能動的制振装置の最適設計法について*

光田 慎治^{*1}, 背戸 一登^{*2}

Optimal Design Method of an Active Vibration Controller

Shinji MITSUTA and Kazuto SETO

This paper concerns the optimal design method of an active vibration controller with the optimal regulator theory. This theory is often used to control vibration because it can determine feedback gain vector systematically. However, the problem in the case of determining feedback gain in the design of a control system is that there is no definite method to determine design parameters. Therefore, this paper shows the new design method, by which the required dimensional design parameters can be determined directly from the optimal design chart. First it is found that the similarity law shows the relationship between the dimensional and nondimensional weighting matrix and feedback gain. From this, the response of the nondimensional state variables will be obtained by using the nondimensional weighting matrix and feedback gain. After this, the optimal design chart can be obtained from this response. It is demonstrated theoretically and experimentally that this method is effective for the design of an active vibration controller.

Key Words: Vibration, Vibration Control, Optimal Design, Optimal Regulator, Similarity Law, Optimal Design Chart, Active Vibration Controller

1. 緒 言

振動制御の主目的は、元来振動を起こしやすく安定度の不足している振動対象の安定化にある。安定化にとってより有効な方法は状態フィードバックである。特に、最適レギュレータ理論は安定化のために状態フィードバックゲインベクトルがシステムティックに決定できるので、振動制御において良く活用されている。状態フィードバックゲインベクトルを決定するリカッチ方程式がパーソナルコンピュータによって簡単に解けるようになったことが普及の源泉になっている。ところが、この理論を振動制御に用いるにあたって、制御系設計におけるフィードバックゲイン決定上の問題となっているのが、設計パラメータを決定する明確な指針がないことである⁽¹⁾。設計パラメータには評価関数における重み行列や重み係数が用いられるが、これを試行錯誤的に与えてシミュレーションによって良い応答を得るためのフィードバックゲインベクトルを決定しているのが現状である。したがって、制御系のパラメータが変わるたびに状態変数の応答や伝

達関数を逐一求めて判断する必要があった。

そこで、あらかじめ無次元化表示した制御系の重み係数と応答の関係を求めておき、実際の制御系で所要の制御則あるいはフィードバックゲインベクトルを決定する新しい制御系設計法を提案する。この方法はまず、無次元系と有次元系の間に存在するフィードバックゲインや重み係数の相似性を見い出した後、無次元系で作成された最適設計図表から直接に有次元系の設計パラメータを決定し得るものである。この手法を能動的動吸振器の設計法に活用してその有効性が検証できたのでここに報告する。

2. 最適レギュレータ問題における相似則理論⁽²⁾

2.1 状態方程式の無次元表示 一般に、粘性減衰を有する n 自由度系の運動方程式は次のような行列方程式で表すことができる。

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここで、 M 、 C 、および K はそれぞれ $n \times n$ の質量マトリックス、減衰マトリックス、および剛性マトリックスであり、 X 、 F はそれぞれ $n \times 1$ の変位ベクトル、力ベクトルである。式(1)に左から $[M]^{-1}$ を掛けて整理すると

* 原稿受付 平成2年6月25日。

^{*1} 正員、(株)小松製作所 (〒254 平塚市万田 1200)。^{*2} 正員、防衛大学校 (〒239 横須賀市走水 1-10-20)。

$$\ddot{X} = -M^{-1}C\dot{X} - M^{-1}KX + M^{-1}F \quad \dots\dots\dots(2)$$

となる。式(2)の変位ベクトル X 、速度ベクトル $\dot{X}$ を状態変数にとり状態方程式をつくると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \ddot{X} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ X \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M^{-1}F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(3)$$

以下、便宜上 $-M^{-1}C$ および $-M^{-1}K$ をそれぞれ C および K として記述する。また、 $\dot{X}$ 、 X をそれぞれ X_1 、 X_2 として $X = \{X_1, X_2\}^T$ とおき、さらに力ベクトルを $F = K_f u$ (K_f は力変換係数ベクトル) と置いて制御量 u で置換し、 b_1 を $M^{-1}K_f$ としておくと、ここで扱うシステムは 1 入力の線形時不変システムとして次のように表される。

$$\dot{X} = AX + bu \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに、

$$\begin{aligned} X &= \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \\ &= \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} C & K \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ b &= \{b_1, b_2, \dots, b_n, 0, \dots, 0\}^T = \begin{Bmatrix} b_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

この状態方程式を一次モードの固有振動数 ω 、初期変位等の基準長さ x_0 、基準力変換係数(力変換係数/一次モードの質量) b_0 を用いて無次元化すると

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \omega t, \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{x_0}, \quad \bar{b}_1 = \frac{b_1}{b_0} \\ \frac{d\bar{x}_i}{d\bar{t}} &= \frac{1}{\omega} \frac{1}{x_0} \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{d^2\bar{x}_i}{d\bar{t}^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{x_0} \frac{d^2x_i}{dt^2} \quad \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

となり、また無次元化入力 $\bar{u}$ については $\bar{u} = u$ と定義すると無次元系状態方程式は次のようにおける

$$\dot{\bar{X}} = \bar{A}\bar{X} + \bar{b}\bar{u} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_0} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \end{Bmatrix} \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{K} \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} C & \frac{1}{\omega^2} K \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{b} &= \begin{Bmatrix} \bar{b}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{b_0} \begin{Bmatrix} b_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

2・2 フィードバックゲインおよび重み係数の相似則 式(4)と式(6)の状態方程式について状態変数の応答が同等になるような極配置をとるように、それぞれフィードバックゲインおよびリカッチ方程式の重み行列を決定することを考える。

無制御時の極をそれぞれ μ_i 、 $\bar{\mu}_i$ とすると、式(4)、(6)における A マトリックスから有次元系および無次元系の極の関係は次のように表される。

$$\bar{\mu}_i = \frac{1}{\omega} \mu_i \quad (i=1 \sim 2n) \quad \dots\dots\dots(7)$$

また、制御時の特性方程式の極をそれぞれ μ'_i 、 $\bar{\mu}'_i$ とすると、制御時の特性方程式が式(7)と同様な関係を維持するには極は次のように設定されなければならない。

$$\bar{\mu}'_i = \frac{1}{\omega} \mu'_i \quad (i=1 \sim 2n) \quad \dots\dots\dots(8)$$

また、有次元系および無次元系状態方程式において、フィードバックゲインをそれぞれ次のようにおく

$$k = \{k_1, k_2, \dots, k_{2n}\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\bar{k} = \{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_{2n}\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここで、式(8)を満たすように極配置理論を使ってフィードバックゲイン k 、 $\bar{k}$ の関係を求めると次のように表される。

$$\bar{k} = b_0 \left\{ \frac{k_1}{\omega}, \frac{k_2}{\omega}, \dots, \frac{k_n}{\omega}, \frac{k_{n+1}}{\omega^2}, \frac{k_{n+2}}{\omega^2}, \dots, \frac{k_{2n}}{\omega^2} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

すなわち、有次元系および無次元系の状態変数が同一の応答にするには、速度にかかるフィードバックゲインは $1/\omega$ 、変位にかかるフィードバックゲインは $1/\omega^2$ の係数をかけてやればよい。これをフィードバックゲインの相似則と呼ぶ。

さらに、この相似則の関係が最適レギュレータ理論における重み係数にも適用できるようにするために、式(4)、(6)におけるリカッチ方程式をそれぞれ以下のように表す。

$$PA + A^T P + \frac{1}{r} P b b^T P + Q = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\bar{P}\bar{A} + \bar{A}^T \bar{P} + \frac{1}{\bar{r}} \bar{P} \bar{b} \bar{b}^T \bar{P} + \bar{Q} = 0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここに、 P 、 $\bar{P}$ はリカッチ方程式の解(唯一正定解)であり次のようにおく。

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12}^T & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(15)$$

このときのフィードバックゲイン k 、 $\bar{k}$ はそれぞれ次のとおりである。

$$k = \frac{1}{r} \{b_1^T P_{11}, b_1^T P_{12}\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\bar{k} = \frac{1}{\bar{r} b_0} \{b_1^T \bar{P}_{11}, b_1^T \bar{P}_{12}\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

式(16)、(17)より式(12)を満たす $\bar{P}$ として次の関係が導かれる。

$$\bar{P} = \frac{b_0^2 \bar{r}}{r} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} P_{11} & \frac{1}{\omega^2} P_{12} \\ \frac{1}{\omega^2} P_{12}^T & \frac{1}{\omega^3} P_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

式(18)を式(13)に代入することにより, $Q, \bar{Q}$ を線形な関係で置き換えることができる。したがって, 制御系の応答を同一にする無次元系状態方程式の重み係数は次のようにして求められる。

$$\bar{Q} = \frac{b_0^2 \bar{r}}{r} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2} Q_{11} & \frac{1}{\omega^3} Q_{12} \\ \frac{1}{\omega^3} Q_{12}^T & \frac{1}{\omega^4} Q_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

この関係を重み行列の相似則と呼ぶ。

3. 固定面を用いた制御装置の最適制御への応用

3.1 制振装置とその無次元系状態方程式 ここでは, まず前述の相似則理論を適用して固定面を用いた制振装置の最適設計の妥当性についてシミュレーションによって調べる。

図1に固定面を利用した制振装置の力学モデルを示す。この力学モデルの運動方程式を表すと, 次のようになる。

$$M\ddot{x} = -Kx - C\dot{x} - f \dots\dots\dots (20)$$

ここに,

x : 構造体の変位 m

M : 構造体の質量 kg

K : 構造体のばね定数 N/m

C : 構造体の減衰係数 N・s/m

f : アクチュエータの制御力 N

式(20)を $X = \{\dot{x}, x\}^T$ とおいて状態方程式で表すと

$$\dot{X} = AX + bu \dots\dots\dots (21)$$

ここに,

$$A = \begin{bmatrix} -2\zeta\omega & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -\frac{K_f}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ω : 構造体の固有振動数 rad/s

ζ : 構造体の減衰率

K_f : 力変換係数 N

u : 制御入力

これを無次元系状態方程式に変換すると

$$\bar{X} = \frac{1}{x_0} \left\{ \frac{1}{\omega} \dot{x}, x \right\}^T \dots\dots\dots (22)$$

(a) 無次元系での応答

(b) 有次元系での応答

図1 固定面を利用した制振装置の力学モデル

図2 固定面を利用した制振装置の周波数応答とインパルス応答

$$\bar{X} = \bar{A}\bar{X} + \bar{b}\bar{u} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2\zeta & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり, フィードバックゲインの相似則関係は次のとおりとなる.

$$\begin{aligned} k &= \{k_1 \quad k_2\} \\ \bar{k} &= \frac{K_f}{m} \left\{ \frac{k_1}{\omega}, \frac{k_2}{\omega^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

この場合, 式(19)を用いれば重み係数は次のように変換される.

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \\ \bar{Q} &= \frac{K_f^2}{m^2 r} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2} q_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega^4} q_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

3・2 シミュレーションによる制振応答 まず, 無次元系の状態方程式を使って固定面を用いた制振装置の制御系を, 最適レギュレータ理論より設計する. 図2(a)は, $\zeta=0.05$ としてその重み係数による制振効果の差を, 周波数応答およびインパルス応答によって比較したものである. ここで, 周波数応答では加振周波数を ω_e とおいている. また, 図2(b)は(a)の状態方程式を式(21)を用いて以下の構造系について有次元系に拡張し, 式(25)の重み係数の相似則を使ってフィードバックゲインベクトルを求めて(a)同様に制振応答を求めたものである(インパクト応答については1 Nの力を0.05 s加えたときの応答である).

$$M=10 \text{ kg}, \quad K=1000 \text{ N/m}, \quad C=10 \text{ N}\cdot\text{s/m},$$

$$K_f=10 \text{ N}$$

周波数応答, インパルス応答ともに有次元系の応答と無次元系の応答が一致していることがわかる.

4. 能動的動吸振器の最適制御への応用

4・1 制振装置とその無次元系状態方程式 図3

図3 能動的動吸振器の力学モデル

に能動的動吸振器の力学モデルを示す. この力学モデルの運動方程式を表すと, 次のようになる.

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_1 &= -K_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + f \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) - f \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに,

x_1 : 構造体の変位 m
 x_2 : 動吸振器の変位 m
 M_1 : 構造体の質量 kg
 m_2 : 動吸振器の質量 kg
 K_1 : 構造体のばね定数 N/m
 k_2 : 動吸振器のばね定数 N/m
 f : アクチュエータの制御力 N

式(26)を $X = \{\dot{x}_2 - \dot{x}_1, \dot{x}_1, x_2 - x_1, x_1\}^T$ とおいて状態方程式で表すと

$$\dot{X} = A X + b u \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(1+\mu)\omega_2^2 & \omega_1^2 \\ 0 & 0 & \mu\omega_2^2 & -\omega_1^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{K_f}{K_p m_1} \left\{ 1 + \frac{1}{\mu}, 1, 0, 0 \right\}^T$$

ω_1 : 構造体の固有振動数 rad/s
 ω_2 : 動吸振器の固有振動数 rad/s
 μ : 質量比
 u : 制御入力

K_f : 制御入力の力変換係数 N

K_p : センサの変位, 速度変換係数 m, m/s

ここで, センサ出力に対するフィードバックゲインを考えると力変換係数は K_f/K_p となり

$$\bar{X} = \frac{1}{x_0} \left\{ \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{\omega_1}, \frac{\dot{x}_1}{\omega_1}, x_2 - x_1, x_1 \right\}^T \quad \dots\dots\dots (28)$$

として

$$\bar{X} = \bar{A}\bar{X} + \bar{b}\bar{u} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここに,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(1+\mu)\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} & 1 \\ 0 & 0 & \mu\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = -\left\{ 1 + \frac{1}{\mu}, 1, 0, 0 \right\}^T$$

となり, 相似則理論を用いればフィードバックゲインの関係は次のとおりとなる.

$$k = \{k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4\}$$

表 1 無次元系と有次元系間の極とフィードバックゲインの関係

	Condition	Pole $\mu_1 \sim \mu_4$	Feedback gain $k = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$	$Q_{mat.} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & q_3 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, R_{mat.}$
Non-Dimension	$\mu = 0.05$ $\gamma = 1$	$-0.222 \pm 0.651j$ $-0.468 \pm 1.376j$	$\{-0.069, -0.069, 0.951, 0.000\}$	$\bar{q}_3 = 1, \bar{r} = 1$
Dimension	$m_1 = 1$ $\omega_1 = \omega_2 = 1$	$-0.222 \pm 0.651j$ $-0.468 \pm 1.376j$	$\{-0.069, -0.069, 0.951, 0.000\}$	$q_3 = 1, r = 1$
	$m_1 = 1$ $\omega_1 = \omega_2 = 10$	$-2.215 \pm 6.513j$ $-4.681 \pm 13.76j$	$\{-0.690, -0.690, 95.12, 0.000\}$	$q_3 = 10000, r = 1$
	$m_1 = 100$ $\omega_1 = \omega_2 = 1$	$-0.220 \pm 0.652j$ $-0.467 \pm 1.376j$	$\{-6.647, -6.867, 94.85, 0.002\}$	$q_3 = 10000, r = 1$

図 4 能動的動吸振器の最適設計図表の一例

$$\bar{k} = \frac{K_f}{K_p M_1} \left\{ \frac{k_1}{\omega_1}, \frac{k_2}{\omega_1}, \frac{k_3}{\omega_1^2}, \frac{k_4}{\omega_1^2} \right\} \dots (30)$$

そのとき、重み係数は次のように変換すればよい。

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & & & 0 \\ & q_2 & & \\ & & q_3 & \\ 0 & & & q_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q} = \frac{K_f^2 \bar{r}}{K_p^2 M_1^2 r}$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1^2} q_1 & & & 0 \\ & \frac{1}{\omega_1^2} q_2 & & \\ & & \frac{1}{\omega_1^4} q_3 & \\ 0 & & & \frac{1}{\omega_1^4} q_4 \end{bmatrix}$$

図 5 実験装置の概要

.....(31)

4.2 シミュレーションによる制御特性の比較

数値計算により、無次元系および相似則により有次元系へ拡張した場合の制御特性について調べた結果を表 1 に示す。無次元系状態方程式に対してパラメータを変えた場合の有次元系の重み係数を相似則により求め、フィードバックゲインおよび特性方程式の根をそれぞれ比較した。表 1 より明らかなように、リカッチ方程式の解として求められるフィードバックゲインが相似則の関係として与えられ、特性根は無次元系に対して ω を掛けたものとなっている。

4.3 最適設計図表

このように、能動的動吸振器を設計する際にあらかじめ無次元系でフィードバックゲインおよび応答を計算して最適設計図表を求めておけば、望みの時刻歴応答、周波数応答および特性根をもつ最適フィードバックゲインを見通しよく求めることができる。

図 4 に能動的動吸振器における質量比 $\mu = 0.065$ 、固有振動数比 $\gamma = 0.966$ の場合の最適設計図表を示す。この図表から希望する応答が指定されたとき、相似則の関係を用いれば逐一シミュレーションをしなくても有次元系に必要なフィードバックゲインを決定し得る。

4.4 実験方法

本実験に用いた制御系を図 5 に

図 6 能動的動吸振器のインパルス応答

示す。被制御対象は1個の質量と平行ばねで構成され、能動的動吸振器にはリニアアクチュエータを用いる。検出量に関しては、被制御対象の変位を板ばねに貼ったひずみゲージにより測定し、能動的動吸振器の変位を測定する。それぞれの速度はOPアンプから構成されるアナログ微分器を通して検出した変位より測定する。

制御コントローラはあらかじめデジタルコンピュータによって求めたフィードバックゲインを基にアナログ回路によって構成し、パワーアンプを通してリニアアクチュエータ1に印加される。

また、実験としてはインパルス加振として被制御対象に取付けたリニアアクチュエータ2によってステップ状の外乱を与えて行う。

能動的動吸振器を含む構造系の諸元を次に示す。

$$\begin{aligned} M_1 &= 5.34 \text{ kg}, & m_2 &= 0.34 \text{ kg} \\ K_1 &= 1.14 \times 10^4 \text{ N/m}, & k_2 &= 7.77 \times 10^2 \text{ N/m} \\ K_f &= 1.22 \text{ N/V}, & K_p &= 1 \times 10^{-3} \text{ m/V} \end{aligned}$$

これより、例えば $r=1$ の応答が要求されたときの有次元系のフィードバックゲインは、上記諸元および図4より以下のように即座に求まる。

$$k = \{-0.490, -0.490, 0.100, 0.000\}$$

4.5 実験結果 衝撃加振による無次元系でのシミュレーションの応答結果と実験での応答結果を調べたのが図6である。それぞれ重み係数を $\bar{q}_3=1$, $\bar{r}=1$ および $\bar{q}_3=1$, $\bar{r}=10$ の場合について無次元系でフィードバックゲインを求め、さらに無次元系において x_1 , x_2 および u の応答を求める。次に、求めた無次元系でのフィードバックゲインを有次元系でのゲインに

換算して制御系を構成し、加振したときの出力の応答と比較した。両者を比べると応答波形がよく一致していることがわかる。

以上のような理論計算、実験結果より、無次元系と有次元系における相似則が能動的動吸振器の設計に十分有効であるといえる。

5. 結 論

重み係数を設計パラメータとする最適レギュレータ理論による設計手法を提案し、シミュレーションにより制御特性を示すとともに実験的検討の後、次の結論を得た。

- (1) 重み係数の相似則を用いて状態方程式を無次元化し、最適レギュレータ理論における重み係数を設計パラメータとして制御系を設計する手法を示した。
- (2) 固定面を用いた制振装置および能動的動吸振器について、シミュレーションにより有次元系、無次元系の制御特性を調べ、それぞれ相似則の関係を満たしていることが確認された。
- (3) 能動的動吸振器について最適設計図表の例を表わし、本図表に基づく設計法の有効性を示した。
- (4) 本図表を用いて能動的動吸振器を設計し制御応答をシミュレーションの応答と比較した結果、両者のよい一致を見て本設計手法の妥当性が確認された。

文 献

- (1) 背戸、計測と制御、28-8 (1989)、719。
- (2) 小郷・ほか1名、システム制御理論入門、(1979)、115 実教出版。