軸流回転翼と軸系のねじり連成振動*
(続報, 等価縮少モデル化法の適用)飯 島 弘^{*1}, 金 沢 政 康^{*2}A Coupled Torsional Vibration of a Rotating Blade and Shaft System of
Axial-Flow-Type Machinery
(Continued Report, Application of the Equivalent Reduced Modeling Method)

Hiroshi IJIMA and Masayasu KANAZAWA

An analytical and experimental study on the coupled torsional vibration was carried out in the previous paper in order to determine the influencing factors in the coupled effect. In this paper, an equivalent reduced modeling method, which has been recently proposed as a new numerical analysis procedure, is applied for the previous torsional blade and shaft system. The results obtained are in good agreement with the experimental data of the previous paper, and the method seems to be effective for numerical estimation of the coupled torsional phenomena.

Key Words: Vibration of Rotating body, Blade-Shaft Coupled Vibration, Reduced Model, Eigen-solution

1. 結 言

回転翼の長大化などに伴って, 連成時の固有値の予測の精度向上が重要になっている。前報⁽¹⁾では, 翼群と回転軸とのねじり連成モデルについて解析と実験を行い, 連成によって非連成固有振動数からの分離現象が顕著になる条件が存在することを明らかにした。その際, 連成効果が顕著に現れる条件のもとでは, 解析解と実験値との差異が認められ, 翼の一次曲げモードの仮定の適否に検討の余地のあることを示した。

一方, 連成系の数値解析法の一つとして最近松下らにより等価縮少モデル化法が提案されている⁽²⁾。さらにこの方法を原子力用タービン発電機の実機に適用した解析結果が報告されている⁽³⁾。ただし, 実機との対比はなされていない。

本報は, この方法を前報の供試モデルに適用し, 前報の実験結果と比較するとともに, 前報の解析における翼のモードの仮定の適否を検討することを目的とする。

2. 等価縮少モデル化法の概要

2・1 解析モデル 解析モデルを図1に示す。前報と同様に解析モデルは N 枚の断面一様な平板翼を取付角 α でボスに固定した翼モデルを弾性軸の一端に固定し, 他端にダミーとして剛性円盤を固定したモデルを考える。取付角 α は回転軸に垂直な平面と翼弦のなす角をいう。翼系の一次曲げと軸の一次ねじりモードとの連成振動を扱う。

2・2 等価縮少モデル化法の概要⁽²⁾ 等価縮少モデル化法の概要を本報の翼-軸ねじり系に当てはめると以下ようになる。図2(a)の翼-軸ねじり系において, 軸系, 翼系相互の連成を考慮せずに各々の系の固有振動数を予測する場合, 軸系は翼全体を剛体翼(全

図1 解析モデル

* 原稿受付 平成2年4月3日。

*¹ 正員, 法政大学工学部 (〒184 小金井市梶野町3-7-2)。*² 准員, オリジナル(株) (〒192 八王子市石川町2951)。

体の極慣性モーメント I) と考えた図 2 (b) によって計算する。一方、翼系は図 2 (c) のようにボス部(翼の付け根)を固定とし、遠心力効果による λ_b を求める。ここで、両者の連成を考慮した固有振動数を予測するために、等価縮少モデル化法では、図 2 (a) の翼-軸系モデルを図 2 (d) のような 3 円板-二軸系モデルに縮少する。この等価縮少モデルの作成に当たっては、連成時の翼の振動モードを非連成時のそれとほぼ同じ形であると仮定して、これを用いて求めたモーダル質量をもとに翼系全体の極慣性モーメント I を I_{eq} と ΔI の二つに分ける。連成に関与するものとして翼等価質量(慣性モーメント) I_{eq} の円板を等価ねじりばね $K_{eq} = I_{eq} \lambda_b^2$ を介してボスの先端に弾性的に結合し、翼等価残留質量(慣性モーメント) $\Delta I = I - I_{eq}$ をボス部に剛に固着する。このようにして図 2 (d) の等価縮少モデルの数値が定まる。

図 2 (a) に示すような軸-翼ねじり連成系において、軸系のねじりとは翼の周方向振動成分と連成する。そこで、軸系に見立てたねじり振動系の慣性行列および剛性行列をそれぞれ I_s, K_s 、翼に見立てたねじり振動系を I, K で表す。また、ボスの慣性モーメントを I_b とする。軸系の各節点の角変位ベクトルを θ_s 、ボスの角変位を θ_b 、翼系のボスからの相対角変位ベクトルを γ とすると系の運動方程式は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & I_b + \bar{I} & I' \cdot I \\ 0 & I' \cdot I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_s \\ \ddot{\theta}_b \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 + K_{1b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s \\ \theta_b \\ \gamma \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

図 2 等価縮少モデル化法の概要

ここで、

$\bar{I}$: 翼系を剛体とした慣性モーメント $= I' I$

K_{1b} : 翼とボスの接合点でのねじり剛性

$I' = [111 \dots]'$

式(1)において左上の小行列は軸単独のねじり [図 2 (b)] に関する運動方程式、右下は翼単独 [図 2 (c)] の運動方程式を表す。ここで先ほどの翼系の連成時の振動モードは非連成時の場合と一致するという仮定より、翼の振動モードを ϕ として翼の角変位 γ を ϕ を用いて表すと次のようになる。

$$\gamma = \phi S \quad (2)$$

S : モード ϕ の重み値

式(2)を式(1)に代入して次式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & I_b + \bar{I} & I' I^* \\ 0 & 0 & I^* I^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_s \\ \ddot{\theta}_b \\ \ddot{S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi' K \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s \\ \theta_b \\ S \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

ただし、

I^* : モーダル質量(慣性モーメント)

$= \phi' I \phi$

$I' I^*$: 連成モーダル質量(慣性モーメント)

$= I' I \phi = \phi' I I$

となる。翼系は式(3)のようにモーダル質量で表されるが、これは翼の付け根に対する相対変位であるから翼系を代表する絶対変位を θ^* として次式で表す。

$$S = a(\theta^* - \theta_b) \quad (4)$$

ここで、 a : 連成係数

すると、式(3)は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & I_b + \Delta I & 0 \\ 0 & 0 & I_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_s \\ \ddot{\theta}_b \\ \ddot{\theta}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & 0 & 0 \\ 0 & +K_{eq} - K_{eq} & 0 \\ 0 & -K_{eq} + K_{eq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_s \\ \theta_b \\ \theta^* \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

ここで、

$a = I' I^* / I^*$

$I_{eq} = a^2 I^*$

ΔI : 翼等価質量(慣性モーメント) $= I - I_{eq}$

$K_{eq} = I_{eq} \lambda_b^2$

λ_b : 翼単独固有振動数

これを図で表すと図 2 (d) のようになる。

3. 供試モデルへの適用

翼は周方向振動成分とともに軸方向振動成分を有す

る。そこで I^*, I_c^* を次のように書く⁽³⁾。

$$\begin{cases} I^* = \phi_i^t I \phi_i + \phi_a^t I \phi_a \\ I_c^* = 1^t I \phi_i \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、

ϕ_i : 周方向振動モード

ϕ_a : 軸方向振動モード

また、 ϕ_i, ϕ_a は回転軸まわりの角変位を表すが翼は曲げ振動状態である。そこでこれをねじり振動状態になおして表す必要がある。図3のように翼の n 個の節点の任意の i 番目の質量を m_i 、横方向変位の周方向、軸方向成分をそれぞれ y_i, z_i とする。また、 m_i の回転半径を x_i とする。

図3より ϕ_i, ϕ_a は次式のようにになる。

$$\begin{cases} \phi_i = \left[\frac{y_1}{x_1} x_n, \dots, \frac{y_n}{x_n} x_n \right] \\ \phi_a = \left[\frac{z_1}{x_1} x_n, \dots, \frac{z_n}{x_n} x_n \right] \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

また、連成に関与する翼群の振動モードは前報よりすべての翼が同位相で振動する節円モードであることは明らかである。そこで式(7)は次のようになる。

$$\begin{cases} I^* = N \left\{ \sum_{i=1}^n m_i x_n^2 y_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i x_n^2 z_i^2 \right\} \\ I_c^* = N \left\{ \sum_{i=1}^n m_i x_n x_i y_i \right\} \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

図3 翼要素の振動変位

図4 翼モデル

ここで、本実験に用いた翼モデルは平板翼であり、翼弦に垂直な方向にのみ振動するものと仮定すると、

$$z_i = y_i \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \dots\dots\dots (9)$$

が成り立つ。したがって連成係数 a 、および翼等価慣性モーメント I_{eq} はそれぞれ次式で表される。

$$\begin{cases} a = \frac{\sin \alpha}{x_n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i y_i^2} \\ I_{eq} = N \sin^2 \alpha \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n m_i y_i^2} \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{N}{\sin^2 \alpha} \sum_{i=1}^n m_i x_n^2 y_i^2 \\ I_c^* &= \frac{N}{\sin \alpha} x_n \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \end{aligned}$$

翼取付角 α が大きくなるにつれて連成係数 a は大きくなるが、これは前報の理論解析と一致する。

4. 実 験

本報の計算値と比較するために、前報の実験値を用いる。ここで、実験の概略を以下に記す。実験に用いた翼モデルを図4に示す。前報と同一のもので8枚の鋼製平板翼をボスに固定し、翼単独の固有振動数を低下させるために各翼の先端に付加質量を取付ける。この翼モデルの先端を全周にわたってシュラウドで結んだ翼モデルも使用する。実験装置はこの翼モデルを軸系12 mmの鋼軸の一端、他端にダミーとして鋼製円板を取付ける。

5. 計算結果と検討

5.1 計算モデル 本報における固有振動数の計算には伝達マトリックス法を用いることとし、供試モデルの諸数値を図5に示す。図4の平板翼を要素分割

図5 計算モデル

して各節点 i の質量 m_i と回転軸まわりの回転半径 x_i を表 1 に示すようにとる (シュラウドなし翼モデル, $\alpha = 45, 90^\circ$). 円盤-継手-モータを等価な 1 個のダミー円盤として扱う. 弾性軸は分布質量系とする. 伝達マトリックス法による静止時の翼単独固有振動数の計算値は $\omega_b = 22.8$ Hz, 軸単独の固有振動数の計算値は $\omega_s = 22.0$ Hz となった. このときの翼の固有曲げモード y_i は図 6 のようになる.

5.2 連成固有振動数 静止時における供試モデルの等価縮少モデル [図 2 (d)] の諸数値を表 2 に示す. 等価縮少モデルでは翼-軸ねじり連成に關与する翼の周方向振動成分の最大となる $\alpha = 90^\circ$ のときのほうが連成係数 a , 翼等価慣性モーメント I_{eq} ともに大きくなることからわかる. 打撃試験による供試モデル (シュラウドなし) の静止時固有振動数の実験結果と等価縮少モデル化法を用いた計算結果を図 7 に示す. 図の中段は連成固有振動数の実験値, () 内の数値は計算値である. なお, 得られる 2 個の連成固有振動数のうち, 低いほうを λ_1 , 高いほうを λ_2 とする. 上段, 下段はそ

表 1 翼要素 (シュラウドなし)

Node No.	m_i [kg]	x_i [mm]
8	0.0275	200
7	0.0599	180
6	0.0574	160
5	0.0343	140
4	8.64×10^{-3}	118
3	8.64×10^{-3}	96
2	8.64×10^{-3}	74
1	8.64×10^{-3}	52

図 6 翼の曲げモード (シュラウドなし)

表 2 等価縮少モデル諸数値

Blade Model	α [deg]	I_{eq} [kgmm ²]	ΔI [kgmm ²]	K_{eq} [N/rad]	a [-]
Shroud Less	45	2.14×10^4	2.23×10^4	8.73×10^8	0.56
	90	4.27×10^4	0.09×10^4	4.36×10^8	1.11
Shroud	45	3.60×10^4	3.36×10^4	2.10×10^8	0.46
	90	7.18×10^4	0.03×10^4	1.68×10^8	0.92

(a) $\alpha = 15^\circ, L_s = 330$ mm (b) $\alpha = 90^\circ, L_s = 330$ mm

図 7 静止時固有振動数 (シュラウドなし)

れぞれ軸単独, 翼単独固有振動数の実測値である. この図から 2 個の供試モデルの固有振動数は明らかに連成効果により非連成時の上下に大きく分離していることがわかる. また, 回転面内振動成分の多い $\alpha = 90^\circ$ のほうが分離度ははるかに大きく高い連成効果を示す.

翼取付角 $\alpha = 45^\circ$ のときはもちろん, 連成効果の顕著な $\alpha = 90^\circ$ のときも本方法による計算値は実験結果とよく一致する. 表 2, 図 7 より連成係数 a , および翼等価慣性モーメント I_{eq} が大きいときほど連成効果も大きくなることからわかる.

シュラウド付翼モデルを用いた静止時連成固有振動数の実験結果, および本方法を用いた計算結果を図 8 に示す. ここでもシュラウドなし翼モデルのときと同様に計算値は実験結果とよく一致している.

次に, 回転時における計算の結果を図 9 に示す. 図中の○印は回転時の連成固有振動数の実験値, △印は回転時の翼単独固有振動数の実験値である. 実線は等価縮少モデル法による連成固有振動数の計算値, および翼に働く遠心力を考慮して伝達マトリックス法で求めた翼単独固有振動数である. 回転時の翼の固有モードは本実験での運転範囲 (約 30 Hz 以下) では静止時と一致する. そこで I_{eq} は静止時のものを使用し, 図 2

(a) $\alpha = 45^\circ, L_s = 87$ mm (b) $\alpha = 90^\circ, L_s = 210$ mm

図 8 静止時固有振動数 (シュラウド付)

(d)中の等価ねじりばね $K_{eq} = I_{eq}\lambda_b^2$ の翼単独固有振動数 λ_b には図9の実験値(Δ 印)を代入した。また回転時においても、 $\alpha = 45^\circ$ をはじめ、連成効果の顕著な $\alpha = 90^\circ$ のときも本方法による計算値は実験結果とよく

(a) $\alpha = 45^\circ$ (b) $\alpha = 90^\circ$ 図9 回転時固有振動数(シュラウドなし, $L_s = 330$ mm)

図11 等価翼モデル

一致しているのがわかる。よって、等価縮少モデル化法は回転時を含めた軸-翼ねじり連成振動の固有振動数の予測に有効であることが確認された。

5.3 翼取付角と連成効果 静止時において、翼取付角 α と本方法における I_{eq} , ΔI , 連成固有振動数との関係を図10に示す。図中の破線は静止時の翼単独、軸単独の固有振動数を表す。 $\alpha = 0^\circ$ のときは $I_{eq} = 0$ で非連成となる。このとき翼は軸のねじり振動に対して剛体円盤のごとく振舞う。これは前報の理論と一致する。 α が増加して翼の回転面内振動成分が増えるにつれて連成効果は大きくなるが、このとき等価縮少モデルにおいて I_{eq} も同時に大きくなる。言い換えれば、等価縮少モデルの I_{eq} などによって系の連成効果の大小の把握ができる。

5.4 翼の一次曲げモードの仮定の検討 以上の解析においては、翼の曲げモードを図2(c)のように仮定した。一方前報の解析では、翼の固定端に等価回転ばねをもつ図11の集中質量系との仮定を用いた。この仮定は翼群として扱う際に一般に用いられているものである。しかし、連成効果が顕著になる条件のもとでは実験値との差異が認められた。

そこで、シュラウドなしのモデルに対する前報の解析値を、図10に示す本報の結果と比較すると図12のようになり、両者の差は α が大きくなるにつれて増大

図10 連成効果について(シュラウドなし, $L_s = 330$ mm)

図12 翼取付角と静止時連成固有振動数(シュラウドなし)

していることがわかる。図 11 の仮定では翼の固定端近傍の質量の振動を実際よりも過大に見積もったこととなる。 α が増すと回転面内振動成分が大きくなって、この仮定の影響を受けやすい。このことは本報の等価縮少モデル化法による解釈からすると、 I_{eq} を実際よりも大きく見積もったことに相当する。図 10 から知るように I_{eq} が増せば固有値が高めになる。このため、前報図 6 (b) に示したように連成効果が著しい $\alpha=90^\circ$ シュラウドなしの翼モデルにおいて、実験値より高い解析値が得られたものである。図 12 の計算例によれば $\alpha>70^\circ$ の範囲では、前報の仮定による値に 5 % 以上の誤差が生ずる可能性があると言える。

6. 結 言

簡単な翼-軸系モデルに等価縮少モデル化法を適用してねじり連成振動問題について前報の実験結果と比較し、以下のような結論を得た。

(1) 等価縮少モデル化法による計算値は実験結果とよく一致し、回転時を含めた軸-翼ねじり連成問題の固有振動数の予測に有効である。

(2) 等価縮少モデルの連成係数、および翼等価慣性モーメントの大きさから系の連成効果の大きさの物理的把握ができる。

(3) 前報の解析における翼の一次曲げモードの仮定は、翼の等価慣性モーメントを高めに見積もったことに相当し、翼取付角が大きいと、この仮定による誤差が無視できなくなる。

終わりに、有益な助言をいただいた日立製作所機械研究所、松下修己氏に厚くお礼申し上げる。

文 献

- (1) 飯島・金沢・後藤, 機論, 57-535, C (1991).
- (2) 松下・ほか 6 名, 機論, 54-499, C (1988), 587.
- (3) Matsusita, O., ほか 4 名, *American Power Conference 51st Annual Meeting*, (1989).