり、 $u(r-b_i)$ は単位ステップ関数である。また拘束を表す定数 R_i は式(5)の q_{1n} に対するものと q_{2n} に対するものが異なるので R_{ji} においてある。境界条件として最も一般的な Dirichlet の境界条件を考えると境界条件は

$$(\Phi)_r=0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

であり、 Γ は外部の境界周を表す。外周境界は任意形状であるから、この条件を満足させることは一般に困難である。本解析では任意形状の境界条件を満足させるため、フーリエ展開境界値平均法^{(8)~(10)}を適用する。すなわち任意形状の境界線分に沿って境界までの極座標を角度 θ の関数で表し、境界に沿って境界条件をフーリエ展開し、級数形式で境界条件を満足させることとする。外周境界の Φ を境界に沿ってフーリエ展開すると

$$\begin{aligned} \Phi_j = & \sum_m \sum_n \varepsilon_m A_{jm} (S_{jnm} - \sum_{i=1}^I b_i R_{ji} T_{jinm}) \phi_{jm} \\ = & 0 \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = & 1/2, \varepsilon_m = 1, (m \geq 1) \\ \phi_{1m} = & \cos m\theta, \phi_{2m} = \sin m\theta \\ S_{jnm} = & (2\varepsilon_n/\pi) \int_0^\pi J_n(ar_r) \phi_{jn} \phi_{jm} d\theta \\ T_{jinm} = & (\varepsilon_n/\pi) \int_0^\pi \{Y_n(ar_r) J_n(ab_i) \\ & - J_n(ar_r) Y_n(ab_i)\} \psi_{jin} \phi_{jn} \phi_{jm} d\theta \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

であり、 r_r は角度 θ の関数として表される外周境界の極座標 r の値である。本報では場に一軸以上の対称軸が存在する場合を取扱ったが完全な非対称の場合は正弦項と余弦項を足したままでフーリエ展開を $0 \sim 2\pi$ の区間で行えばよい。式(10)は無級数となっているので級数を $j=1$ については $N+1(m, n=0, 1, 2, \dots, N)$ 項、 $j=2$ については $N(m, n=1, 2, 3, \dots, N)$ 項までとすると未定定数 A_m を決定する方程式がマトリックス形式で次のように求められる。

$$\begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{11} \\ \vdots \\ A_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^I b_i R_{1i} \sum_n T_{1in0} \\ \sum_{i=1}^I b_i R_{1i} \sum_n T_{1in1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^I b_i R_{1i} \sum_n T_{1inN} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^I b_i R_{2i} \sum_n T_{2in'1} \\ \sum_{i=1}^I b_i R_{2i} \sum_n T_{2in'2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^I b_i R_{2i} \sum_n T_{2in'N} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

ここに

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} S_{100} & S_{110} & \dots & S_{1N0} \\ S_{101} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ S_{10N} & & & S_{1NN} \end{vmatrix}$$

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} S_{211} & S_{221} & \dots & S_{2N1} \\ S_{212} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ S_{21N} & & & S_{2NN} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

式(13), (14)より, 未定定数 A_{jn} は次式のように求められる.

$$A_{jn} = \sum_{i=1}^I b_i R_{ji} E_{jin} \dots\dots\dots (15)$$

ここに

$$E_{jin} = \sum_m (\sum_n T_{jin'm}) |D_{jmn}| / |\Delta_j| \dots\dots\dots (16)$$

であり, $|D_{jmn}|$ は行列式 $|\Delta_j|$ の余因数である. 式(15)を式(7)に代入すると

$$\begin{aligned} \phi_j = & \sum_{i=1}^I b_i R_{ji} \sum_n \epsilon_n [E_{jin} J_n(ar) \\ & - (1/2) \{ Y_n(ar) J_n(ab_i) \\ & - J_n(ar) Y_n(ab_i) \} u(r-b_i) \phi_{jin}] \phi_{jn} \dots\dots (17) \end{aligned}$$

一方内部の境界線を点の集合で表すこととし, 境界線全体を I 個の点で近似すると, 任意の点 s での境界条件は

$$(\phi)_{r=b_s, \theta=\theta_s} = 0, \quad s=1, 2, \dots, I \dots\dots\dots (18)$$

式(6)を式(18)に代入すると

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^I b_i R_{ji} \sum_n Q_{jnsi} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

ここに

$$\begin{aligned} Q_{jnsi} = & \epsilon_n [E_{jin} J_n(ab_s) \\ & - (1/2) \{ Y_n(ab_s) J_n(ab_i) \\ & - J_n(ab_s) Y_n(ab_i) \} \\ & \times u(b_s-b_i) \phi_{jin}] \phi_{jns} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

式(19)より固有値を求める方程式はサイズ $(2I \times 2I)$ の行列式であることがわかる. 式(19)は選点法による一般解で, これにより内部が多数の点で拘束される場合の固有値を原理的には求めることができる. しかし点数が増加すると急激に数値誤差が累積されるので, 内部境界が多数の場合, 直接式(19)を用いて計算することは困難なように思われる. 本報ではこの問題に対し場の対称性を利用して固有値を求める方法を以下に具体例を示して説明する.

3. 数値計算例

3・1 外周がだ円形で内部に1個の偏心だ円形境界を有する場合 [図2(a)参照] 外周境界が長軸 $2a$, 短軸 $2c$ のだ円形である場の内部に偏心量 e , 長軸 $2f$, 短軸 $2g$ のだ円形境界が1個ある場合を考える. 場の中心を座標の原点 O とし, 外周境界の極座標 r の値を r_1 とすると, r_1 は次のようになる.

$$r_1(\theta)/a = [1/\{\cos^2\theta + (a^2/c^2)\sin^2\theta\}]^{1/2} \dots\dots (21)$$

内部だ円形境界の中心から内部境界周までの長さを r_2 とすると r_2 は角度 γ_s を与えることにより次のように求められる.

$$r_2/a = [(f/a)^2 / \{1/\cos^2\gamma_s + (f/g)^2 \sin^2\gamma_s\}]^{1/2} \dots\dots\dots (22)$$

これらより内部境界周上の一点 s の極座標 b_s, θ_s は

$$\begin{aligned} b_s/a = & [(r_2/a)^2 + 2(r_2/a)(e/a)\cos\gamma_s \\ & + (e/a)^2]^{1/2} \\ \theta_s = & \cos^{-1}[(e/a)/(b_s/a) \\ & + \{(r_2/a)/(b_s/a)\}\cos\gamma_s] \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

となる. この場合外周境界, 内部境界ともに X 軸に関して対称であるので, 内部境界については上半面を考えればよいことになる. すなわち, X 軸に対称なモー

図2 外周がだ円形で内部に複数の偏心だ円形境界を有する場合の座標関係

ド(以下これをSモードと称する)については

$$\sum_{i=1}^I b_i R_{1i} \left(\sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} Q_{1nsi} \right) = 0$$

$$s=1, 2, \dots, I \dots\dots\dots (24)$$

となり, X 軸に反対称なモード(以下これをAモードと称する)については

$$\sum_{i=1}^I b_i R_{2i} \left(\sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} Q_{2nsi} \right) = 0$$

$$s=1, 2, \dots, I \dots\dots\dots (25)$$

となり, サイズ($I \times I$)の行列式の根を求めればよいことになる。

外周が円形($a/c=1.0$)で内部に1個の偏心円形境界($f/g=1.0$)を有する場合の固有値 aa を表1に示す。表中 Fourier Coll. は長屋⁽⁸⁾⁽²¹⁾がフーリエ展開境界値平均法により求めた結果であり, 点数については内部境界周の半分の領域を10点で近似した場合と15点で近

表1 外周が円形で内部に1個の偏心円形境界を有する場合の固有値 aa に対する本解とフーリエ展開境界値平均法による解との比較 [$a/c=1.0$, $f/a=0.3$, $f/g=1.0$, 図2(a)参照]

e/a		Mode			
		S1	S2	S3	S4
0.2	Fourier Coll.	3.789	5.104	6.022	6.765
	Ten points	3.781	5.129	6.056	6.787
	Fifteen points	3.796	5.138	6.062	6.791
0.4	Fourier Coll.	3.276	5.008	6.288	6.429
	Ten points	3.280	5.044	6.279	6.478
	Fifteen points	3.293	5.051	6.305	6.485

表2 外周が円形で内部に2個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と偏心量 e/a の関係 [$a/c=1.5$, $f/g=1.5$, 図2(b)参照]

f/a	e/a	SS1	SS2	SA1	AS1	AA1
0		3.059	5.761	4.373	5.317	6.507 (3.0655)
0.1	0	4.120	6.272	4.495	5.465	6.515
	0.2	4.901	6.252	5.180	5.590	6.661
	0.4	4.464	6.677	6.292	5.486	6.839
	0.5	3.959	7.361	6.301	5.435	6.834
	0.6	3.614	7.530	5.782	5.391	6.760
	0.8	3.235	6.720	4.910	5.336	6.592
	1.0	3.084	5.942	4.457	5.319	6.515
0.2	0	4.658	6.590	4.815	5.857	6.611
	0.2	5.724	6.695	5.882	6.207	7.076
	0.4	5.434	7.898	7.409	5.873	7.525
	0.5	4.649	7.850	7.274	5.665	7.415
	0.6	4.059	7.708	6.665	5.512	7.142
	0.8	3.411	7.436	5.368	5.367	6.712
	1.0	3.143	6.288	4.643	5.325	6.542

似した場合の本解の二例を示している。表中S1, S2, ...はSモードの第一次, 第二次, ..., 固有値を表す。表より10点程度の近似で本解の結果とフーリエ展開境界値平均法により求めた結果とはよく一致しており実用上必要な精度は得られることがわかる。したがって本報では収束を検討してフーリエ級数の項数($n=0 \sim \infty$)を7項, 点数については内部境界周の半分の領域を近似する場合は10点, 内部境界全周を近似する場合は20点として以下の計算を行った。

3.2 外周が円形で内部に2個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合 [図2(b)参照] 図2(b)のように内部だ円形境界が Y 軸に対称に2個ある場合を考える。この場合考えている場合は X 軸, Y 軸に対してそれぞれ対称であるのでこの数値計算は XOY の第一現象のみを考えればよいことになり, また b_s , θ_s と γ_s の関係は式(24)である。すなわち X 軸と Y 軸の両軸に対称なモード(以下これをSSモードと称する)では

$$\sum_{i=1}^I b_i R_{1i} \left(\sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} Q_{1nsi} \right) = 0$$

$$s=1, 2, \dots, I \dots\dots\dots (26)$$

X 軸に対称で Y 軸に反対称なモード(以下これをSAモードと称する)では

$$\sum_{i=1}^I b_i R_{1i} \left(\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} Q_{1nsi} \right) = 0$$

$$s=1, 2, \dots, I \dots\dots\dots (27)$$

X 軸に反対称で Y 軸に対称なモード(以下これをASモードと称する)では

$$\sum_{i=1}^I b_i R_{2i} \left(\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} Q_{2nsi} \right) = 0$$

$$s=1, 2, \dots, I \dots\dots\dots (28)$$

X 軸と Y 軸の両軸に反対称なモード(以下これをAAモードと称する)では

$$\sum_{i=1}^I b_i R_{2i} \left(\sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} Q_{2nsi} \right) = 0$$

表3 外周が円形で内部に2個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と内外長軸比 f/a の関係 [$a/c=1.5$, $f/g=1.5$, $e/a=0.5$, 図2(b)参照]

f/a	SS1	SS2	SA1	AS1	AA1
0.05	3.714	6.924	5.796	5.388	6.700
0.1	3.959	7.361	6.301	5.435	6.834
0.15	4.274	7.648	6.817	5.521	7.072
0.2	4.649	7.850	7.274	5.665	7.415
0.25	5.090	8.122	7.743	5.844	7.777
0.3	5.633	8.576	8.217	6.082	8.216

$$s=1, 2, \dots, I \dots\dots\dots (29)$$

となり、これらを解くことにより各モードの固有値を求めることができる。

本問に対して、 a/c , f/a , f/g , e/a を種々に変化させた場合の固有値 aa とモードの関係を表 2, 3, および図 3 に示す。表および図中 SS 1, SS 2, $\dots$, は SS モードの第一次, 第二次, $\dots$, SA 1 は SA モードの第一次, AS 1 は AS モードの第一次, AA 1 は AA モードの第一次固有値を表す。図 3 のように内部境界が小さい場合 ($f/a=0.1$), SS 1 および SA 1 モードは内部境界が離れるにつれて aa は増大し、一度極大値を有した後減少するが AS 1 および AA 1 モードはあまり変化せず、また SS 2 モードは複雑に変化していることがわかる。これは AS 1 および AA 1 モードでは X 軸が節になるからと考えられる。表 2 で括弧中の値は内部に拘束のない特別な場合で、他著者⁽¹¹⁾により求められた結果を表す。この場合も他著者の結果と本解の結果とはよく一致していることがわかる。

3・3 外周がだ円形で内部に 4 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合 [図 2(c) 参照] 図 2(c) のように 4 個の同大のだ円形境界が X 軸に $\pi/4$

表 4 外周がだ円形で内部に 4 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と偏心量 e/a の関係 [$a/c=1.5$, $f/g=1.5$, 図 2(c) 参照]

f/a	e/a	Mode				
		SS1	SS2	SA1	AS1	AA1
0.1	0	4.174	6.332	4.499	5.544	6.523
	0.2	5.101	7.371	5.126	6.771	7.102
	0.4	5.518	6.442	5.651	8.009	8.431
	0.6	3.842	6.031	5.210	6.280	8.601
	0.8	3.149	5.815	4.530	5.473	6.844

図 3 外周がだ円形で内部に 2 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と偏心量 e/a の関係 [$a/c=1.5$, $f/a=0.1$, $f/g=1.5$, 図 2(b) 参照]

の角度の軸上に配置されている場合を考える。この場合 b_s , Θ_s と γ_s の関係は

$$b_s/a = [(r_2/a)^2 + 2(r_2/a)(e/a)\cos\gamma_s + (e/a)^2]^{1/2}$$

$$\Theta_s = \tan^{-1} \left[\frac{(r_2/a)\sin\gamma_s}{(r_2/a)\cos\gamma_s + (e/a)} \right] + \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots (30)$$

となり、内部だ円形境界は全部で 4 個であるがその配置は X 軸, Y 軸ともに対称であるので対称性を用いることにより第一象限のだ円 1 個を数値データとして用いばよい。すなわちそれぞれのモードに対する固有値を求める方程式は式 (27) ~ (30) である。

この場合の固有値 aa とモードの関係を表 4 および図 4 に示す。図 4 より各モードは内部境界の動きによく反応し、SS 2 モード以外は一度極大値を有した後減少していることがわかる。

3・4 外周が正多角形で内部に 2 個あるいは 4 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合 [図 5(a) 参照]

図 5 のような外周境界が正多角形の場合、始点の角度が θ_{k-1} , 終点の角度が θ_k である k 番めの直線で表される区間の外周境界上の極座標 r_1 は外周境界の中心を座標の原点 O とし、 O から外周辺までの垂直長さを a とするとすべての正多角形に対して

$$r_1/a = [\cos(\theta - \theta_k^*)]^{-1} \dots\dots\dots (31)$$

の関係がある。 θ_k , θ_k^* はそれぞれ図 5 に示すとおりである。

図 5(a), (c) のような正三角形, 正五角形の場合の内部に X 軸に対称にだ円形境界が 2 個配置されている場合、 b_s , Θ_s と γ_s の関係は

$$b_s/a = [(r_2/a)^2 + 2(r_2/a)(e/a)\sin\gamma_s + (e/a)^2]^{1/2}$$

$$\Theta_s = \cos^{-1} [(r_2/a)/(b_s/a)\cos\gamma_s] \dots\dots\dots (32)$$

となり、これらの場合のそれぞれのモードに対する固有値を求める方程式は式 (25), (26) である。また図

図 4 外周がだ円形で内部に 4 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と偏心量 e/a の関係 [$a/c=1.5$, $f/a=0.1$, $f/g=1.5$, 図 2(c) 参照]

表 5 外周が正三角形で内部に 2 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と偏心量 e/a の関係 [図 5(a) 参照]

f/a	f/g	e/a	Mode			
			S1	S2	A1	A2
0.1	1.0	0.3	3.177	3.357	3.647	4.769
		0.5	2.938	3.401	3.905	4.959
	1.5	0.3	3.128	3.328	3.605	4.719
		0.5	2.871	3.374	3.862	4.919
0.2	1.0	0.3	3.430	3.664	3.883	5.127
		0.5	3.285	3.678	4.178	5.261
	1.5	0.3	3.386	3.573	3.790	5.015
		0.5	3.197	3.571	4.102	5.214

表 6 外周が正四角形で内部に 4 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と偏心量 e/a の関係 [図 5(b) 参照]

f/a	f/g	e/a	Mode			
			SS1	SS2	SA1 =AS1	AA1
0.05	1.0	0.3	3.776	5.069	4.089	4.664
		0.5	3.742	5.109	4.590	5.275
	1.5	0.3	3.706	5.054	4.048	4.650
		0.5	3.662	5.104	4.532	5.243
0.1	1.0	0.3	4.115	5.243	4.351	4.806
		0.5	4.518	5.388	5.093	5.631
	1.5	0.3	4.018	5.149	4.272	4.778
		0.5	4.253	5.330	4.897	5.547

$$\begin{aligned}\theta_0 &= 0^\circ & \theta'_1 &= 60^\circ \\ \theta_1 &= 120^\circ & \theta'_2 &= 180^\circ \\ \theta_2 &= 180^\circ\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}\theta_0 &= 0^\circ & \theta'_1 &= 0^\circ \\ \theta_1 &= 45^\circ & \theta'_2 &= 90^\circ \\ \theta_2 &= 135^\circ & \theta'_3 &= 180^\circ \\ \theta_3 &= 180^\circ\end{aligned}$$

(b)

表 7 外周が正五角形で内部に 2 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と偏心量 e/a の関係 [図 5(c) 参照]

f/a	f/g	e/a	Mode			
			S1	S2	A1	A2
0			2.281 (2.285)	3.624	3.623	4.818
0.1	1.0	0.3	3.817	3.817	4.506	4.978
		0.5	3.178	3.807	4.878	5.204
	1.5	0.3	3.550	3.788	4.414	4.945
		0.5	3.092	3.787	4.819	5.148
0.2	1.0	0.3	4.129	4.184	5.067	5.317
		0.5	3.748	3.974	5.258	5.690
	1.5	0.3	4.015	4.120	4.852	5.216
		0.5	3.545	3.919	5.226	5.582

$$\begin{aligned}\theta_0 &= 0^\circ & \theta'_1 &= 36^\circ \\ \theta_1 &= 72^\circ & \theta'_2 &= 108^\circ \\ \theta_2 &= 144^\circ & \theta'_3 &= 180^\circ \\ \theta_3 &= 180^\circ\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\theta_0 &= 0^\circ & \theta'_1 &= 0^\circ \\ \theta_1 &= 60^\circ & \theta'_2 &= 90^\circ \\ \theta_2 &= 120^\circ & \theta'_3 &= 150^\circ \\ \theta_3 &= 180^\circ\end{aligned}$$

(d)

表 8 外周が正六角形で内部に 4 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と偏心量 e/a の関係 [図 5(d) 参照]

f/a	f/g	e/a	Mode			
			SS1	SA1	AS1	AA1
0			2.316 (2.317)	3.687	3.687	4.932
0.05	1.0	0.3	4.027	4.357	4.359	5.284
		0.5	3.791	4.737	4.771	6.203
	1.5	0.3	3.943	4.306	4.307	5.262
		0.5	3.713	4.677	4.709	6.145
0.1	1.0	0.3	4.426	4.670	4.675	5.508
		0.5	4.561	5.206	5.283	6.756
	1.5	0.3	4.307	4.565	4.570	5.463
		0.5	4.300	5.002	5.063	6.602

図 5 外周が正多角形で内部に複数の偏心だ円形境界を有する場合の座標関係

図 6 外周が正五角形で内部に 2 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と偏心量 e/a の関係 [$f/a=0.2$, $f/g=1.0$, 図 5(c) 参照]

図 7 外周が正六角形で内部に 4 個の同大等配置の偏心だ円形境界を有する場合の固有値 aa と偏心量 e/a の関係 [$f/a=0.1$, $f/g=1.5$, 図 5(d) 参照]

5(b), (d) のような正四角形, 正六角形の場合, 内部だ円形境界の配置は外周がだ円形のときと同様であり, それぞれのモードに対する固有値を求める方程式は式(27)~(30)となる。

本問に対し, f/a , f/g , e/a を種々に変化させた場合の固有値 aa を表 5~8, 図 6, 7 に示す。表および図中 $S1$, $S2$, ..., は S モードの第一次, 第二次, ..., $A1$, $A2$, ..., は A モードの第一次, 第二次, ..., 固有値を表している。図 6, 7 よりこれらの場合も偏心量に対して極大値を取る現象が見られる。また表 7, 8 で括弧中の値は内部に拘束のない特別な場合で, 他著者⁽³⁾により求められた結果を表す。他著者の結果と本解の結果とはよく一致していることがわかる。

4. 結 言

本報は膜の振動等ヘルムホルツ方程式で表される物理現象の境界値問題で, 内, 外部の境界がともに任意形状でかつ複数の偏心境界を有する場合の固有値を求める方程式を誘導したものである。すなわち

(1) ヘルムホルツ方程式に点拘束を有する項を追加し, 内部境界を多数の点で近似した場合の固有値を求める式を誘導した。

(2) (1) で求めた解は, 一般性はあるものの数値誤差および計算時間の増大を招く恐れが一般には認められるので内部境界が同大で等配置の場合については別に対称性を考慮した各モードの式を誘導した。

(3) 本解の妥当性を検証するために, まず 1 個の偏心円形境界を有する場合を取り上げて数値計算を行い, フーリエ展開境界値平均法を用いて求められた結果と比較したところ両者はよく一致した。

(4) 具体例として外部境界がだ円形, 正多角形で内部に 2 個あるいは 4 個の偏心だ円形境界を有する場

合を取上げて数値計算を行い, 種々のモードに対する固有値を示した。その結果固有値は一般に場の中心からの偏心量の増加に伴って増加し極大値を有した後減少する傾向が認められた。

(5) 外周境界がだ円形, 正多角形で内部に拘束のない特別な場合について, 本解の結果と他著者との結果は非常によく一致することがわかった。

(6) 本解を用いると, 数値計算の過程で内, 外部境界を与える幾何学的量を導入するだけで同一方程式から内, 外部境界ともにあらゆる形状の場合の固有値を求めることができる。

文 献

- (1) Davies, J. B. and Muilwyk, C. A., *Proc. IEEE*, 113(1966), 277-284.
- (2) Laura, P. A. A., *Proc. IEEE*, 54(1966), 1495-1497.
- (3) Laura, P. A. A., *J. Acoust. Soc. Am.*, 42(1967), 21-26.
- (4) Laura, P. A. A., Nagaya, K. and Sarmiento, G. S., *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-28*, (1980), 568-572.
- (5) Hine, M. J., *J. Sound Vib.*, 15(1971), 295-305.
- (6) Steele, C. W., *J. Comput. Phys.*, 3(1968), 48-153.
- (7) Yee, H. Y., *Proc. IEEE*, 54(1965), 64.
- (8) Nagaya, K., *J. Sound Vib.*, 50(1977), 545-551.
- (9) Nagaya, K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 45(1978), 153-158.
- (10) Nagaya, K. and Hai, Y., *J. Sound Vib.*, 100(1985), 123-134.
- (11) Mazumdar, J., *J. Sound Vib.*, 27(1973), 45-57.
- (12) Mazumdar, J., *Shock Vib. Dig.*, 7(1975), 75-88.
- (13) De, S., *J. Sound Vib.*, (1971), 13-23.
- (14) De, S., *Pure Appl. Geophys.*, 97(1972), 85-91.
- (15) Sato, K., *J. Sound Vib.*, 34(1974), 161-171.
- (16) Singh, G. S. and Kothari, L. S., *J. Math. Phys.*, 25(1984), 810-811.
- (17) Lin, W. H., *J. Sound Vib.*, 81(1982), 425-435.
- (18) Irie, T., Yamada, G. and Yoda, K., *J. Acoust. Soc. Am.*, 70(1981), 1083-1088.
- (19) Irie, T., Yamada, G. and Sonoda, M., *J. Sound Vib.*, 86

- (1983), 442-448.
- (20) Glosstone, G. and Edlund, M. C., *The Elements of Nuclear Reactor Theory*, MacMillan, London, (1952), Chap. XI.
- (21) Nagaya, K. and Poltorak, K., *J. Acoust. Soc. Am.*, 85 (2) (1989), 576-581.
-