H_∞ 制御によるフレキシブルロータの制振制御*

王 晶 文*¹, 野 波 健 蔵*²
三 平 満 司*², 美 多 勉*²

Active Vibration Control of A Flexible Rotor by H_∞ Control Theory

Jan Wei WANG, Kenzo NONAMI,
Mitsuji SAMPEI and Tsutomu MITA

This paper investigates vibration control of a flexible rotor system which is a four-degree-of-freedom system. A H_∞ controller is derived such that unmodelled high-frequency dynamics are not excited, i.e., the spillover phenomenon is not caused to occur. Simulation results are presented to demonstrate control performance. In this paper, the four-degree-of-freedom system is reduced to a two-degree-of-freedom system. Although the control system is designed based on the reduced-order system, the 1st and 2nd modes are well-controlled and two other higher modes are almost uncontrolled using the H_∞ control theory. As the result, the full-order system remains completely stable.

Key Words: Active Vibration Control, Flexible Rotor, H_∞ Control, Spillover Phenomenon, Simulation

1. 緒 言

回転機械は常に振動問題に悩まされ、その振動を抑制するためにさまざまな研究が行われてきた。それらの多くは受動形であるが、最近ではアクティブ制振システムの研究が活発である。特に、フレキシブルロータを磁気軸受で支持する場合は、低次モードは良好に制御されるが、高次モードに関しては制御性能が悪く時々発振現象に悩まされる。また、フレキシブルロータ・磁気軸受制御系は多くの場合 PD 形の出力フィードバック系を構成するが、厳密に数学モデルに依拠しないため最適な PD ゲインを見出すことが極めて困難となっている。

一方、数学モデルに基づく最適な PD ゲインを得るためには、高次モードを無視できず、次数の高い制御系の設計となってしまう。この高次モードを切り捨てると、いわゆるスピルオーバー現象を引き起こし、無視した高次モードにより、制御系が不安定となる。制御系設計の立場から、低次元モデルをいかに作成するかという問題は非常に重要である。スピルオーバーの対策

としてこれまでにさまざまな手法が提案されてきた⁽¹⁾。本論文では、スピルオーバー現象を克服して、低次元モデルによる制振制御を実現するために、新しい制御系設計方法として現在注目を集めている周波数成形に基づく H_∞ 制御理論をフレキシブルロータのアクティブ制御に適用し、シミュレーションでその効果を確かめる。なお、 H_∞ 制御器は出力フィードバックによる方法で設計する。

本研究では、四つの振動モードを有するフレキシブルロータを例にとり、定格回転数域内には低次の二つの振動モードが存在する系について共振を引き起こさないような制振制御系の設計を行うものである。

具体的には、本論文では、フレキシブルロータの 4 質点近似モデルについて考えることにする。制御系の設計に際し、高次モードを無視した低次元モデルにおいて、無視した高次モードを非構造的な変動とみなし、このような変動に対して閉ループ系をロバスト安定にすることによってスピルオーバー現象を抑える。また、低周波数領域で整定関数⁽²⁾を小さくすることによって制振を行うことを考える。制御系は、 H_∞ 制御理論におけるロバスト安定性を反映する相補感度と整定関数との特定周波数領域での最小化の混合問題を解くことによって構成できる。

* 原稿受付 平成 2 年 5 月 11 日。

*¹ 千葉大学大学院 (〒260 千葉市弥生町 1-33)。

*² 千葉大学工学部。

シミュレーションでは、四つの振動モードのうち、1次と2次モードについての低次元モデルを作成して、上記のH_∞制御理論により、制御系を設計した。この結果、1次と2次の振動モードは最適制御の状態に近づき、3次と4次モードはロバスト安定となつて、スピルオーバー現象を防止できることが確認できた。

2. モデル化

本研究では、図1のようなフレキシブルロータの4質点近似モデルについて考える。

図1において、 $m_1 \sim m_4$ は集中質量を表す。 m_1 と m_4 はそれぞれバネ k_1 と k_2 に支持され、この位置に制振用制御入力に加わると仮定する。このモデルのパラメータを表1に示しておく。このとき $m_1 \sim m_4$ に関する運動方程式は影響係数法によって次のように与えられる⁽³⁾。

$$\begin{cases} M\ddot{X} + KX = Bu \\ Y = CX \end{cases} \quad (1)$$

ここで $X = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]^T$ は各質量の物理変位であり、 $u = [u_1 \ u_2]^T$ は制御入力を表し、 $Y = [X_1 \ X_4]^T$ は観測出力を表す。また、

$M = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$: 質量行列

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} : \text{剛性行列}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{制御入力を加える位置を表す行列}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{センサの配置を表す行列}$$

となる。式(1)をモード変換行列 T によって、モード解析すると、

図1 フレキシブルロータモデル

$$\begin{cases} \ddot{Z} + \Omega Z = T^T B u \\ Y = C T Z \end{cases} \quad (2)$$

が得られる。ここに、 T は正規化されたモード変換行列であり、

$$X = T Z, \quad T^T M T = I, \quad T^T K T = \Omega \quad (3)$$

のような関係式が成り立つ。また、

$Z = [Z_1 \ Z_2 \ Z_3 \ Z_4]^T$: モード変位ベクトル

$\Omega = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \omega_4^2\}$: 周波数行列

となる。モード減衰を考慮すると、式(2)は、一般に、

$$\ddot{Z} + D\dot{Z} + \Omega Z = T^T B u \quad (4)$$

と表される。ただし、

$$D = \text{diag}\{2\zeta_1\omega_1, \dots, 2\zeta_4\omega_4\} \quad (5)$$

であり、 ζ_i は i 番めのモードに対する減衰比を表す。各質点のモード変位と速度を状態変数に取れば、図1のフルオーダーモデルの状態空間における表現は、

$$\begin{cases} \dot{x}_{p'} = A_{p'} x_{p'} + B_{p'} u \\ y_{p'} = C_{p'} x_{p'} \end{cases} \quad (6)$$

と書ける。ただし、

$$A_{p'} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_{4 \times 4} \\ -\Omega & -D \end{bmatrix} \in R^{8 \times 8}$$

$$B_{p'} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 2} \\ T^T B \end{bmatrix} \in R^{8 \times 2}$$

$$C_{p'} = [C T \ 0_{2 \times 4}] \in R^{2 \times 8}$$

である。

フレキシブルロータは、一般に、多くの振動モードを持つ高次システムであるので、制御系の設計を行うときに、制御器の構成問題や制御アルゴリズムを実現するためのコンピュータの演算速度による制約などから、制御系設計用の低次元モデルを作成する必要がある。一般に、その低次元モデルは、高次振動モードを省

表1 パラメータ

パラメータ	値	単位
集中質量	m_1	3.525 kg
"	m_2	3.803 kg
"	m_3	2.783 kg
"	m_4	3.525 kg
縦弾性係数	E	2.1×10^{11} N/m ²
断面2次モーメント	I	2.0×10^{-2} m ⁴
長さ	l	671×10^{-3} m
長さ	l_1, l_2	223.7×10^{-3} m
バネ定数	k_1, k_2	1000 N/m
固有振動数	ω_1	12.10 rad/sec
"	ω_2	16.05 rad/sec
"	ω_3	519.90 rad/sec
"	ω_4	1538.97 rad/sec
減衰比	ζ	1%

略することによって得られる。本研究で考えている式(6)で表されるフレキシブルロータ系は2入力2出力の8次のシステムであり、四つの振動モードを含んでいる。それらの振動モードから3, 4次モードを切捨て、作られた1, 2次モードに関する低次元モデル

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \\ y_p = C_p x_p \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

が制御系設計に用いられる。ただし、このとき、

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & 0 & -2\zeta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & -\omega_2^2 & 0 & -2\zeta_2\omega_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$B_p \in R^{4 \times 2}, C_p \in R^{2 \times 4} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。また、フルオーダーモデルと低次元モデルの伝達関数 $P'(s)$, $P(s)$ の σ -プロット⁽⁴⁾(最大特異値の周波数応答)を図2に示す。ここで、 σ -プロットとは伝達関数行列に対する応答のことで、1入力1出力系のボード線図に相当する。

3. 制御系の設計

図3のような構造を持つ制御系について考える。ここで、 $P(s)$ は制御対象、 $K(s)$ は制御器であり、 u は実際の制御入力、 w は仮想的に付け加えた外乱、 y は観測出力、 $z \triangleq [z_1 \ z_2]^T$ は制御量である。また、 $W_1(s)$, $W_2(s)$ は後述する重み行列である。さて、図3で w から u までの伝達関数

$$T(s) = K(s)P(s)[I - K(s)P(s)]^{-1} \quad \dots\dots\dots (10)$$

は相補感度関数と呼ばれ、制御対象 $P(s)$ のモデリング誤差に対する閉ループ系の安全余裕を評価するために用いられる。今安定な制御対象 $P(s)$ に図4のような乗法的な不安定変動 $\Delta_m(s)$ があり、 $P(s)$ が

図2 フルオーダーモデルと低次元モデルの周波数特性

$$P'(s) = P(s)[I + \Delta_m(s)] \quad \dots\dots\dots (11)$$

と変動した場合を考えよう。

この場合、

$$\|T(s)\Delta_m(s)\|_\infty < 1 \quad \dots\dots\dots (12)$$

からばスモールゲイン定理から閉ループ系も安定であることが知られている⁽⁴⁾。

ただし、 $\|\cdot\|_\infty$ は H_∞ ノルムであり、例えば、 $\|F(s)\|_\infty$ は $F(j\omega)$ の最大特異値 $\sigma[F(j\omega)]$ のすべての周波数での最大値、すなわち、

$$\|F(s)\|_\infty = \sup_{-\infty \leq \omega \leq \infty} \sigma[F(j\omega)] \quad \dots\dots\dots (13)$$

を表す。ただし、

$$\sigma[F(j\omega)] = \sqrt{\lambda_{\max}[F^T(-j\omega)F(j\omega)]} \quad \dots\dots\dots (14)$$

を表す。 F がスカラならば、 $\|F(s)\|_\infty$ はゲインの最大値、すなわち $|F(j\omega)|$ の最大値となる。

さて、 $\Delta_m(s)$ は不確定としたがそのゲイン線図の各周波数における大きさの上限が既知であり、

$$\sigma[\Delta_m(j\omega)] < \sigma[W_1(j\omega)] \quad \dots\dots\dots (15)$$

を満たすとする。ただし、 $W_1(s)$ はスカラとする。すると、この場合、

$$\|W_1(s)T(s)\|_\infty < 1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ならば式(12)も満たされ、 $\Delta_m(s)$ の変動に対してロバスト安定となる。ただし、変動は制御対象の不安定極の数を変えないものである必要がある⁽⁴⁾。今の問題では $P(s)$, $P'(s)$, $\Delta_m(s)$ は

$$P'(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$P(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p \quad \dots\dots\dots (18)$$

図3 一般化制御対象と制御器

図4 乗法的な不確定性のあるモデル

$$\Delta_m(s) = P(s)^{-1}[P'(s) - P(s)] \dots\dots\dots (19)$$

与えられており、 $P(s)$ と $P'(s)$ とともに安定であるのでこの条件は満たされている。式(16)が成り立つと $P(s)$ を制御対象として設計した補償器は、実際の制御対象が $P'(s)$ である場合にも閉ループ系を安定にし、スピルオーバーが防止できる。

次に、 w から y までの伝達関数について考える。この伝達関数を $M(s)$ とすると、

$$M(s) = P(s)[I - K(s)P(s)]^{-1} \dots\dots\dots (20)$$

となり、整定関数と呼ばれ、 $M(s)$ を低周波数域で小さくすれば、極が左半平面遠くに移動し、速応性のあるレギュレータが設計できることが知られている⁽²⁾。

よって、低次モードの制振効果を高めるために、低周波数で大きいゲインを持つ重み行列 $W_2(s)$ を導入し

$$\|W_2(s)M(s)\|_\infty < 1 \dots\dots\dots (21)$$

とすることを考える。

以上二つの要求式(16)、(21)を同時に満足するために新たな評価関数

$$\left\| \begin{matrix} W_1(s)T(s) \\ W_2(s)M(s) \end{matrix} \right\|_\infty < 1 \dots\dots\dots (22)$$

を満たす制御器を求めれば、式(16)、(21)も満たされ、ロバスト安定かつ、低次モードが良好な過渡特性を持つ制御系が設計できる。図5に $W_1(s)$ 、 $W_2(s)$ と $\Delta_m(s)$ の σ -プロットを示す。ただし、 $W_2(s)$ はスカラなので σ -プロットは絶対値と同じである。

3・1 出力フィードバックによる H_∞ 制御器 式(22)を満たす制御器を求める問題は、 H_∞ 制御理論における一種の混合問題である。この問題を解くために、ここで三平、美多らが提案した解法⁽⁵⁾⁽⁷⁾を適用することにする。図3により、入力 $(w, u) \sim$ 出力 (z_1, z_2, y) 関係は、

図5 重みとモデリング誤差の周波数特性

$$z_1(s) = W_1(s)u(s)$$

$$z_2(s) = W_2(s)P(s)w(s) + W_2(s)P(s)u(s) \dots\dots (23)$$

$$y(s) = P(s)w(s) + P(s)u(s)$$

$$u(s) = K(s)y(s)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & W_1(s) \\ \frac{W_2(s)P(s)}{P(s)} & \frac{W_2(s)P(s)}{P(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \\ &= G(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

で表現される。ただし、 $z = [z_1 \ z_2]^T$ である。ここで、

$$W_1(s) \triangleq C_{w1}(sI - A_{w1})^{-1}B_{w1} + D_{w1}$$

$$W_2(s) \triangleq C_{w2}(sI - A_{w2})^{-1}B_{w2} + D_{w2}$$

を式(24)に代入すると、 $(w, u) \sim (z_1, z_2, y)$ 間の伝達関数 $G(s)$ は、状態方程式で実現し

$$\begin{aligned} G(s) &\triangleq \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{w1} & 0 & 0 & 0 & B_{w1} & \\ 0 & A_{w2} & B_{w2}C_p & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & A_p & B_p & 0 & \\ \hline C_{w1} & 0 & 0 & 0 & D_{w1} & \\ 0 & C_{w2} & D_{w2}C_p & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & C_p & 0 & 0 & \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \triangleq C(sI - A)^{-1}B + D$$

の記号⁽⁶⁾を用いた。このとき、制御器を

$$K(s) = C_*(sI - A_*)^{-1}B_* \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_* & B_* \\ \hline C_* & 0 \end{array} \right] \dots\dots (26)$$

とすれば、以下のステップに従って、制御器のパラメータ A_* 、 B_* 、 C_* を決めることができる。

ステップ1 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して

Riccati 方程式

$$\begin{aligned} &P[A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1}D_{12}^T C_1] \\ &+ A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1}D_{12}^T C_1]^T P \\ &+ P[B_1 B_1^T - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1}B_2^T]P \\ &+ C_1^T[I - D_{12}(D_{12}^T D_{12})^{-1}D_{12}^T]C_1 + \varepsilon I = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (27)$$

の正定解 $P > 0$ を求める。

ステップ2 十分小さい $\mu > 0$ に対して

Riccati 方程式

$$QA^T + AQ + QC_1^T C_1 Q - \frac{1}{\mu} QC_2^T C_2 Q$$

$$+B_1B_1^T + \mu I = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

の正定解 $Q > 0$ を求める。

ステップ 3 $Q^{-1} > P$ が成り立つことを確かめる。

ステップ 4 制御器のパラメータを

$$\begin{aligned} C_k &= F \\ B_k &= -(Q^{-1} - P)^{-1} Q^{-1} K \\ A_k &= A + B_2 C_k - C_k B_2 - (Q^{-1} - P)^{-1} M \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (29)$$

で与える。ただし、

$$\begin{aligned} F &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T P + D_{12}^T C_1) \\ K &= -\frac{1}{2\mu} Q C_1^T \\ M &= C_k \{ B_2^T P + D_{12}^T (C_1 + D_{12} C_k) \} \\ &\quad + (Q^{-1} - P)^{-1} B_1 B_1^T P - \varepsilon I \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (30)$$

である。

4. シミュレーション結果

3章では低次元(4次系)モデルについて、H_∞制御理論を適用して式(26)で表される制御器 $K(s)$ を設計した。この制御器 $K(s)$ をフルオーダーモデル式(6)に適用して制振効果に関するシミュレーションを行った。とくに、ここでは、モデルから切り捨てられた高次モードに対するスピルオーバー不安定現象防止の確認とLQ制御との比較考察を行う。

4.1 スピルオーバーに対するロバスト安定性 図6には、評価関数 $W_1(s)T(s)$ と $W_2(s)M(s)$ の周波数特性を示す。この図から、 $W_1(s)T(s)$ と $W_2(s)M(s)$ のH_∞ノルムは1以下に抑えられており、式(22)を満たしているため閉ループ系がロバスト安定となることがわかる。

図6 $W_1(s)T(s)$ と $W_2(s)M(s)$ の周波数特性

4.2 インパルス応答とステップ応答

図7は図1の X_3 の位置でのインパルス外乱に対する応答を示す。図7(a)は制御なしの時とH_∞制御時についての応答で、両者とも二つの周波数の合成波形のように見えるが、図7(b)の拡大図で明らかのように四つの振

(a) X_3 のインパルス応答

(b) パート I, II の拡大図

(c) 初期条件を変えたときのインパルス応答

図7

動モードを含んだ波形となっている。図7(a)によれば基本波である振動モードの1次と2次は H_∞ 制御を行ったとき、非制御時と比べて著しく減衰が早くなっているのがわかる。さらに、無視したモードの3次と4次は制御の影響がほとんど現れていないのがわかる。初期条件を変えたときの図7(c)によれば、これらの高次モードが制御されていないということがより明確になる。これは一種のローパスフィルタ特性を有する設計と等価である。すなわち、スピルオーバー不安定が抑制されていることになる。これが H_∞ 制御の特徴と言える。

図8は図7と同じ場所での単位ステップ外乱に対する応答である。 $W_2(s)$ を $\omega=0$ の近傍で大きくすれば、このようにステップ外乱に対しても偏差のない出力零応答を実現できる。

4.3 H_∞ 制御とLQ制御との比較検討 式(7)の低次元モデル(4次系)に対してLQ制御を適用して制御器を設計するとインパルス応答は例えば図9のようになる。図では1次と2次の低次モードが瞬時に整

定して3次と4次の高次モードが発振していくのがみられる。もちろん、応答は重み行列に依存するが、どのような重み行列に対してもある段階から確実に高次モードがスピルオーバー不安定となる。これを根軌跡で示したのが図10である。図10(a)は全体図であるが、図

(a) LQ制御による根軌跡

図8 X_3 のステップ状外乱に対する応答

(b) 図10(a)での低次モードの根軌跡

図9 LQ制御によるインパルス応答

(c) 図10(a)での高次モードの根軌跡

図10

図 11

10(b), (c)は低次モードと高次モードの極の根軌跡を分けて示している。図 10(c)により、重みの増大とともに3次と4次モードの極は右半平面に移動し、スピルオーバー不安定となっていることがわかる。一方、 H_{∞} 制御の場合には、図 11(a)から、低次モードの極を虚軸から遠ざけても3次と4次モードの極はほとんど動いていないことが確認できる。よって、ロバスト安定となっている。なお、図 11(a)で見分け難い低次モードの根軌跡の拡大図を図 11(b)に示す。

5. 結 言

H_{∞} 制御理論をフレキシブルロータのアクティブ制御系の設計に適用してシミュレーションを行った結果、以下のことが明らかになった。

- (1) フレキシブルロータ系についてフルオーダーモデルと低次元モデルのモデリングをモード座標により行い、伝達関数行列とその周波数特性を示した。
- (2) 低次元モデルについて H_{∞} 制御理論に基づき出力フィードバック制御系の設計法を述べるとともに、 H_{∞} 制御器を設計した。
- (3) H_{∞} 制御器をフルオーダーモデルに適用し非制御時と制御時の特性を時刻歴応答と根軌跡で比較検討

した。この結果 H_{∞} 制御は対象とした低次元モデルに対しては十分な制振効果を与えるが、無視したモードに関してはその影響を極力及ぼさないような制御器の設計法となることが明らかとなった。これよりスピルオーバーが防止された。

(4) H_{∞} 制御と LQ 制御の比較を時刻歴応答、根軌跡について行った結果、スピルオーバー不安定現象防止の観点から H_{∞} 制御法が LQ 制御法より優れていることが明らかとなった。

これより、本研究が対象したフレキシブルロータ系の低次元モデルに対するアクティブ振動制御には H_{∞} 制御法が適していると考えられる。

文 献

- (1) 野波, 日本機械学会講習会, No.890-49(1989), 49.
- (2) 美多, 計測自動制御学会論文集, 24-11(1988), 1207-1209.
- (3) 野波, 機論, 54-499, C(1987), 579-586.
- (4) Doyle, J. C. and Stein, G., *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-26(1981), 4-16.
- (5) Sampei, M., Mita, T. and Nakamichi, M., *Systems & Control Letters*, 14-1(1990), 13-24.
- (6) Francis, B. A., *A Course In H_{∞} Control Theory*, Springer-Verlag, (1987).
- (7) 三平・美多, 計測と制御, 29-2(1990), 19-25.