境界要素法によるスリットを有する平板の過渡応答解析*

山田 元*¹, 小林 幸徳*¹, 横田 章司*²

Transient Response Analysis of a Plate with a Slit by BEM

Gen YAMADA, Yukinori KOBAYASHI and Shoji YOKOTA

A boundary element method is developed for the transient response analysis of a rectangular plate with a slit. Laplace transform is applied to the governing equation and the formulation employs the fundamental solution of the static problem of the plate. This creates not only boundary integrals, but also surface integrals owing to the presence of the inertia and external forces. Thus the discretization consists of boundary elements as well as interior elements. The response of the plate is obtained by the inverse transformation of displacements. The method is applied to square plates having a slit, and the transient response is calculated numerically.

Key Words: Boundary Element Methods, Transient Response, Laplace Transform, Plate, Slit

1. は し が き

近年, 工業技術は急速な進歩を遂げており, 高性能な機械が次々に開発されている。一方, 高度経済成長期の機械は老朽化が進み, き裂の発生が思わぬ故障や事故を引き起こすことがある。き裂は材料の疲労や設計段階で予測できない衝撃的な荷重などにより発生するもので, き裂による特性の変化を把握することは機械の安全管理上極めて重要であり, これまでにもいくつかの研究が報告されている。Stahl ら⁽¹⁾は, 全周単純支持長方形板の中央線上にスリットを有する問題を, 同次な第2種 Fredholm 積分方程式に導いて解析している。平野ら⁽²⁾は, Fourier 展開に重みつき残差法を用い, スリット線上における境界条件, 連続条件, 平衡条件を考慮して解析している。また, 入江ら⁽³⁾はスリット位置に選点法を適用している。しかし, 上述の研究はいずれも Levy 形解を用いているために, 平板の形状は長方形で少なくとも一対辺が単純支持であること, スリットの位置がこの単純支持辺に直角であることなどの制約がある。沖津ら⁽⁴⁾は, こうした制約の

ない有限要素法を用いて固有値解析, 周波数応答解析を行い, その信頼性を同一モデルの実験結果と比較することにより確認している。また, Maruyama ら⁽⁵⁾はスリットを有する周辺固定長方形板の自由振動を実験的に研究している。しかしながら, ここで扱うようなスリットを有する板の過渡振動に関する研究は見当たらない。

本論文では, まず平板の一般的な応答解析を境界要素法によって行う。このため, 支配方程式を Laplace 変換し, 像空間において静的な問題における基本解により積分方程式を導く。これを要素分割することにより代数方程式を導き, 求められる像空間における変位を数値的に逆 Laplace 変換することによって時間領域における応答を求める。静的な問題における基本解を用いるこの方法(Hybrid 形積分方程式法)では, 平板の領域内についても要素分割する必要があるが, 境界だけの未知量で問題を取扱う境界積分方程式法に比べ数値計算時間が短い。また, Providakis ら⁽⁶⁾は, Hybrid 形積分方程式法が応答解析においても, 有限要素法よりも計算精度に優れていることを報告している。本方法では, 板の形状, 境界条件, スリットの位置などを任意に選択することができる。本報では, これを周辺が単純支持あるいは固定された正方形板に適用

* 原稿受付 平成2年7月3日。

^{*1} 正員, 北海道大学工学部(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。^{*2} 准員, 北海道大学工学部(現在, 三菱化成工業(株))。

し、1点あるいは2点に入力される場合の過渡応答について数値計算を行っている。

2. 理論解析

板の垂直方向に、単位面積当たりの大きさが p の外力が作用するものとする。このとき、平板の中央面におけるたわみは、領域内の点 x および時間 t の関数 $w(x, t)$ で与えられ、支配微分方程式は次式となる。

$$\nabla^4 w = -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p}{D} \quad (1)$$

ここで、 ∇^4 は重調和微分作用素であり、 ρ は密度、 h は板厚である。また、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ は平板の曲げこわさであり、 E 、 ν はそれぞれ縦弾性係数、ポアソン比を表す。解析の簡単化のために以下の無次元量を導入する。

$$\tau = \sqrt{D/(\rho h l^4)} t, \quad P = l^3 p/D \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} W &= w/l, \quad T = T_n \\ (M, C) &= (l/D)(M_n, M_{ns}) \\ V &= l^2 V_n/D \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 T_n は境界におけるたわみ角、 M_n は曲げモーメント、 M_{ns} はねじりモーメントであり、 V_n は等価せん断力である。

式(1)を Laplace 変換すると

$$\nabla^4 W^* = -\sigma^2 W^* + P^* \quad (4)$$

が得られる。ここで、 $*$ を付した変数は、その変数の像

図1 平板の境界と領域

関数を表し、 σ は複素変数である。次に式(4)を静的な平板の曲げ問題における基本解により、積分方程式に変換する。ここでは、基本解として

$$\bar{W} = (r^2 \ln r)/8\pi \quad (5)$$

および

$$\tilde{W} = \partial \bar{W} / \partial n = (r/8\pi)(2 \ln r + 1) \cos \phi \quad (6)$$

を用いる。ここで、図1に示すように r は境界あるいは領域内における2点間の距離を表しており、 n は境界上の点 y における境界の外向き法線、 ϕ は r と n のなす角である。基本解 $\bar{W}$ 、 $\tilde{W}$ より導かれる積分方程式は、最終的に次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} W^*(y) + \int_{\Gamma} [\bar{V}(y, y') W^*(y') - \bar{M}(y, y') T^*(y') + \bar{T}(y, y') M^*(y') - \bar{W}(y, y') V^*(y')] d\Gamma(y') \\ & + \sum_{k=1}^K \{ \bar{C}(y, y_k) W^*(y_k) - \bar{W}(y, y_k) C^*(y_k) \} \\ & = -\sigma^2 \int_{\Omega} \bar{W}(y, x') W^*(x') d\Omega(x') + \int_{\Omega} \bar{W}(y, x') P^*(x') d\Omega(x') \quad (7) \\ & - \frac{1}{2} T^*(y) + \int_{\Gamma} [\tilde{V}(y, y') \{ W^*(y') - W^*(y) \} - \tilde{M}(y, y') T^*(y') + \tilde{T}(y, y') M^*(y') \\ & - \tilde{W}(y, y') V^*(y')] d\Gamma(y') + \sum_{k=1}^K \{ \tilde{C}(y, y_k) \{ W^*(y_k) - W^*(y) \} - \tilde{W}(y, y_k) C^*(y_k) \} \\ & = -\sigma^2 \int_{\Omega} \tilde{W}(y, x') \{ W^*(x') - W^*(y) \} d\Omega(x') + \int_{\Omega} \tilde{W}(y, x') P^*(x') d\Omega(x') \quad (8) \end{aligned}$$

上式において、 Ω は平板の領域、 Γ は境界を表しており(図1参照)、 $\bar{\cdot}$ および $\tilde{\cdot}$ を付した変数は、それぞれ基本解 $\bar{W}$ 、 $\tilde{W}$ に対応する各諸量を表すものである。また、式中の $\| \{ \cdot \} \| = \{ \cdot \}_{+0} - \{ \cdot \}_{-0}$ は、境界上にあるかど点 $y_k (k=1, 2, \dots, K)$ における不連続量を考慮するためのものである。さらに、積分方程式(7)、(8)において、領域内のたわみ $W^*(x)$ が未知量となるので、これを求めるために次の積分方程式を用いる。

$$\begin{aligned} & W^*(x) + \int_{\Gamma} [\bar{V}(x, y') W^*(y') - \bar{M}(x, y') T^*(y') + \bar{T}(x, y') M^*(y') - \bar{W}(x, y') V^*(y')] d\Gamma(y') \\ & + \sum_{k=1}^K \{ \bar{C}(x, y_k) W^*(y_k) - \bar{W}(x, y_k) C^*(y_k) \} \\ & = -\sigma^2 \int_{\Omega} \bar{W}(x, x') W^*(x') d\Omega(x') + \int_{\Omega} \bar{W}(x, x') P^*(x') d\Omega(x') \quad (9) \end{aligned}$$

積分方程式(7)、(8)および(9)では、境界積分に加えて、慣性力と外力に対応する項が領域積分となる。ここでは、

境界、領域のそれぞれについて要素分割を行うことにより、これらの積分方程式を離散化する。これに境界条件を適用することで代数方程式を得ることができる。式(7)、(8)より導かれる代数方程式は、次のようにマトリックス表示できる。

$$[A_r]\{Y^*\} = -\sigma^2[B_r]\{X^*\} + \{F_r^*\} \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 $\{Y^*\}$ は境界要素節点における未知量ベクトル、 $\{X^*\}$ は領域節点におけるたわみを表す。また、 $\{F_r^*\}$ は外力 P^* を含む領域積分より計算される既知のベクトルである。同様に式(9)より、

$$\{X^*\} + [A_o]\{Y^*\} = -\sigma^2[B_o]\{X^*\} + \{F_o^*\} \dots\dots\dots (11)$$

となる。式(10)および(11)より、 $\{Y^*\}$ を消去すると次式を得る。

$$([I] + \sigma^2[C])\{X^*\} = \{F^*\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$\begin{aligned} [C] &= ([B_o] - [A_o][A_r]^{-1}[B_r]) \\ \{F^*\} &= \{F_o^*\} - [A_o][A_r]^{-1}\{F_r^*\} \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

である。領域を一定要素に分割し、外力ベクトル $\{P^*\}$ が要素内において一定であるとき、式(13)は次式のように書ける。

$$([I] + \sigma^2[C])\{X^*\} = [C]\{P^*\} \dots\dots\dots (14)$$

式(12)あるいは式(14)より求められる像空間におけるたわみ $\{X^*\}$ を数値的に逆 Laplace 変換することにより、時間領域での応答変位が求められる。本論文では、高速逆フーリエ変換を利用した Durbin の方法⁷⁾を用いてこれを行った。

3. 数値計算結果と考察

まず応答解析における計算精度を調べるために、全

周単純支持正方形板の過渡応答を厳密解と比較して示す。図2(a)に示すように、一定要素を用いて境界を40、領域を81にそれぞれ等分割した。外力は、領域の中央要素に大きさ $P=1$ で無次元時間 $\tau=0.05$ の間作用する。図2(b)に平板の中央におけるたわみの時間的変化を示す。太線は本論文の結果であり、細線は平板の中央に同じ大きさの集中外力が作用したときの厳密解である。図にみるように、時間の経過とともに両者の違いは大きくなるが、 $\tau < 0.2$ においては非常に一致しており、入力作用した直後の過渡応答を、十分な精度で解析できる。

ここでは、平板の過渡応答に及ぼすスリットの影響を全周固定正方形板について調べる。図3に示すように一辺の長さが a である正方形板の中央に、ある対辺と平行な長さ c のスリットを考える。解析では、正方形板の全周を40個の一定要素に、領域を64個の四角形一定要素にそれぞれ等分割した。また、スリットを有する平板では、スリットを含む中心線より大きさの等しい二つの長方形板に分け、スリットを含む線分を20等分することにより解析を行った。

図4は、く形パルス状入力 $P(\tau)$ が、図4(a)に斜線で示す1要素に作用する場合のたわみの時間的変化を示す。ここで、図4(b)はスリットのない平板、図4(c)は $c/a=0.5$ のスリットを有する平板の応答である。図にみるように、 $\tau < 0.05$ では、両者の応答曲線は非常に似ている。全般的には、スリットを有する平板での振幅のほうが大きく、かつ応答における高次振動の影響が少ないことがわかる。これは、スリット位置での振動が反対側に伝わりにくくなり、さらに、固定端からの反射波の影響がスリットにより軽減されるためと考えられる。1要素入力によるたわみ分布の時間

図2 全周単純支持正方形板の過渡応答($\nu=0.3$)

的变化を, 図 5(a) にスリットの無い場合, 図 5(b) に $c/a=0.5$ のスリットを有する場合についてそれぞれ示

図 3 スリットを有する正方形板

($\nu=0.33$, (b) $c/a=0$, (c) $c/a=0.5$, $\psi=0^\circ$)

図 4 スリットを有する全周固定正方形板の過渡応答 (1 要素入力の場合)

す。図にみるように, スリット位置での変位が大きくなるまでは, スリットを有する平板のたわみは, スリットの無いものによく似ている。さらに時間が経過し, スリット付近での変位が大きくなると, スリットの無い平板では対角線上に振動が伝わるのに対し, スリットを有する平板ではスリットに沿うように振動が伝わり, 外力の作用点の反対側にあるスリットの振幅が小さいことがわかる。

図 6 は, く形パルス状入力, 図 6(a) に斜線で示す 2 要素に作用する場合の応答である。図 6(b) はスリットの無い場合, 図 6(c) に $c/a=0.5$ のスリットを有する場合についてそれぞれ示す。図 6(b) と (c) には, 1 要素入力の場合ほど大きな違いが認められないが, スリットを有する平板での応答変位の変動が, スリットの無いものに比べ小さいことがわかる。図 7 は 2 要素入力におけるたわみ分布の変化である。1 要素入力の場合と同様, スリット位置での変位が大きくなるまでの両者のたわみ分布は似ているが, スリットを有

($\nu=0.33$, (a) $c/a=0$, (b) $c/a=0.5$, $\psi=0^\circ$)

図 5 スリットを有する全周固定正方形板の変位分布 (1 要素入力の場合)

($\nu=0.33$, (b) $c/a=0$, (c) $c/a=0.5$, $\psi=0^\circ$)

図 6 スリットを有する全周固定正方形板の過渡応答 (2要素入力の場合)

する場合はスリットの方に振動が伝わっており、スリットの影響による過渡応答の違いをみることができる。

なお、本研究での数値計算は、北海道大学大型計算機センターの HITAC M-682 H で行った。

4. 結 論

本研究では、スリットを有する平板に作用する外力による応答を Hybrid 形積分方程式法を用いて解析し、1要素あるいは2要素で入力される場合について数値計算を行った。その結果、以下の結論を得た。

(1) 厳密解の得られる全周単純支持正方形板の応答解析との比較を行い、本解法の妥当性を確かめた。

(2) スリットを有する平板の1要素に過渡的な外力が作用するとき、スリットの近くでの応答変位が、

($\nu=0.33$, (a) $c/a=0$, (b) $c/a=0.5$, $\psi=0^\circ$)

図 7 スリットを有する全周固定正方形板の変位分布 (2要素入力の場合)

スリットのない平板に比べ大きくなる。

(3) 1要素入力の場合、外力が作用する位置の反対側でのスリットの変位振幅がスリットのないものに比較して小さい。

(4) 正方形板の対角線上に外力を作用させたとき、スリットのない平板では振動がこの対角線上に伝わるのに対し、スリットを有する場合はスリットに沿って伝わる。また、これは、1要素入力、2要素入力のいずれの場合にも認められる現象である。

文 献

- (1) Stahl, B. and Keer, L. M., Vibration and Stability of Cracked Rectangular Plates, *Int. J. Solids Struct.*, 8 (1972), 69.
- (2) 平野・岡崎, クラックを有する長方形板の振動解析, 機論, 45-397, C(1979), 975.
- (3) 入江・山田・高橋, スロットを有する長方形板の振動解析, 機論, No. 772-1(1977), 143.
- (4) 沖津・下田・平, スリットを有する長方形板の振動解析, 機論, 52-482, C(1986), 2617.

- (5) Maruyama, K. and Ichinomiya, O., Experimental Study of Free Vibration of Clamped Rectangular Plates with Straight Narrow Slit, *JSME Int. J.*, **32**-2, Ser. III (1989), 187.
- (6) Providakis, C. P. and Beskos, D. E., Free and Forced Vibrations of Plates by Boundary and Interior Elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **28** (1989), 1977.
- (7) Durbin, F., Numerical Inversion of Laplace Transforms : An efficient Improvement to Dubner and Abate's method, *Comp. J.*, **17** (1974), 371.
-