振動と運動の制御手法の展望*

吉田 和夫*¹, 野波 健蔵*²

Overview on Theories for Vibration and Motion Controls

Kazuo YOSHIDA and Kenzo NONAMI

Key Words: Overview, Control Theory, Optimal Control, Feedforward Control, Robust Control, VSS

1. ま え が き

近年振動と運動の制御は、宇宙工学、建築土木、メカトロニクス、ピークダイナミクスなど先端技術において重要な技術的課題となっている。そしてアクティブ振動制御の研究が広範に行われており、1960年代以降発展した新しい制御理論の格好な応用分野となっている。本稿では、まず現在最も多く用いられている最適状態フィードバック制御について述べる。次に機械系や建築系では入力外乱を検出することができる場合が多いので、フィードフォワード制御を併合する手法についても触れる。さらに、振動制御においてはロバスト制御の重要性がさまざまな分野で指摘されているが、近年注目を集めている H^∞ 制御について説明する。最後にスライディングモード制御に代表される可変構造制御についても有力な振動制御手法と考えられるので紹介する。

2. 最適状態フィードバック制御

2.1 LQ 制御 最適制御理論は、システムが線形 (Linear) で評価関数が二次形式 (Quadratic) である場合、特に LQ 制御とか LQR (LQ レギュレータ) と言われる、よく知られている。振動制御を行う対象のダイナミクスと振動制御を行う目的とする物理量が以下の状態方程式と出力方程式で表されるものとする。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{z}(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}\mathbf{u}(t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし上式で $\mathbf{u}$ は制御入力、 $\mathbf{z}$ は外乱とする。

* 原稿受付 平成2年12月18日。

*¹ 正員、慶応義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。*² 正員、千葉大学工学部 (〒260 千葉市弥生町1-33)。

最適制御理論は、評価関数を最小にするように制御則を決定する理論である。得られるフィードバック則が線形になるためには、評価関数が二次形式評価規範の場合であり、またこの評価規範はエネルギーなどとの物理的対応がわかりやすく広く用いられている。ここでは、式(2)の出力の二乗を目的関数として、以下の二次形式評価規範

$$\begin{aligned} V(\mathbf{u}) = & \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) + 2\mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S}_f \mathbf{u}(t_f) \\ & + \int_0^{t_f} \{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{S} \mathbf{u}(t) \\ & + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \} dt \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

を用いる場合について述べる。上式において添字 T は転置を示し、 $\mathbf{Q}_f$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ は重み係数行列である。 $\mathbf{Q}$ と $\mathbf{S}$ は、一般に出力方程式 (観測方程式と異なる) の $\mathbf{c}$ と $\mathbf{g}$ を用いて次式のように表される。

$$\mathbf{Q} = \mathbf{c}\mathbf{c}^T, \mathbf{S} = \mathbf{c}\mathbf{g}^T \quad \dots\dots\dots (4)$$

入力外乱 $\mathbf{z}(t)$ が存在しない、過渡振動の確定的制御問題 (初期値問題) であれば、式(3)の評価関数を最小にする制御則は変分法により容易に求められ、次式で与えられる。

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) : \mathbf{F} = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$\mathbf{P}$ は以下の Riccati 方程式の一意正定解である。

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{P}} = & \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}^T) + (\mathbf{A} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}^T)^T \mathbf{P} \\ & - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^T \\ \mathbf{P}(t_f) = & \mathbf{Q}_f - \mathbf{S}_f \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_f^T \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ただし、以下の条件を満たすとする。

$(\mathbf{A} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}^T, \mathbf{B})$: 安定化可能,

$(\mathbf{A} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}^T, (\mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^T)^{1/2})$: 検出可能

2.2 LQG 制御 式(3)は確定的な制御問題で使われるものである。例えば入力が不規則な場合は状態変数が確率変数になるので評価関数式(3)の期待値で

評価することになるが、終端時刻 t_f を無限大にした場合の定常制御問題を考察する場合は、期待値が無限大になってしまうのでエルゴード過程の仮定において以下のような評価関数を設定する。

$$\begin{aligned} V(u) &= \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} E[\{\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) \\ &\quad + 2\mathbf{x}^T(t)S\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t)\} dt] \\ &= E[\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t)S\mathbf{u}(t) \\ &\quad + \mathbf{u}^T(t)R\mathbf{u}(t)] \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ただし、 E は数学的期待値を示す。

入力が正規分布(Gaussian)を有する白色雑音の場合は上式を最小にする最適制御則は式(5)、(6)と同様となり、確実等価性の原理として知られている⁽¹⁾。入力が有色雑音の場合は具体的には後で述べるが、成形フィルタを用いて、振動系の状態ベクトルと入力外乱の状態ベクトルを併せて拡大ベクトルを定義すれば、拡大系の状態方程式は白色雑音を受けるシステムとして定式化される。

式(6)の状態フィードバック制御は、すべての状態量が観測されてはじめて実現される。センサの数や取付位置には一般に制約がある場合が多く、そのような場合には観測器(オブザーバ)を用いる。一般に観測にはノイズを伴い、観測方程式として以下のように表されるものとする。

$$\mathbf{y}_0(t) = C_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \dots\dots\dots (8)$$

ただし、ここで式(1)における外乱 $\mathbf{z}$ と上式のノイズ項 $\mathbf{v}$ は、相関のない正規分布を有する白色雑音とし、次の条件を満足するものとする。

$$E\{\mathbf{z}(t)=0, E\{\mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(\tau)\}=Z\delta(t-\tau)$$

$$E\{\mathbf{v}(t)=0, E\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)\}=V\delta(t-\tau)$$

$$E\{\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)\}=0$$

このとき式(8)から状態変数を推定するカルマンフィルタは以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + K(t)[\mathbf{y}_0(t) - C_0\hat{\mathbf{x}}(t)] \\ &\dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$K(t) = XC_0^T V^{-1}(t) \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 X は誤共分散行列で、次式を満たす。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + b\mathbf{u}(t) + d\ddot{z}(t) \\ \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_s \\ \dot{x}_s \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_s^2 & -2\zeta_s\omega_s \end{pmatrix} \\ b &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_s &= y_s - z \end{aligned}$$

図 1 1 自由度振動系

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + X(t)A^T \\ &\quad - X(t)C_0^T V^{-1} C_0^T X(t) + DZD^T \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

式(8)のような観測雑音を受け、カルマンフィルタを用いるときの最適制御則は、観測器を用いないときと同様になり、最適制御と最適推定の問題が分離されることがよく知られている⁽²⁾。上記に述べたような確率的 LQ 制御を LQG (Linear Quadratic Gaussian) と制御という⁽³⁾。

2.3 1 自由度振動系の LQ 制御

LQ 制御あるいは LQG 制御は、現在最も多く用いられている。図 1 に示されるような 1 自由度振動系の制御が振動制御においては基本となるので、LQ 制御の結果について簡単に述べる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + b\mathbf{u}(t) + d\ddot{z}(t)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_s \\ \dot{x}_s \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_s^2 & -2\zeta_s\omega_s \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

いま $\omega_s=1$, $\zeta=0$ として、式(2)の目的とする物理量として相対変位を採用した場合、相対速度を採用した場合、加速度を採用した場合について、操作量に関する重みを小さくしたときの固有値の軌跡を図 2 に示す。この図から、重み係数が大きいとき、すなわち操作量が小さいときは、どの場合も減衰を増加させる傾向にあるが、さらに重み係数を小さくすると、すなわち操作量を大きくする相対変位と加速度の場合は剛性も変化して、前者は固有振動数が増加し、後者のときは逆に減少することがわかる。

2.4 LQG/LTR 制御 先に述べたように、LQG 制御においては制御器と観測器の設計は独立にでき、閉ループの安定性は保証される。そしてそのときの閉ループは安定余裕は、すべてのループでゲイン余裕が -6 dB から無限大、位相余裕が +60° であることが明らかにされている⁽⁴⁾。しかしながら、観測器を用いると、純粋な状態フィードバックの場合と比較して

図 2 重み係数の変化による固有値の軌跡

安定余裕は劣化する⁽⁵⁾。そのため、状態フィードバックを用いた場合と同じ安定余裕をもつように観測器を設計する手法が提案され、LTR(Loop Transfer Recovery)制御といわれている。

いま簡単化のため式(7)の定常制御で、 $S=0$ のときを考えよう。このとき観測器は補償器として以下の伝達関数を有する。

$$U(s)=F(sI-A-BF+KC_0)^{-1}KY(s) \cdots (12)$$

そして一巡伝達関数 $L(s)$ は、入力 u の点で以下のように与えられる。

$$L(s)=F(sI-A-BF+KC_0)^{-1}KC_0(sI-A)^{-1}B \cdots (13)$$

観測器を用いないフルオーダーの状態フィードバック制御の場合の一巡伝達関数、すなわち開ループ伝達関数は

$$G(s)=F(sI-A)^{-1}B \cdots (14)$$

となる。式(12)と(13)が等しくなるためには次式を満足しなければならない。

$$K\{I+C_0(sI-A)^{-1}K\}^{-1}=B\{C_0(sI-A)^{-1}B\}^{-1} \cdots (15)$$

上式を実現するためには、制御対象が最小位相系の場合カルマンゲインを以下のように選定すればよい。

$$K=XC_0^T R^{-1} \cdots (16)$$

ただし X は以下の式を満たす正定行列である。

$$AX+XA^T-XC_0V^{-1}C_0^T X+q^2BZB^T=0, \\ q \rightarrow \infty \cdots (17)$$

このLTR制御を実現しようとするとき、式(16)から明らかなように高ゲインフィードバックになるため、例えばサンプリング周期を短くしなければならないとか、ハードウェア上の制約を大きく受けるといわれている。上記のような制御の考え方は、漸近的LQG制御としてより一般化されている⁽⁶⁾。

2.5 ロバストLQG制御 制御系を設計する場合の不確定性は非モデル化ダイナミクスのような構造化されていないものと、パラメータの変動のような構

造化されているものと大きく分けられる。この後者の不確定性に対しては、最近ロバストLQG制御手法が提案されている⁽⁷⁾。

これは簡単にまとめると以下ようになる。いまパラメータの不確定性を示すパラメータ c_i とそのシステム行列 A への影響を示す行列 A_i を用いてなんらかの方法で以下のように状態方程式が表されたとして、以下のLQG制御問題を考察しよう。

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\left[\sum_{i=1}^M c_i A_i\right]x(t)+Bu(t)+Dz(t) \cdots (18)$$

$$y_0(t)=C_0x(t)+v(t) \cdots (19)$$

$$V(u)=E[x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)] \cdots (20)$$

ただし z と v はLQG制御の項で述べたような性質を有する白色雑音とする。

ここで A_i が $\alpha_i \beta_i$ と分解できたとして、 α_i と β_i それぞれで構成する行列を α と β とする。このとき、パラメータ誤差によるフィードバック項を外乱とみなしてこれをシステムノイズとして考慮し、その項による出力を評価関数の中に考慮することによって以下のような修正LQG制御問題を定義する。

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+Dz(t)+\alpha u_\alpha(t) \cdots (21)$$

$$E\{u_\alpha(t)u_\alpha^T(\tau)\}=r_1\delta(t-\tau) \cdots (22)$$

$$y_0(t)=C_0x(t)+v(t) \cdots (23)$$

$$V(u)=E[x^T(t)\{Q+r_2\beta^T\beta\}x(t)+u^T(t)Ru(t)] \cdots (24)$$

r_1 の大きさはカルマンゲインに影響を与え、 r_2 の大きさは評価関数における不確定性に関する評価に影響を与える。このようにして r_1 と r_2 の大きさを適当に選定してロバストLQG制御を設計する。

アンテナの振動制御へこの手法を応用した結果、安定余裕が劣化しても、固有振動数の誤差のようなパラメータ誤差に関しては大変ロバストな制御系が設計されることが示され、必ずしも安定余裕がロバスト性の尺度にならないことが明らかにされている。

2.6 制御構造制約を有する最適制御 これは図3に示すように状態フィードバック制御に構造的な制約を受ける場合の最適化問題である。すなわち、状態変数にフィードバックゲインをかけることができず、 Mx で表される量にしかフィードバックゲインをかけることができないような制約を有する最適制御問題を制御構造制約付き最適制御問題といい、 M 行列は制御構造制約行列といわれる⁽⁸⁾。

制御構造制約を有する最適制御問題の解は、初期値に依存することになり、一般に二点境界値問題となる。その解法は制御構造制約がない場合と比較すると

図3 制御構造制約を受けるシステムの最適化問題

かなり面倒になる。しかも、厳密に解を数値計算によって求めたとしても解は初期値に依存し、初期値が異なった場合最適性が大きく崩れるかもしれない。そこで定常制御の場合に対していくつかの準最適化法が提案されており、二つの手法をここでは紹介する。

(i) 最小ノルム法

この方法は、制御構造制約がない場合の最適な状態フィードバックゲイン F_0 をまず求めて、この F_0 と制御構造制約 M を有するフィードバックゲイン

$$F = HM \dots\dots\dots (25)$$

の差のノルムを最小にするよに H を決定する方法である。すなわち、

$$\min_H \|F - F_0\| \dots\dots\dots (26)$$

の条件は評価関数

$$J = \sqrt{u\{(F - F_0)^T(F - T_0)\}} \dots\dots\dots (27)$$

を最小にすることと等価であり、その解は次のように与えられる。

$$F^* = HM \dots\dots\dots (28)$$

$$H^* = F_0 M^T (M M^T)^{-1} \dots\dots\dots (29)$$

(ii) 誤差励振最小法

制御構造制約をもつ最適制御問題の解は、本質的には応答に依存する。すなわち、過渡振動問題であれば初期値に依存し、持続する外乱を有するならば入力外乱に依存する。(i)の最小ノルム法は、これらの情報を用いていない。このことを考慮したのが以下の誤差励振最小法である。

まず、制御構造制約がない場合の最適制御則を計算する。その場合の制御系は状態ベクトルの応答を x^0 とする。いま、制御構造制約をもつ場合の応答を x^* とし、これと最適制御を行った場合の応答 x^0 との誤差

$$e(t) = x^*(t) - x^0(t) \dots\dots\dots (30)$$

を最小にするように制御構造制約付きの最適制御則を求める。誤差 $e(t)$ は次式を満足する。

$$\dot{e}(t) = (A + B + F^*)e(t) + Bq(t) \dots\dots\dots (31)$$

$$q(t) = (F^* - F^0)x(t) \dots\dots\dots (32)$$

$e(t)$ を最小にしたいのだが、解法の簡便さからこの問題を近似的に励振項を最小にする問題に置き換え、評価関数

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T q^T(t) R q(t) dt \dots\dots\dots (33)$$

を最小にする問題に帰着させる。この問題は容易に解けて、制御構造制約付きの最適制御則は以下のように与えられる。

$$F^* = HM \dots\dots\dots (34)$$

$$H^* = F^0 V_{x^0} M^T (M V_{x^0} M^T)^{-1} \dots\dots\dots (35)$$

ただし、インテンシティ行列 W を有する白色雑音入力の場合は $[V_{x^0}]$ は以下の共分散方程式の解である。

$$(A + B P^0) V_{x^0} (A + B F^0)^T + D Z D^T = 0 \dots\dots\dots (36)$$

過渡応答問題の場合は、初期値が単位超球面上に分布していると仮定すると、上式の第3項 $D W D^T$ を単位行列に置き換えればよい。

以上制御構造制約を有する最適制御問題について述べたが、この手法はPID制御や受動的要素を用いる場合などにも適用できる。上記の手法はもともと出力フィードバック制御の手法として開発されたものであり、実際の制御系開発においては非常に有効な手法の一つである。また、近年このような近似手法でなく直接繰り返し法で最適解を求めることも行われている⁽⁹⁾。

2・7 周波数成形最適制御 この周波数重み付き最適制御理論は、Gupta⁽¹⁰⁾によって提案された。この手法は、従来の最適制御理論の評価関数を周波数領域で定義して周波数領域で重みを変えることが可能な点が特徴である。

いま以下で表される最適制御問題を考察しよう。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \dots\dots\dots (37)$$

$$\begin{aligned} V(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E[X^T(\omega) Q(\omega) X(\omega) \\ &\quad + 2X^T(\omega) S(\omega) U(\omega) + U^T(\omega) R(\omega) U(\omega)] d\omega \end{aligned} \dots\dots\dots (38)$$

評価関数は、パーセバルの定理を用いことによつそれぞれの変数の大文字で表されたフーリエ変換で表現されている。重み係数も当然周波数の関数として定義される。一般に後の理論展開における実現問題の観点からすると、これらの重み係数は有理多項式で近似できるものである必要がある。

ここで重み関数の因数分解をして次の変数を導入する。

$$Q(\omega) = Q_r^*(\omega) Q_r(\omega) \dots\dots\dots (39)$$

上式においてアスタリスクは共役転置を示す。ここで以下のような新しい変数を導入する。

$$Z_0(\omega) = Q_r(\omega) X(\omega) \dots\dots\dots (40)$$

式(39)と(40)の状態方程式表現すると、一般に以下のように表される。

$$\dot{x}_0(t) = A_0 x_0(t) + B_0 u(t) \dots\dots\dots (41)$$

$$z_0(t) = C_0 x_0(t) + D_0 u(t) \dots\dots\dots (42)$$

S と R について全く同様な手順で状態方程式表現する。そして元のシステムと合体して以下の拡大システムを定義する。

$$\dot{x}'(t) = A' x'(t) + B' u(t) \dots\dots\dots (43)$$

$$\dot{x} = (x \ x_0 \ x_s \ x_u)^T \dots\dots\dots (44)$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ B_0 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_u \end{bmatrix}$$

$$B' = [B^T \ 0 \ B_s^T \ B_u^T]^T$$

このとき拡大ベクトルで評価関数式(38)を表現すると

$$V(u) = E[x'^T(t)Q'x'(t) + 2x'^T(t)S'u(t) + u^T(t)R'u(t)] \dots\dots\dots (45)$$

ただし、

$$Q' = \begin{bmatrix} D_0^T D_0 & D_0^T C_0 & D_0^T C_s & 0 \\ C_0^T D_0 & C_0^T C_0 & C_0^T C_s & 0 \\ C_s^T D_0 & C_s^T C_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_u^T C_u \end{bmatrix}$$

$$S' = \begin{bmatrix} D_0^T D_0 \\ C_0^T D_s \\ 0 \\ C_u^T D_u \end{bmatrix}$$

$$R' = D_u^T D_u$$

式(43)と(45)は通常的最適制御問題だから、その解は以下の式で与えられる。

$$u^0(t) = -R'^{-1}(B'^T P + S')x'(t) \dots\dots\dots (46)$$

$$-\dot{P} = P(A' - S'R'^{-1}S'^T) + (A' - S'R'^{-1}S'^T)^T P - PB'R'^{-1}B'^T P + Q - S'R'^{-1}S'^T \dots\dots\dots (47)$$

得られた制御則の状態変数線図は図4のようになる。

図4 周波数成形最適制御

3. フィードフォワード制御

3.1 外乱相殺制御 アクティブ振動制御を効果的に実現するためにはフィードフォワード形の外乱相殺制御が有効である⁽¹¹⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾。以下に示す制御方法は一般の多自由度振動系をモード座標に変換し、各モードごとに外乱相殺制御系を設計するという考え方である⁽¹³⁾。したがって、外乱の作用点と制御力の作用点が異なっても外乱相殺制御系の設計が可能である。ここで外乱は調和励振力とみなし最小次元オブザーバにより推定した後、フィードフォワード制御力によりこれを相殺する。

まず、一般の多自由度運動方程式は次のようになる。

$$\ddot{\xi} + \Lambda \dot{\xi} + \Omega^2 \xi = \Phi^E w + \Phi^F u \dots\dots\dots (48)$$

ここで、 Λ, Ω^2 はモード減衰行列、周波数行列、 ξ は一般化モード変位ベクトル、 w は一般化外乱ベクトル、 u は制御入力ベクトル、 E, F は外力と制御力の作用する場所を示す行列である。 Φ は正規化されたモード行列を示す。いま簡単のため一つの外乱として一つの制振力を考えて

$$\Phi^E w = ew, \quad \Phi^F u = fu \dots\dots\dots (49)$$

とする。 i 次モードについて状態方程式を記述すると、

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \dot{\xi}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta_i \omega_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \dot{\xi}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_i \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ d_i \end{bmatrix} w \dots\dots\dots (50)$$

または

$$\dot{x} = Ax + bu + dw \dots\dots\dots (51)$$

ここで制御入力 $u = u_{fb} + u_{ff}$ とする。ここで u_{fb} はフィードバック制御入力、 u_{ff} はフィードフォワード制御入力である。 u_{fb} は LQ 制御などで設計すれば式(51)は

$$\dot{x} = (A - bk)x + bu_{ff} + dw \dots\dots\dots (52)$$

となる。外乱を調和励振力と仮定すれば $w = a \cos \omega t$ から次の状態方程式を得る。

$$\dot{w} = A_d w \dots\dots\dots (53)$$

ここで

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w \\ \dot{w} \end{bmatrix}$$

よって、外乱を含む拡大系は

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + B u_{ff} \dots\dots\dots (54)$$

ここで

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A - bk & D \\ 0 & A_d \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

外乱ベクトル w は測定できないため、最小次元オブ

ザーバで推定する。よって、フィードフォワード制御入力は

$$u_{ff} = -\frac{d_i}{b_i}w = -\frac{d_i}{b_i}[1 \ 0][z + LY] \dots\dots\dots (55)$$

ここで z はオブザーバの変数, L は設計パラメータ, Y は出力変数である。この結果, 最終的に次式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bK - bL & D & -D \\ 0 & A_d & 0 \\ H & 0 & A_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ z \end{bmatrix} \dots\dots\dots (56)$$

式(56)はフィードバックとフィードフォワードの併合制御によって D と $-D$ の項により外乱相殺制御系が構成されていることを意味している。式(56)の外乱相殺制御系は w を各モードの共振点に一致させることにより不規則外乱系にも十分制振効果を発揮する。

3・2 外乱包含制御 力学系における振動源すなわち外乱は, その特性がある程度わかっていたり, 検出することができる場合が多い。そこで, 外乱を包含した制御手法が有力な制振手法の一つとなる。外乱を包含した制御手法には, さまざまな手法があるが, ここではある周波数領域の振動数成分を有するような不規則入力の場合に対しての設計法を紹介する。

この手法は, まず外乱の特性がわかっている場合, たとえば外乱のパワースペクトル密度がわかっているとき, その特性から外乱のダイナミクスを図5のように仮定して, 外乱のダイナミクスと振動系のダイナミクスを合体して拡大システムを構成して, このシステムに従来の最適制御理論を適用するやり方である⁽¹⁴⁾。

具体的には以下のとおりである。まずなんらかの手法で外乱のダイナミクスが

$$\dot{v}(t) = A_z v(t) + d_z w \dots\dots\dots (57)$$

$$z(t) = C_z v(t) \dots\dots\dots (58)$$

図5 外乱包含制御

と表されたとすると, 振動系の状態方程式と合体して, 以下のような拡大システムを定義する。

$$\begin{aligned} \dot{x}'(t) &= A' x'(t) + B' u(t) d' w \\ x' &= \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} A & DC_z \\ 0 & A_z \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \\ d' &= \begin{pmatrix} 0 & d_z \end{pmatrix} \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

上記の状態方程式に対して評価関数を拡大システムの状態ベクトルで設定すれば, 通常のLQあるいはLQGの最適制御問題として定式化できる。これから得られる最適制御則は以下のように外乱の状態フィードフォワード制御と振動系の状態のフィードバック制御の和で表される⁽¹⁵⁾。

$$u(t) = F_b x(t) + F_1 z(t) \dots\dots\dots (60)$$

この結果も図5に示す。

このような外乱包含制御手法を用いる場合, 入力の特性の同定精度が重要となるが, 実際の入力はずしも精度が十分とは言えないので, 仮定した特性と異なる入力が入ってくる場合に対するロバスト性が問題となる。これに対しては, 振動系を共振させるような最悪入力を考えることによってカルマンフィルタを用いる手法が提案されている⁽¹⁶⁾。

4. ロバスト制御— H^∞ 制御を中心にして—

本来, フィードバック制御系にはゲイン余裕, 位相余裕で知られるロバスト安定条件の概念があり, 最適レギュレータ(LQ制御)にも優れた低感度特性や円条件を満足するロバスト安定性が存在する。しかし, LQ制御をそのまま適用すると高周波域でも一様に制御を及ぼすため必ずしも望ましい結果とならないことがある。さらに, 前述されたようにオブザーバやカルマンフィルタ(LQG制御)併合形最適レギュレータは円条件を満足せずロバスト安定性が劣化する。このようにロバスト安定性が保証されないのは二乗積分評価に問

図6 一般化制御対象と制御器

題があるため、再び周波数領域での評価法が見直され新しく H^∞ 最適制御理論が誕生した⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾。 H^∞ 最適制御理論の特徴などについては多くの解説書があるのでそれを参照いただきたい⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾。以下、 H^∞ 制御系の設計法を述べる⁽²¹⁾。

図6のような制御系について考える。ここで、 $P(s)$ は低次元化された制御対象、 $K(s)$ は制御器であり、 u は実際の制御入力、 w は仮想的に付け加えた外乱、 y は観測出力、 $z \triangleq [z_1 \ z_2]^T$ は制御量である。また、 $W_1(s)$ 、 $W_2(s)$ は後述する重み行列である。

さて、図6で w から u までの伝達関数

$$T(s) = K(s)P(s)[I - K(s)P(s)]^{-1} \quad \dots\dots\dots (61)$$

は相補感度関数と呼ばれ、制御対象 $P(s)$ のモデリング誤差に対する閉ループ系の安定余裕を評価するために用いられる。今安定な制御対象 $P(s)$ に図7のような乗法的な不安定変動 $\Delta_m(s)$ (今の場合無視された高次モードとする)があり、 $P(s)$ が

$$P'(s) = P(s)[I + \Delta_m(s)] \quad \dots\dots\dots (62)$$

と変動した場合を考えよう。この場合、

$$\|T(s)\Delta_m(s)\|_\infty < 1 \quad \dots\dots\dots (63)$$

ならばスモールゲイン定理から閉ループ系も安定であることが知られている⁽¹⁸⁾。

ただし、 $\|\cdot\|_\infty$ は H^∞ ノルムであり、例えば、 $\|F(s)\|_\infty$ は $F(j\omega)$ の最大特異値 $\sigma[F(j\omega)]$ のすべての周波数での最大値、すなわち、

$$\|F(s)\|_\infty = \sup_{-\infty < \omega < \infty} \sigma[F(j\omega)] \quad \dots\dots\dots (64)$$

を表す。ただし、

$$\sigma[F(j\omega)] = \sqrt{\lambda_{\max}[F^T(-j\omega)F(j\omega)]} \quad \dots\dots\dots (65)$$

を表す。 F がスカラならば、 $\|F(s)\|_\infty$ はゲインの最大値、すなわち $|F(j\omega)|$ の最大値となる。

さて、 $\Delta_m(s)$ は不確定としたがそのゲイン線図の各周波数における大きさの上限が既知であり、

$$\sigma[\Delta_m(j\omega)] < \sigma[W_1(j\omega)] \quad \dots\dots\dots (66)$$

を満たすとする。ただし、 $W_1(s)$ はスカラとする。するとこの場合、

$$\|W_1(s)T(s)\|_\infty < 1 \quad \dots\dots\dots (67)$$

ならば式(63)も満たされ、 $\Delta_m(s)$ の変動に対してロバスト安定となる。ただし、変動は制御対象の不安定極を変えないものとする。今の問題では、 $P(s)$ 、 $P'(s)$ 、

図7 乗法的な不確定性のあるモデル

$\Delta_m(s)$ は

$$P'(s) = C_P(sI - A_P)^{-1}B_P \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$P(s) = C_P(sI - A_P)^{-1}B_P \quad \dots\dots\dots (69)$$

$$\Delta_m(s) = P(s)^{-1}[P'(s) - P(s)] \quad \dots\dots\dots (70)$$

で与えられており $P(s)$ と $P'(s)$ とともに安定であるのでこの条件は満たされている。式(67)が成り立つと $P(s)$ を制御対象として設計した補償器は実際の制御対象が $P'(s)$ である場合にも閉ループ系を安定にし、スピルオーバーが防止できる。

次に、 w から y までの伝達関数について考える。この伝達関数を $M(s)$ とすると、

$$M(s) = P(s)[I - K(s)P(s)]^{-1} \quad \dots\dots\dots (71)$$

となり、整定関数と呼ばれ、 $M(s)$ を低周波数域で小さくすれば極が左半平面遠くに移動し、速応性のあるレギュレータが設計できることが知られている⁽¹⁸⁾。よって、低次モードの制振効果を高めるために、低周波数で大きいゲインを持つ重み行列 $W_2(s)$ を導入し、

$$\|W_2(s)M(s)\|_\infty < 1 \quad \dots\dots\dots (72)$$

とすることを考える。

以上二つの要求式(67)、(72)を同時に満足するために新たな評価関数

$$\left| \frac{W_1(s)T(s)}{W_2(s)M(s)} \right|_\infty < 1 \quad \dots\dots\dots (73)$$

を満たす制御器を求めれば、(67)、(72)も満たされ、ロバスト安定かつ、低次モードが良好な過渡特性を持つ制御系が設計できる。

式(73)を満たす制御器を求める問題は H^∞ 制御理論における一種の混合問題である。図6により、入力 (w, u) と出力 (z_1, z_2, y) の関係は

$$\begin{aligned} z_1(s) &= W_1(s)u(s) \\ z_2(s) &= W_2(s)P(s)w(s) + W_2(s)P(s)u(s) \\ y(s) &= P(s)w(s) + P(s)u(s) \\ u(s) &= K(s)y(s) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (74)$$

すなわち、

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (75)$$

で表現される。ただし、 $z = [z_1 \ z_2]^T$ である。ここで、

$$W_1(s) \triangleq C_{w1}(sI - A_{w1})^{-1}B_{w1} + D_{w1}$$

$$W_2(s) \triangleq C_{w2}(sI - A_{w2})^{-1}B_{w2} + D_{w2}$$

を式(73)に代入すると、 $(w, u) \sim (z_1, z_2, y)$ 間の伝達関数 $G(s)$ は、状態方程式で実現し、

$$G(s) \triangleq \left[\begin{array}{ccc|cc} A_{w1} & 0 & 0 & 0 & B_{w1} \\ 0 & A_{w2} & B_{w2}C_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_P & B_P & 0 \\ \hline C_{w1} & 0 & 0 & 0 & D_{w1} \\ 0 & C_{w2} & D_{w2}C_P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_P & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \dots\dots\dots (76)$$

となる。ただし、

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \triangleq C(sI - A)^{-1}B + D$$

の記号⁽¹⁹⁾を用いた。

あるいは

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \dots\dots\dots (77)$$

制御入力 u は $D_{22}=0$ として状態フィードバックの場合

$$u = Kx \dots\dots\dots (78)$$

出力フィードバックの場合は

$$u = Ky \dots\dots\dots (79)$$

となる。今後は K 求める問題となる。式(77)～式(79)が H^∞ 制御系の定式化である。

さて、制御器を

$$K(s) = C_k(sI - A_k)^{-1}B_k \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & 0 \end{array} \right] \dots\dots\dots (80)$$

とする。 H^∞ 制御器 $K(s)$ の求め方についてはさまざまな解法がある。これらは伝達関数に基礎をおく解法⁽²²⁾と状態方程式に基礎をおく解法⁽²³⁾に分けられる。後者に対しては状態フィードバックによる場合と出力フィードバックによる場合があるが、状態フィードバックの場合は D_{ij} のランクによって解は複雑になるが⁽²³⁾ほぼ LQ 制御と同様である。ここでは出力フィードバックによる解法の手順を述べる。

ステップ 1 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して Riccati 方程式

$$\begin{aligned} &P[A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1}D_{12}^T C_1] \\ &+ A - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1}D_{12}^T C_1]^T P \\ &+ P[B_1 B_1^T - B_2(D_{12}^T D_{12})^{-1}B_2^T]P \\ &+ C_1^T[I - D_{12}(D_{12}^T D_{12})^{-1}D_{12}^T]C_1 + \varepsilon I = 0 \dots\dots (81) \end{aligned}$$

の正定解 $P > 0$ を求める。

ステップ 2 十分小さい $\mu > 0$ に対して Riccati 方程式

$$\begin{aligned} &QA^T + AQ + QC_1^T C_1 Q - \frac{1}{\mu} QC_2^T C_2 Q \\ &+ B_1 B_1^T + \mu I = 0 \dots\dots\dots (82) \end{aligned}$$

の正定解 $Q > 0$ を求める。

ステップ 3 $Q^{-1} > P$ が成り立つことを確かめる。

ステップ 4 制御器のパラメータを

$$\begin{aligned} C_k &= F \\ B_k &= -(Q^{-1} - P)^{-1}Q^{-1}K \\ A_k &= A + B_2 C_k - B_k C_2 - (Q^{-1} - P)^{-1}M \end{aligned} \dots\dots\dots (83)$$

で与える。ただし、

$$\begin{aligned} F &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1}(B_2 P + D_{12} C_1) \\ K &= -\frac{1}{2\mu} QC_2^T \\ M &= C_k \{B_2^T P + D_{12}^T (C_1 + D_{12} C_k)\} \\ &+ (Q^{-1} - P)^{-1}B_1 B_1^T P - \varepsilon I \end{aligned} \dots\dots\dots (84)$$

である。

以上は、低次元化モデルに伴うスピルオーバー不安定防止と制振制御の H^∞ 制御系設計法であるが、一般のロバスト安定制御系の設計法も同様である。

H^∞ 制御理論はシステムの不確定性や、変動を同周波数領域でとり扱う設計法であったが、一方、状態方程式で定量化される不確定性や変動に対するロバスト制御系の設計法としては特異摂動法がある⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾。これは例えば低次元化モデルの作成に伴って高次モードを打ち切った場合、無視したモードは低次元化モデルにとって摂動と考え、このような摂動のある場合でも低次元化モデルが安定かつ無視したモードも安定となるように制御系を設計する方法である。この場合、線形動的システムは次式となる⁽²⁵⁾。

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}\bar{x} + B_1u \\ \mu \dot{\bar{x}} = A_{21}x + A_{22}\bar{x} + B_2u \end{cases} \dots\dots\dots (85)$$

非摂動系を考えて $\mu = 0$ とおけば

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}\bar{x} + A_{12}\bar{x} + B_1u \\ 0 = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{x} + B_2u \end{cases}$$

となる。 $\bar{x}$ を消去すれば

$$\dot{\bar{x}} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\bar{x} + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u \dots\dots\dots (86)$$

を得る。式(85)で $t = \mu\tau$ とおいて $\mu \rightarrow 0$ とすれば次式

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = A_{21}x_0 + A_{22}\bar{x} + B_2u \dots\dots\dots (87)$$

を得る。さらに、 $\bar{x} = \bar{x} - A_{22}^{-1}A_{21}x_0$ なる変換により

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = A_{22}\bar{x} + B_2u \dots\dots\dots (88)$$

となる。式(86), (88)がある制御則で安定化できるならば $\mu_1 > 0$ が存在して $t < \mu \leq \mu_1$ を満たす任意の μ に対して式(85)を安定化できる。さらに、式(86)と式(88)を安定化する状態フィードバックを $l = K_0 \bar{x}$, $u = K_1 \bar{z}$ とすれば次の制御入力式(85)を安定化する。

$$u = K_1 z + \{K_1 A_{22}^{-1}(A_{21} + B_2 K_0) + K_0\} x \quad \cdots \cdots (89)$$

5. 可変構造制御—VSS理論(Variable Structure System)に基づくスライディングモード制御—

可変構造制御理論=スライディングモード制御は線形系はもちろん、非線形系、時変形などに適用できる理論としてソ連を中心に研究されてきた⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾。しかし、近年のデジタル制御の普及に伴い改めて可変構造制御=スライディングモード制御が見直されてきた。とくに状態変数を切換面に拘束するという滑り状態の実現により、パラメータ変動、非線形項、未知パラメータ等に対するロバスト制御系が設計できる点に着目して、最近ではロボットアーム⁽²⁸⁾、電動機⁽²⁹⁾、除振台⁽³⁰⁾等に応用され始めている。

さて、可変構造制御理論の原理を説明する⁽³¹⁾。今、次のように線形時不変の制御対象を考える。

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad X \in R^n, \quad u \in R^m \quad \cdots \cdots (90)$$

線形制御理論では、状態フィードバック

$$u = -KX, \quad K \in R^{m \times n} \quad \cdots \cdots (91)$$

を制御入力とする。このフィードバック行列 K が極配置、LQ 制御などの手法で求められる。これに対し、VSS 理論では式(91)の K の各成分 k_{ij} が制御対象の状態に従い次のように切り換わる。

$$k_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{if } S_{ij}(X) > 0 \\ \beta_{ij} & \text{if } S_{ij}(X) < 0 \end{cases} \quad \cdots \cdots (92)$$

$$i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, n \quad \alpha_{ij} \neq \beta_{ij}$$

$S_{ij}(X)$: 状態 X の関数

これから mn 個の関数 S_{ij} に対して k_{ij} は各々二つの値をとるので合計 2^{mn} 組存在する。一つの K に対応する制御系を VSS 理論では「構造」と呼ぶ。ここから可変構造制御理論と名付けられている。スライディングモード制御とは VSS 理論のなかですべての軌跡が一つの面に集中する現象でこれをすべり状態と呼び、この状態で原点(平衡点)に収束させる制御をスライディングモード制御という。このことからスライディングモード制御は VSS 理論の重要な一部を構成している。スライディングモード制御がロバスト性を有するのは、式(92)のフィードバックゲインが線形制御が変動幅零であるのに対してある幅で変動できるからである。図8にスライディングモード制御の概略図を示す。

図8 スライディングモード制御の概念図⁽³¹⁾

具体的に式(92)を導こう⁽²⁶⁾⁽²⁸⁾。切換面は次のようにおく、 n 次状態ベクトル X を考え

$$\sigma = SX = [s_1, s_2, \dots, s_n] X \quad \cdots \cdots (93)$$

滑り状態では

$$\sigma = 0 \quad \cdots \cdots (94)$$

$$d\sigma/dt = 0 \quad \cdots \cdots (95)$$

式(95)より等価制御入力 U_{eq} が求められる。

$$d\sigma/dt = SdX/dt$$

$$= S(AX + Bu)$$

$$= 0$$

$$\therefore U_{eq} = -(SB)^{-1}SAX \quad \cdots \cdots (96)$$

切換面パラメータ S は極配置により求める。

次に滑り状態の存在を考える。 σ に関するリアプノフ関数を次のように選ぶ。

$$V(\sigma) = 0.5\sigma^2 \quad \cdots \cdots (97)$$

これを時間で微分して

$$dV/dt = \sigma(d\sigma/dt) \quad \cdots \cdots (98)$$

関数 $V(\sigma)$ はすべての σ に対して、全状態空間で正定である。そして、 dV/dt が負定関数になるならば、 σ は大域的に可到達となり、滑り状態が存在する。したがって滑り状態の存在条件に合うためには dV/dt が負定関数になるような、フィードバックゲインを選ばなければならない。 $u = KX$, ただし、 K はフィードバックゲインベクトルより次式となる。

$$dV/dt = \sigma(d\sigma/dt)$$

$$= \sigma SdX/dt$$

$$= \sigma S(AX + Bu)$$

$$= \sigma SAX + \sigma SBKX$$

$$= SA\sigma X + SBK\sigma X < 0 \quad \cdots \cdots (99)$$

よって切換フィードバックゲインは次式となる。

$$k_i = k_{i-} < -(SB)^{-1}SA, \quad \sigma x_i > 0 \quad \cdots \cdots (100)$$

$$k_i = k_{i+} > -(SB)^{-1}SA, \quad \sigma x_i < 0 \quad \cdots \cdots (101)$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

実際の振動制御系にスライディングモード制御を適用する場合、切換面の設定が容易ではなく現状では試行錯誤に頼らざるを得ない。この課題に対する研究が今

後必要であろう。

6. あとがき

あらゆる制御手法が振動と運動の制御の手法といっても過言ではない。ここで紹介した手法は紙面の都合上振動制御に片寄りかつ代表的な手法についてのみ述べた。最近ではフィジィ制御やニューラルネットによる制御の手法も振動制御に応用されようとしており、今後そのような研究も増加するであろう。

振動制御は、振動系のモデリング、アクチュエータやセンサなどの制御に関連したハードウェア、制御手法などがバランスよく組合されてはじめてよい性能が実現される。そのような意味においては、手持ちの制御手法を多く持ち、それぞれの手法の利点、欠点を熟知して個々の問にあった制御手法を選択し、そして制御系を設計する総合的な方法論を持つことが重要となる。

文 献

- (1) Bertsekas, D. P., *Dynamic Programing and Stochastic Control*, (1976), 70, Academic Press.
- (2) Wonham, W. M., *SIAM J. Control*, **6** (1968), 312.
- (3) Athans, M., *IEEE Trans.*, AC 16-6 (1971), 529.
- (4) Safonov, M. G. and Athans, M., *IEEE Trans.*, AC 22-4 (1977), 173.
- (5) Doyle, J. C. and Stein, G., *IEEE Trans.*, AC 24-4 (1979), 607.
- (6) Tahk, M. and Speyer, J., *IEEE Trans.*, AC 23-9 (1987), 793.
- (7) Billeloch, P. A. and Mingori, D. L., *J. Guidance, Control and Dynamics*, **13**-1 (1990), 66.
- (8) Kosut, R. L., *IEEE Trans.*, AC 15-5 (1970), 557.
- (9) Larssonneur, R., *Proc. 3rd Int. Conf. Rotordynamics*, (1990), 509.
- (10) Gupta, N. K., *J. Guidance and Control*, **3**-6 (1980), 529.
- (11) Wonham, W. M. and Pearson, J. B., *SIAMJ. on Control*, **12**-1 (1974), 5.
- (12) 水野・樋口, 計測自動制御学会論文集, **20**-12 (1984), 1095.
- (13) 野波, 「振動と運動の制御」シンポジウム講演論文集, (1990), 414.
- (14) Johnson, C. D., *Control and Dynamic Synlems*, **12** (1976), 387.
- (15) Kwakernaak, H. and Sivan, R., *Linear Optimal Control Synlems*, (1972), 262, John Wiley.
- (16) 西村・ほか2名, 機論, **55**-517, C (1989), 2321.
- (17) Zames, G., *IEEE Trans.*, AC-26-2 (1981), 585.
- (18) Doyle, J. C. and Stein, G., *IEEE Trans. Auto Control*, AC-26-1 (1981), 4.
- (19) Francis, B. A., *A Course in H^∞ Control Theory*, (1987), Springer-Verlag.
- (20) 木村, 計測と制御, **29**-2 (1990), 1.
- (21) 王・ほか3名, 機論, **57**-533, C (1991), 196.
- (22) 細江, 文献(20)の120ページ.
- (23) 三平・美多, 文献(20)の129ページ.
- (24) Naidu, D. S., *Singular Perturbation Methodology in Control Systems*, (1988), Peter Pertgrinus.
- (25) 鈴木, コンピュートロール, No.13 (1986), 18, コロナ社.
- (26) Utkin, V. I., *IEEE Trans. on AC*, AC-22 (1977), 212.
- (27) Itokins, U., *Control Systems of Variable Structure*, John Wiley & Sons (1976).
- (28) 岩田・ほか2名, 文献(13)の420ページ.
- (29) Harashima, F. ほか2名, *IEEE Trans. IE.*, IE-32, 3, 238.
- (30) 岩田・内田, 文献(13)の114ページ.
- (31) 原島・橋本, 文献(25)の72ページ.