球面関数を用いた調和解析による球形状誤差の評価*

糸魚川 文広*¹, 中 村 隆*², 船 橋 鉦 一*²Harmonic Analysis by Spherical Function for Evaluating
Form Error of Spherical Parts

Fumihito ITOIGAWA, Takashi NAKAMURA and Koichi FUNABASHI

A method for measuring the form error of spherical parts was developed in the previous report. The measured results showed that steel balls used as ball bearing assemblies usually had the form error of three or four undulations. In the present report, a harmonic analysis by the spherical function is introduced to evaluate the sphericities of the steel balls. Dimensional spectra have invariant values for each ball even if the measuring coordinate axes are changed. Steel balls which are sampled in various states of different finishing processes are measured, and the dimensional spectra are calculated. The calculated results show that the dimensional spectra of steel balls that are in the same state of the finishing process have the same values and that the 3rd-order spectrum has a tendency to be left behind selectively by the polishing process. Evidence has been given that the harmonic analysis by the spherical function is successful for evaluating the sphericity of steel balls.

Key Words: Measurement, Accuracy, Sphericity, Evaluation, Harmonic Analysis, Spherical Function, Steel Ball

1. 緒 言

ボールベアリング等に用いられる鋼球の形状誤差を、球面全体にわたって測定評価することは、これまでほとんど試みられていない。現実的には、球形状誤差の評価を断面の真円形状誤差の評価結果で代用している。その背景には、測定の困難さのみならず、断面の形状評価で十分な製品精度が保証されているという現実もある。しかし球の製造における真球度化の過程や、真球度と転がり玉軸受の回転精度と相関関係などは三次元的な現象であり、その解析には二次元的な断面の形状測定では不十分である。より効率のよい加工条件などの選定や、転がり玉軸受の高精度化の要求が高まるにつれて、三次元的な測定技術および三次元的な評価法の確立が必要となることが予想される。

著者らは、先の報告で球面全体の形状を二次元フーリエ変換を利用して把握することが可能なことを示した⁽¹⁾。そこで本報では、測定された球面形状をもとにして、真円形状誤差のフーリエスペクトル評価と同様

に、調和成分の表示による球面形状誤差の評価を試みる。ここでは球面関数を直交関数系とする調和解析により測定座標軸に依存しない形状誤差解析・評価が可能なことを示す。

2. 球面形状誤差測定とフーリエ成分

2・1 測定装置および測定法 図1に球面形状誤差測定装置の概要を示す。球面形状の測定原理および計算方法については、前報で詳しく述べたので、ここではその概略を説明する。球は凹球面座を持つ空気軸受で支えられ、極めて小さな抵抗で回転可能であり、駆動ローラおよびそれを支える門形ステーにより摩擦駆動され、駆動ローラと平行な軸および鉛直軸回りに回転する。これに対し形状誤差の測定部は、図中A、Bの固定接点、Cの変位計の3点で馬乗りゲージ形式となっている。この測定部は板ばね支持により球に接触しており、半径方向のみに変位可能となっている。したがって変位計Cには、球の運動誤差は検出されない。図2に示すように、球上に駆動ローラと平行な回転軸が ϕ 方向回転となるよう球座標 θ - ϕ をとり、測定部が球面全体をトレースするよう球を回転させる。この際、C点変位計から得られる信号の二次元複素フーリエ成分 S と各点のトレースする形状の複素フー

* 原稿受付 平成2年3月5日。

*¹ 学生員、名古屋工業大学大学院 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。*² 正員、名古屋工業大学。

リエ成分 F_A, F_B, F_C の間には,

$$F_C - S = (aF_B + bF_A)/(a+b) \dots\dots\dots (1)$$

ただし a, b は測定子間の距離で

$$a = \overline{AC}, b = \overline{BC}$$

が成り立つ。二次元フーリエ変換の移動定理を用いて、 F_A, F_B を消去し F_C について解くと、

$$F_C^T = \frac{1}{C_1^2 + C_2^2} \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \\ C_2 & C_1 \end{bmatrix} S^T \dots\dots\dots (2)$$

$$C_1 = 1 - a/L \cos(v\beta_b) - b/L \cos(v\beta_a)$$

$$C_2 = -a/L \sin(v\beta_b) - b/L \sin(v\beta_a)$$

$$L = a + b$$

u : ϕ 方向空間周波数 [Cycle/Unit Length]

v : θ 方向空間周波数 [Cycle/Unit Length]

β_a : 弧 $\overline{AC}$ の作る中心角 [rad]

β_b : 弧 $\overline{BC}$ の作る中心角 [rad]

となり形状誤差の二次元複素フーリエ成分が計算できる。これを逆フーリエ変換することで形状誤差を得る。ここで、 $C_1^2 + C_2^2 = 0$ の場合、すなわち θ 方向空間周波

数 $v=0$ のとき式(2)は計算不能となる。これは、 $\phi = \text{const}$ な断面形状の平均値は、この式から求められないことを意味する。しかし、極は1点であること、すなわち $\theta=0^\circ, \theta=180^\circ$ において、直径値は ϕ の値にかかわらず一定であることを用いて補正できる。また測定は周期性、連続性を考慮して2周分行う。

2・2 測定結果および二次元複素フーリエ成分

直径 50.8 mm (2 in), 等級 100 の玉軸受用鋼球を測定した結果を図3に示す。図中(a)は θ - ϕ を直交軸として平面に展開・表示したものであり、(b)は真球面上に形状誤差値を表示したものの表裏を示している。球形状はどの測定結果においても小さな凹凸が少なく断面形状に2~4山を持つ大きなうねりで構成されていることがわかる。また球面上に表示した結果から凹凸の位置関係がよくわかる。しかし、これだけでは凹凸がどのような成分の波形で構成されているかなどを定量的に把握することができない。本測定では馬乗りゲージ形式測定部の検出信号から球形状を計算するにあたり、二次元フーリエ変換を利用した。つまり球面形状誤差の二次元フーリエスペクトルが計算過程で得られている。図4に示すように、平面形状においては、測定座標軸が回転しても、空間周波数平面上で座標軸が回転するだけで、二次元フーリエスペクトルは同一なスペクトル分布となる。すなわち、原点からの距離の等しい成分の総和は常に等しく、これをもって評価の方法とすれば、測定軸に依存しない評価が可能である。しかしここで考えている球面を平面に展開した場合には、それは成立しない。例えば、極付近の凸部は球

図1 測定装置概要

図2 測定部と球面座標の位置関係

(a) 平面展開図

(b) 球面表示

図3 球面形状測定結果

全体を平面に展開した場合、拡大評価される。しかし、 90° 測定座標軸を回転させ、凹部を赤道付近に移動すると、平面に展開しても、拡大されることなく評価される。すなわち評価結果は、測定座標軸依存性を持つ。実際に同一球で測定座標軸を 90° 変えて測定した二つの測定結果のフーリエスペクトルを図 5 (a), (b) に示す。フーリエスペクトルの大きさは濃淡で表わされ、濃い所ほど大きな成分を表している。二つのフーリエスペクトルは同一球の測定結果であるにもかかわらず回転操作で一致せず、異なるスペクトル分布を持つことがわかる。以上のことから球の形状誤差評価におい

てはフーリエ成分評価は用いることができず、これに代わる評価が必要である。

3. 球面関数による調和解析

球面形状の評価法においてもフーリエ変換のように形状が物理的・数学的な取扱いが容易な級数に展開できれば、玉軸受の振動解析や球の研磨工程の解析に有用であると考えられる。また球は、基準となる座標を任意にとることができるが、その際、評価結果が変化しないことが重要である。すなわち、評価結果が測定座標軸依存性を持たないことが評価法に要求される。そこで、球面上で直交系をなす球面関数を直交関数系とする調和解析を用いる。球面関数は、第 1 種ルジャンドル関数 $P_n(\cos \theta)$ を用いて、

$$Y_{nm} = C_{nm} \sin^m \theta \frac{d^n P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} \cdot \cos(m\phi) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$Y_{nm}^* = C_{nm} \sin^m \theta \frac{d^n P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} \cdot \sin(m\phi) \quad \dots\dots\dots (3)'$$

と定義される。ここで C_{nm} は正規化係数で、

$$C_{nm} = \sqrt{(2n+1)/2 \cdot (n-m)!/(n+m)!} \quad \dots\dots (4)$$

である。この関数系を用いれば、球面上の任意関数 $f(\theta, \phi)$ は以下の様に級数展開できる⁽²⁾。

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \{a_{nm} Y_{nm} + b_{nm} Y_{nm}^*\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

各成分の係数の大きさ $\sqrt{a_{nm}^2 + b_{nm}^2}$ は測定座標軸に依存して変化するが、同一次数の成分の係数の二乗和

$$A_n = \sqrt{\sum (a_{nm}^2 + b_{nm}^2)} \quad \dots\dots\dots (6)$$

で表される大きさは測定座標軸に依存せず一定値をと

図 4 二次元フーリエスペクトルの回転不変の性質

図 5 球形状誤差のフーリエスペクトル

図 6 調和解析結果 1 (ロット a)

図 7 調和解析結果 2 (ロット b)

図 8 調和解析結果 3 (ロット c)

り、測定座標軸依存性のない評価ができる。ここで A_n は形状全体に対する相対的な寄与の尺度を与えており、広義なフーリエ変換であるという意味でスペクトルと呼ぶ。球面関数およびそれによる調和解析には、その他以下の特徴がある。

(i) Y_{nm} の幾何形状は、天頂角 θ 方向に n - m 回の凹凸をもち、方位角 ϕ 方向に m 回の凹凸を持つ。また n が偶(奇)数次の球面関数 Y_{nm} で表される形状誤差をもつ球面は、中心を通る断面の形状が n 次以下のフーリエ偶(奇)数成分で構成される。

(ii) 奇数次の球面関数は直径値が θ , ϕ の値にかかわらず一定であり偶数次は θ , ϕ の値につれて変動する。

(iii) n , m の値により各球面関数 Y_{nm} の最大振幅

値は変動するが振幅の r. m. s. 値はほぼ一定値となる。

直径値が一定となる奇数次の成分については、真円度における等径ひずみ成分にならない以後等径ひずみ球成分と呼ぶ。

4. 調和解析による形状誤差評価

4.1 成分表示と考察 図 6 に球面形状誤差の測定結果とその調和解析結果を示す。調和解析結果は横軸に n , 縦軸に m をとり、格子点上にその n , m に対応する成分の大きさ $\sqrt{a_{nm}^2 + b_{nm}^2}$ を高さ方向に示している。また、球に固有なスペクトルの大きさ A_n を図中上段に棒グラフで示した。ここで大きさは振幅の r. m. s. 値である。スペクトル A_n の大きさに測定座標

軸依存性がないことを示すため、座標軸を変えて調和解析した結果も図6(b)にあわせて示した。各成分の大きさはかなり異なっているのに対しスペクトル A_n の大きさは変化していないのがよくわかる。

この試料は等径ひずみ球成分である三次スペクトルが主力成分となっている。図7, 8はそれぞれ図6と製造ロットが異なる球の測定結果および調和解析結果である。いずれの球も等径ひずみ球成分である三次スペクトルは大きくなっているが、図7, 図8では、それがとりわけ大きいわけではなく、それぞれの球はスペクトルの構成比率が異なっていることに気がつく。そこで、それぞれの製造ロットからいくつかの球を取

図9 製造ロットの相違によるスペクトルの違い

図10 半成品と完成品の比較

り出し、形状誤差の調和解析を行った結果が図9である。ロット a, b, c はそれぞれ図6, 図7, 図8に対応している。この結果から、スペクトル構成比率の違いは製造ロットの違いによるものであることがよく分る。同一製造ロットの球は、加工条件が同じであるため同じスペクトル構成比率をもっているが、各製造ロット間では加工条件などが必ずしも同じでないため、同等級の球でも形状誤差にかなりの違いが現れたものと考えられる。

図10にロット a の半成品(真円度 $2\mu\text{m}$)と完成品の形状誤差調和解析結果を示す。半製品のスペクトル構成は、等径ひずみ球成分でない四次スペクトルが大きく、三次スペクトルは他の低次スペクトルと同じレベルである。また、完成品では三次以外のスペクトルは、半成品よりかなり小さくなっている。逆にいえば三次スペクトルで表される形状誤差成分は加工を受けず残されたといえる。

円筒部材などのセンタレス研削加工において、等径ひずみ成分である3山成分が選択的に残されやすいことが報告されている⁽³⁾。球の磨き工程も直径値のみを限定する同様な加工と考えられるから、最初はランダムなスペクトル構成比率、あるいは四次スペクトルをピークとする構成比率であったものが、加工過程が進むにつれて、直径値の変動がなく、自転による重心移動周期の短い形状誤差成分、すなわち三次スペクトル

図11 三次球面関数の幾何形状

で表される形状成分が選択的に残されたと考えられる。

三次の各球面関数の幾何形状を図 11 に示す。いずれも大円断面は円、または三次の等径ひずみ円で構成されていることがわかる。また、 Y_{30} は円すい状、 Y_{31} 、 Y_{33} は三角柱状、すなわち凹部が 3 箇所、 Y_{32} は正四面体状、すなわち凹部が 4 箇所である。円すい状成分と三角柱状成分の線形和は正四面体状成分となる。球は加工時に回転軸がランダムに変化することから、球形状は多軸対称であると考えられる。このことと三次スペクトルにピークを持つことから、球形状は正四面体状成分を主力成分とする形状になりやすいと考えられる。

5. 結 言

本研究は、実用の鋼球の球面形状誤差を二次元フーリエ変換を用いて測定した結果について、その評価方法に球面関数を用いた調和解析を試みたものである。その結果の検討および考察より得られた結論は以下のようになる。

(1) 球形状の測定には、二次元フーリエ変換を利用したが、二次元フーリエスペクトルは測定座標軸に依存した大きさを持ち、球面形状誤差の評価においては用いられない。

(2) 球面関数を直交関数系とする調和解析により測定座標軸に依存しない球面形状誤差の定量的評価ができ、実用の鋼球において球に固有なスペクトルに分離・評価することができた。

(3) いくつかの異なる製造ロットを調和解析した結果から、同一ロット内では同じスペクトル分布を持ち、ロット間では異なるスペクトル分布となることがわかった。また半成品と完成品の調和解析結果の比較から、加工に伴い、形状誤差の三次スペクトルが選択的に残されやすいことがわかった。以上のことから本解析法が球形状の評価に有効であることがわかった。

文 献

- (1) 糸魚川・松橋・中村, 機論, 56-524, C(1990), 1028.
- (2) 高橋, 物理数学, (1958), 118, 培風館.
- (3) 小川・宮下, 精密機械, 24-2(1958), 89.