数式処理を用いた人工衛星のパネル展開解析*

鈴木 真二*¹松永 大一郎*²

Dynamic Analysis for Expansion of Spacecraft Panels Using Symbolic Manipulation

Shinji SUZUKI and Daichirou MATSUNAGA

The problem of predicting the dynamic behavior of an expanding multi rigid-body system with intermittent motion is considered. The symbolic manipulation system is employed to obtain the system equations of motion in the Kane formulation. Velocities and angular velocities of a main body and a hinge angle are selected as system variables to represent the system equations in a form of first-order linear differential equations. When an impulse input is applied or when a hinge is locked, the intermittent behavior occurs with discontinuities in velocity vector. To define the jump discontinuities in terms of velocity, the relations between the velocity and the impulse force are presented at a point in time at which an intermittent event occurs. The dynamic behavior of spacecraft expanding panels is solved numerically by integrating the system equations in time.

Key Words: Dynamics of Machinery, Space Engineering, Simulation, Symbolic Manipulation, Rigid Body, Intermittent Motion, Impulse Force

1. 緒言

無重力環境で運動を行なう人工衛星等の宇宙構造体の設計開発においては、重力の作用する地上での動作試験が困難なため、計算機による運動シミュレーションが重要になる。本報では、畳み込まれた人工衛星のパネルを軌道上で展開する際のシミュレーション方法とその結果に関して報告を行なう。なお、本解析では構造の弾性変形を無視している。すなわち、人工衛星を多数の剛体が回転ジョイント(ヒンジ)で結合された構造(多体剛体)と考えている。

本論文の特徴は次の二点にある。一点は、運動方程式の誘導に数式処理システムを利用する点に、もう一点は、速度・角速度の不連続を伴う運動の解析手法を提案する点にある。今回の解析では、インパルス力によりパネルを展開する際と、運動中の剛体を強制的に静止させパネルを固定する際に、速度・角速度の不連続が発生する。

多体剛体の運動は、今日では汎用の運動解析ソフトにより解析することが可能となった。しかし、この解析は数値的に行なわれ、運動方程式を数式で求める訳ではない。問題が小規模であれば、運動方程式を直接求めておく都合の良い場合が多い。ただし、一つのヒンジで結合された二剛体を扱うような簡単なシステムですら運動方程式を間違いなく誘導することは容易ではない。こうした状況において、数式処理システムは運動方程式を直接導く際に有力な手段になると考えられる。

数式処理システムは、数式の変形を言語処理にもとづき計算機に自動的に行なわせるものであり、計算機による人工知能の応用例としてその有効性は広く知られている。多体剛体の運動方程式への適用例としては、無重力空間での二剛体の解析⁽¹⁾、パワーショベルの二次元解析⁽²⁾などが発表されている。本論文では人工衛星を三剛体とモデル化しており、数式処理システムMACSYMAを用いて、こうした方法の有効性と限界を検討する。

構造体にインパルス力が作用したり、接触、固定などの動作が含まれる場合、瞬間的に速度・角速度の不連続が発生する。こうした運動は、宇宙構造体以外にロボットマニピュレータ、工作機械など多くの機械力学分野で発生する現象であるが、運動解析の報告は多くは見られない。平面運動の解析では、速度・角速度の不連続量を運動量、角運動量の保存則により求めたり⁽³⁾、ヘビサイドのステップ関数を用いて不連続的变化を解析する方法が報告されている⁽⁴⁾。二次元多体剛体の例としては、インパルス入力や、弾性衝突を考慮した解析法⁽⁵⁾⁽⁶⁾が発表されている。本論文では、三次元多体剛体を対象に、剛体の運動を瞬間的に固定するような非弾性衝突をも考慮した運動の解析法を提案する。

計算例として、初めにヒンジでつながれた二剛体を考える。インパルス力により二剛体を展開し、再び固定するまでのシミュレーションを行い、本手法の妥当性を検証する。次に、本体、アーム、パネルの三剛体からなる人工衛星を想定したモデルに関して、畳み込まれたパネルを展開するシミュレーションを実施する。

* 原稿受付 平成2年6月26日。

¹ 正員、東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)。² 東京大学工学部。

2. 運動方程式の定式化

数式処理システムの能力を最大限に活用するためには、運動方程式の誘導が自動的に行えることが望ましい。解析的に運動方程式を誘導する方法としてはラグランジュの方法が知れており、数式処理を利用した解析例も報告されている⁽²⁾。しかし、自由空間を運動する三次元物体の解析には、物体の姿勢角を定義するオイラー角が運動方程式中に現われるため、ラグランジュの方法は必ずしも適してはいない。現在の数式処理システムでは複雑な三角関数の処理が容易ではないためである。

本論文では、物体の速度・角速度を変数とするニュートン・オイラーの方法を用い、仕事をしない内力（束縛力）の消去にはケイン(Kane)の流儀⁽⁷⁾⁽⁸⁾を用いた。速度・角速度を変数とする他の理由は、後に述べるように、速度・角速度の不連続的变化を伴う運動の解析を容易にするためである。

図1に示すように、人工衛星は本体Aと、アームおよびパネル $B_1, B_2, \dots, B_N$ より構成されるものとする。アームおよびパネルはヒンジで鎖状につながれており、折り畳まれた状態から展開される。ヒンジのなす角度を物体間の相対角度として順次 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ と定義し、ヒンジに $1, 2, \dots, N$ と番号づけをする。本体重心を原点とする本体固定座標系を (a_{01}, a_{02}, a_{03}) とし、同様に、各物体の重心を通る物体固定座標系を (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) ($i = 1, 2, \dots, N$)と定義する。各物体の重心およびヒンジ位置を定義するために、本体重心からヒンジ1までを $r_{0,1}$ 、ヒンジ i から物体 i の重心までを $r_{i,i}$ 、物体 i の重心からヒンジ $i+1$ までを $r_{i,i+1}$ と定義する。また、ヒンジの回転軸方向を c_i とする。

いま、本体の速度、角速度、および各ヒンジ角速度を

$$\mathbf{V}_0 = u_1 \mathbf{a}_{01} + u_2 \mathbf{a}_{02} + u_3 \mathbf{a}_{03} \quad (1)$$

$$\mathbf{q}_0 = u_4 \mathbf{a}_{01} + u_5 \mathbf{a}_{02} + u_6 \mathbf{a}_{03} \quad (2)$$

$$\dot{\theta}_i = u_{6+i}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

と定め、システムの変数を u_i ($i = 1, 2, \dots, N+6$)とする。

ニュートン・オイラーの運動方程式は、各物体の重心に関する運動量、角運動量の時間微分により求められる。物体 B_i の重心位置は、本体の重心位置を基準に

$$\mathbf{r}_i = \sum_{k=0}^{i-1} (\mathbf{r}_{k,k+1} + \mathbf{r}_{k+1,k+1}), \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

と書けるため、 B_i の速度ベクトルは次のようになる。

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_0 + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

ここで、 d/dt はベクトル $(\cdot)$ に対する次の演算を意味し、

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{d^A(\cdot)}{dt} + \mathbf{q}_0 \times (\cdot) \quad (6)$$

d^A/dt は本体固定座標系での時間微分である。

なお、 $\mathbf{r}_i$ は本体固定座標系 (a_{01}, a_{02}, a_{03}) で表現せねばならないので、各物体固定座標系と本体固定座標系の座標変換行列を用意する必要がある。また、 B_i の角速度ベクトルは次のようになる。

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_0 + \sum_{k=1}^i u_{k+6} \mathbf{c}_k, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

図1 人工衛星モデルの座標系

図2 ヒンジに作用する内力

ここで、 $\mathbf{c}_k$ はヒンジ k の回転軸方向単位ベクトルである。

各物体の運動量、角運動量を時間微分すれば以下の運動方程式が得られる。ただし、 $i = 0, 1, \dots, N$ である。

$$\frac{d(m_i \mathbf{V}_i)}{dt} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i+1} \quad (8)$$

$$\frac{d(\mathbf{I}_i \mathbf{q}_i)}{dt} = \mathbf{T}_i - \mathbf{T}_{i+1} + \mathbf{r}_{i,i+1} \times (-\mathbf{F}_{i+1}) - \mathbf{r}_{i,i} \times (\mathbf{F}_i) \quad (9)$$

ここで、 $m_i, \mathbf{I}_i$ は各物体の質量と慣性行列である。慣性行列に関しては本体固定座標系に座標変換しておく必要がある。また、 $\mathbf{F}_0, \mathbf{T}_0$ は本体に作用する外力、外トルクであり、 $\mathbf{F}_i, \mathbf{T}_i$ はヒンジ i に発生する内力、内トルクである(図2)。ただし、 $\mathbf{F}_{N+1}, \mathbf{T}_{N+1}, \mathbf{r}_{0,0}$ は零とする。

さらに、式(8)(9)から仕事をしない内力(束縛力)を消去する必要がある。ここでは束縛力の消去を自動的に行えるケインの方法を採用する。

ケインの方法は、ダランベールの原理により動的問題を静的問題に変換し、仮想仕事の原理を適用するものである。束縛力が仕事をしないように自由度を選んである

ため、微小時間 Δt 間の仮想変位は

$$\delta \mathbf{V}_i \Delta t = \left(\sum_{k=1}^{N+6} \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial u_k} \delta u_k \right) \Delta t, \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (10)$$

$$\delta \mathbf{q}_i \Delta t = \left(\sum_{k=1}^{N+6} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial u_k} \delta u_k \right) \Delta t, \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (11)$$

で与えられる。なお、 $\partial \mathbf{V}_i / \partial u_k$ 、 $\partial \mathbf{q}_i / \partial u_k$ は部分速度、部分角速度と呼ばれる⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

仮想仕事は式(8)、(9)にそれぞれ仮想変位を作用させれば求めることが出来る。さらに δu_k は任意に選べることから以下の $N+6$ 本の運動方程式が得られる。

$$\sum_{i=0}^N \left\{ \left[\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i+1} - \frac{d(m_i \mathbf{V}_i)}{dt} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial u_k} + \left\{ \mathbf{T}_i - \mathbf{T}_{i+1} + \mathbf{r}_{i,i+1} \times (-\mathbf{F}_{i+1}) - \mathbf{r}_{i,i} \times (\mathbf{F}_i) - \frac{d(\mathbf{I}_i \mathbf{q}_i)}{dt} \right\} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial u_k} \right\} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, N+6) \quad (12)$$

上式には全ての内力が含まれているが、仕事をしない束縛力は最終的には方程式から消去されることになる。

式(12)を整理し、次の微分方程式を得る。

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{b} + \mathbf{f} \quad (13)$$

ここで、 $\mathbf{f}$ は本体に加わる外力、およびヒンジ部に作用する駆動トルクに関する入力ベクトルである。

本体の慣性系に対する姿勢と重心位置を定めるため、上記の微分方程式とは別に、オイラー角と重心座標に関する6本の微分方程式が必要になる⁽⁸⁾。

3. 数式処理システムの利用

数式処理システムを利用すれば、上記の式の変形をすべて計算機に任せる事が出来る。以下、処理の順序に従い数式処理システムの実行内容と機能を述べる。なお、本論文では数式処理システムとしてMACSYMA⁽⁸⁾を使用している。

- 変数の従属性の定義** 変数 u_i, θ_i が時間の関数であることを宣言する。また、各変数の時間微分、たとえば x の時間微分 $\text{diff}(x, t)$ (diff は微分を行なうMACSYMAの関数)を dx に置換することを定義しておく。これは後の結果の整理に役立つ。
- 関数の定義** ベクトルの内積、外積、行列との積に関する関数を定義する。MACSYMAではこうした演算は自動的に処理できるが、ここでは、ベクトル $\mathbf{x}$ を $x: x1 \cdot a1 + x2 \cdot a2 + x3 \cdot a3$ と表記し、図3に示すような関数を定義する。こうした表記法の採用によって、ベクトルの演算がスカラー演算と同じように扱うことが可能になる。
- 座標変換** 各物体間の座標変換行列を定義し、各物体の固定座標系の単位ベクトルと慣性行列を本体固定座標系で表わしておく。
- 重心位置とヒンジ方向の定義** ベクトル $\mathbf{r}_{i,j}, \mathbf{c}_i$ を具体的に定義し、トポロジカルな関係を決定する。
- 外力、内力の定義** 仕事をしない内力(束縛力)を求め

```
/* scalar product */
scapro(x,y)→x1*y1+x2*y2+x3*y3
/* vector product */
vecpro(x,y)→
(x2*y3-x3*y2,x3*y1-x1*y3,x1*y2-x2*y1)
/* matrix*vector */
mvpro(M,x)→
(M[1,1]*x1+M[1,2]*x2+M[1,3]*x3,
M[2,1]*x1+M[2,2]*x2+M[2,3]*x3,
M[3,1]*x1+M[3,2]*x2+M[3,3]*x3)
```

図3 ベクトル演算関数

図4 ヒンジで結ばれた二剛体

- 必要がなければ、束縛力を初めから無視してもよい。
- 速度、角速度の誘導** 式(5)、(7)の演算を実行する。
- 慣性力の誘導、部分速度、部分角速度の誘導** 式(12)の各成分を求める。
- ケインの方程式の誘導** 式(12)により運動方程式を誘導する。
- 結果の整理** 式(12)より変数の微分に関する項をくくりだし、式(13)の形式に整理する。
- FORTRAN用コードの生成** 式(13)の各成分をFORTRANプログラムに直接組み込めるように出力する。

上記の処理はプログラムを作成することにより実行され、問題に応じてユーザが定義する部分は、上記手順の項目a),c),d),e)のみとなる。

図4に示す二剛体の運動方程式を導出した結果の一部を以下に示す。結果は $[KX]\{\dot{u}\} = \{KY\}$ の形式で整理されており、仕事をしない内力 f_{11}, f_{12}, f_{13} および内トルク t_{11}, t_{12} が消去されている点に注意されたい。なお、ヒンジ角は angp と記されている。

```
(c85) KX_for:fortran(KX)$
sp=sin(angp): cp=cos(angp)
kx(1,1)=-ma-mb: kx(1,2)=0: kx(1,3)=0
kx(1,4)=0: kx(1,5)=(a3-b3)*mb
kx(1,6)=(-a2*sp+bl+cp*b2)*mb: kx(1,7)=(sp*b1+cp*b2)*mb
kx(2,1)=0: kx(2,2)=-ma-mb: kx(2,3)=0
kx(2,4)=(b3-a3)*mb: kx(2,5)=0
kx(2,6)=(a1-cp*b1+sp*b2)*mb: kx(2,7)=(sp*b2-cp*b1)*mb
kx(3,1)=0: kx(3,2)=0: kx(3,3)=-ma-mb
kx(3,4)=(a2-sp*b1-cp*b2)*mb: kx(3,5)=(-a1+cp*b1-sp*b2)*mb
kx(3,6)=0: kx(3,7)=0: kx(4,1)=0
```

```

ky(5,1) = u(6)*(u(4)*((-a1**2+(2*cp*b1-2*sp*b2)*a1+a3**2-2*b3*a3-c
1 p**2*b1**2+2*cp*sp*b2*b1-sp**2*b2**2+b3**2)*mb+ial-ia3+cp*b2*ib
2 1+sp**2*ib2-ib3)+u(5)*((-a2+sp*b1+cp*b2)*a1+(cp*b1-sp*b2)*a2-c
3 p*sp*b1**2+(sp**2-cp**2)*b2*b1+cp*sp*b2**2)*mb-cp*sp*b1+cp*sp
4 ib2)+u(2)*(a3-b3)*mb+u(7)*(u(5)*((2*sp*b1+2*cp*b2)*a1-2*cp*sp
5 b1**2+(2*sp**2-2*cp**2)*b2*b1+2*cp*sp*b2**2)*mb+2*cp*sp*b1-2*
6 cp*sp*ib2)+u(4)*((2*cp*b1-2*sp*b2)*a1-2*cp*b2*b1**2+4*cp*sp*b2
7 *b1-2*sp**2*b2**2)*mb+(sp**2-cp**2)*ib1+(cp**2-sp**2)*ib2-ib3)+
8 u(6)*((2*cp*b1-2*sp*b2)*a3-2*cp*b3*b1+2*sp*b3*b2)*mb+u(5)*(u(1
9 )*(-a1+cp*b1-sp*b2)*mb+u(4)*((a3-b3)*a2+(-sp*b1-cp*b2)*a3+sp*b3
: *b1+cp*b3*b2)*mb+u(3)*(b3-a3)*mb)+u(4)*a2*((a3-b3)*a1+(sp*b2-cp
: *b1)*a3+cp*b3*b1-sp*b3*b2)*mb+u(6)*a2*((b3-a3)*a1+(cp*b1-sp*b2)
< *a3-cp*b3*b1+sp*b3*b2)*mb+u(2)*u(4)*(a1-cp*b1+sp*b2)*mb+u(7)**2
* ((cp*b1-sp*b2)*a3-cp*b3*b1+sp*b3*b2)*mb -t02
ky(6,1) = u(5)*(u(4)*((a1**2+(2*cp*b2-2*cp*b1)*a1-a2**2+(2*sp*b1+2
1 *cp*b2)*a2+(cp**2-sp**2)*b1**2-4*cp*sp*b2*b1+(sp**2-cp**2)*b2**
2 )*mb-ial+ia2+(sp**2-cp**2)*ib1+(cp**2-sp**2)*ib2)+u(3)*(a2-sp*
3 b1-cp*b2)*mb)+u(5)**2*((a2-sp*b1-cp*b2)*a1+(sp*b2-cp*b1)*a2+cp
4 *sp*b1**2+(cp**2-sp**2)*b2*b1-cp*sp*b2**2)*mb+cp*sp*ib1-cp*sp*ib
5 b2)+u(4)*a2*((-a2+sp*b1+cp*b2)*a1+(cp*b1-sp*b2)*a2-cp*sp*b1**2
6 +(sp**2-cp**2)*b2*b1+cp*sp*b2**2)*mb-cp*sp*ib1+cp*sp*ib2)+u(6)*
7 (u(5)*((a3-b3)*a1+(sp*b2-cp*b1)*a3+cp*b3*b1-sp*b3*b2)*mb+u(1)*(-
8 a1+cp*b1-sp*b2)*mb+u(4)*((b3-a3)*a2+(sp*b1+cp*b2)*a3-sp*b3*b1-
9 cp*b3*b2)*mb+u(2)*(-a2+sp*b1+cp*b2)*mb)+u(6)*u(7)*((2*sp*b1+2*cp
: *b2)*a1+(2*sp*b2-2*cp*b1)*a2)*mb+u(7)**2*((sp*b1+cp*b2)*a1+(sp
: *b2-cp*b1)*a2)*mb+u(3)*u(4)*(a1-cp*b1+sp*b2)*mb -t03
ky(7,1) = u(5)*(u(4)*((sp*b2-cp*b1)*a1+(sp*b1+cp*b2)*a2+(cp**2-sp
1 **2)*b1**2-4*cp*sp*b2*b1+(sp**2-cp**2)*b2**2)*mb+(sp**2-cp**2)*
2 ib1+(cp**2-sp**2)*ib2)+u(3)*((-sp*b1-cp*b2)*mb)+u(5)**2*((-sp*b
3 1-cp*b2)*a1+cp*sp*b1**2+(cp**2-sp**2)*b2*b1-cp*sp*b2**2)*mb+cp*
4 sp*ib1-cp*sp*ib2)+u(4)*a2*((cp*b1-sp*b2)*a2-cp*sp*b1**2+(sp**2
5 -cp**2)*b2*b1+cp*sp*b2**2)*mb-cp*sp*ib1+cp*sp*ib2)+u(6)*u(4)*
6 (sp*b1+cp*b2)*a3-sp*b3*b1-cp*b3*b2)*mb+u(5)*((sp*b2-cp*b1)*a3+c
7 p*b3*b1-sp*b3*b2)*mb+u(2)*(sp*b1+cp*b2)*mb+u(1)*(cp*b1-sp*b2)*m
8 b)+u(6)**2*((-sp*b1-cp*b2)*a1+(cp*b1-sp*b2)*a2)*mb+u(3)*u(4)*(s
9 p*b2-cp*b1)*mb -t13

```

4. 速度・角速度の不連続を伴う運動の定式化

本解析ではパネルは初め本体に畳み込まれており、ヒンジ部にインパルストルクを入力することで展開を開始するものとする。各ヒンジは指定された角度に達した時点で固定され、展開が終了する。こうした運動を解析する際に次のような考慮が必要となる。一点は任意のヒンジが固定された場合の運動方程式の誘導であり、もう一点は、インパルスの入力時、ヒンジの固定時に発生する速度・角速度の不連続量の推定である。

初めに、ヒンジが固定されている状態での運動方程式を考える。式(12)から分かるように運動方程式(13)の第*i*行は、変数 u_i の仮想仕事から導かれている。ヒンジ*k*が固定されている状態では、ヒンジの角速度 u_{6+k} は零となり当然仮想仕事も零となる。そこで、この状態での運動方程式は、次のように表現できる。

$$L_k(\mathbf{M})\dot{\mathbf{u}} = L_k(\mathbf{b} + \mathbf{f}), \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (14)$$

ここで、オペレータ $L_k(\cdot)$ は、行列に対しては、第 $6+k$ 行、第 $6+k$ 列が対角項を1として残りを零とし、ベクトルに対しては第 $6+k$ 成分を零とする事を意味する。また、ヒンジ角 θ_k を指定された定数とし、ヒンジ各速度 u_{6+k} を零とする。オペレータ $L_k(\cdot)$ を繰り返し作用させることにより任意のヒンジが固定されている状態の運動方程式を生成させることができる。

次に、速度・角速度の不連続が発生するケースとして、時刻 t_1 に第*k*ヒンジにインパルス力が作用しヒンジの固定が解除された場合を考える。時刻 t_1 の前後に $t_1 - \Delta t, t_1 + \Delta t$ を考え、 t_1 より以前を状態1、以後を状態2とする。両状

態での運動方程式を次のように定義する。

$$\mathbf{M}^{(j)}\ddot{\mathbf{u}}^{(j)} = \mathbf{b}^{(j)} + \mathbf{f}^{(j)}, \quad (j = 1, 2) \quad (15)$$

両者の関係はオペレータ $L_k(\cdot)$ により次のように書ける。

$$\mathbf{M}^{(1)} = L_k(\mathbf{M}^{(2)}), \quad \mathbf{b}^{(1)} + \mathbf{f}^{(1)} = L_k(\mathbf{b}^{(2)} + \mathbf{f}^{(2)}) \quad (16)$$

運動方程式を $t_1 - \Delta t$ から $t_1 + \Delta t$ まで積分し、 Δt を零に近づけると、 $\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{f}$ が $t = t_1$ でデルタ関数として変化するため、次の関係が得られる。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_1 - \Delta t}^{t_1 + \Delta t} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} dt = (\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{M}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)})_{t=t_1} \quad (17)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_1 - \Delta t}^{t_1 + \Delta t} \mathbf{f} dt = (\Delta \mathbf{f})_{t=t_1} \quad (18)$$

ここで、 $\Delta \mathbf{f}$ はインパルス駆動トルクの強さである。

上記の関係より、インパルス入力後の変数値は

$$\mathbf{u}^{(2)} = (\mathbf{M}^{(2)})^{-1}(\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)} + \Delta \mathbf{f}), \quad \text{at } t = t_1 \quad (19)$$

で与えられる。ただし、固定されている全てのヒンジに関する変数 u_i を零と置き直す必要がある。式(19)は状態2の運動を解く際の初期条件を規定する。

不連続の発生するもう一つのケースは、ヒンジが指定された角度に達して固定された場合である。この場合もインパルス力が作用した場合と同様の考察によって、

$$\mathbf{u}^{(2)} = (\mathbf{M}^{(2)})^{-1}(\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{u}^{(1)}), \quad \text{at } t = t_1 \quad (20)$$

を導くことができる。ただし、式(19)と同様に、固定されている全てのヒンジに関する変数 u_i を零とする。なお両状態の関係は式(16)とは逆に次のようになる。

$$\mathbf{M}^{(2)} = L_k(\mathbf{M}^{(1)}), \quad \mathbf{b}^{(2)} + \mathbf{f}^{(2)} = L_k(\mathbf{b}^{(1)} + \mathbf{f}^{(1)}) \quad (21)$$

5. 解析例

初めに、図4に示した二剛体の解析例を紹介する。二つの剛体の特性は同じで、表1に諸元を記載する。ヒンジ角度 θ が零の状態、インパルスのヒンジ駆動トルクを与え、ヒンジ角度が180度に達した状態で両者を固定させる。展開開始時の初期値を式(19)で、固定後の初期値を式(20)で与え、運動方程式をルンゲ・クッタ・ジル法で初期値問題として数値的に解いた。

図5は各変数の時刻歴応答図である。図の上から順に本体の速度 u_1, u_2 、角速度 u_6 、ヒンジ角速度 $u_7 (= \dot{\theta})$ 、ヒンジ角 θ を表わしている。 $t = 0$ と、 $\theta = 180^\circ$ で速度、角速度に不連続が発生していることが読み取れる。また、ヒンジ固定後は全ての速度、角速度は零に戻っており、運動量、角運動量の保存則が成立していることが確認できる。図6に運動の状態を示す。ヒンジ固定後は初期の状態に戻り、全系の重心位置が移動していないことが分かる。

次に、本体、アーム、パネルの三剛体からなる人工衛星を想定し、パネルの展開解析を行なった。図7にモデルの概要を示し、諸元を表2に記載する。

パネル展開シーケンスを次のように設定した。

表1 二剛体モデルの諸元

size of main body	m	2×2×2
mass of main body	Kg	500
I_1, I_2, I_3	Kgm ²	750, 750, 750
impulse torque	N m	200

表2 人工衛星モデルの諸元

		main body	arm	panel
size	m	2×2×2	2×0×0	2×0×2
mass	Kg	500	10	100
I_1, I_2, I_3	Kgm ²	750, 750, 750	0.025, 15, 15	50, 90, 50
impulse torque	N m		40	60

ステップ1 アームとパネルを折り畳んで固定した状態から、本体・アーム間のヒンジにインパルス駆動トルクを与え、アームの展開を開始する。

ステップ2 本体・アーム間のヒンジ角度が90度に達した時点でアームを固定する。

ステップ3 アーム固定後0.5秒後に、アーム・パネル間のヒンジにインパルス駆動トルクを与え、パネルの展開を開始する。

ステップ4 アーム・パネル間のヒンジ角度が180度に達した時点でパネルを固定し展開を終了する。

図8は各変数の時刻歴応答図である。図の上から順に本体の速度 u_1, u_2 、角速度 u_6 、ヒンジ角速度 $u_7(=\dot{\theta}_1), u_8(=\dot{\theta}_2)$ 、ヒンジ角 θ_1, θ_2 を表わしている。インパルス力を加えた時点と、アーム、パネルを固定した時点で速度、角速度に不連続が発生していることが読み取れる。アームヒンジ固定後、パネルヒンジ固定後の両状態において、全ての速度、角速度は零に戻っており、運動量、角運動量の保存則が成立していることが確認できる。図9に運動の状態を表わす。二剛体の場合とは異なり、展開後の本体の姿勢は、展開前と変化している。

6. 結言

人工衛星のパネル展開解析を対象に、三次元多体剛体が速度・角速度の不連続を伴う運動を行なう際の解析法に関する研究を行なった。本研究の成果をまとめると次のようになる。

(1) 変数を本体重心の速度、角速度、ヒンジ角の角速度とし、ケイン(Kane)の方法で運動方程式を導いた。得られた方程式は、ヒンジを固定した場合の運動方程式への変換が容易で、今回のような、多体剛体の展開問題に適していることを示した。

(2) 式の変形に数式処理システムを利用した。こうした方法は人間のミスを防ぎ、しかも運動方程式を直接導くことが出来るため、有効なものであることが確認でき

図5 二剛体モデル本体の速度・角速度とヒンジ角・角速度の時間的变化

図6 二剛体モデルの運動

図7 人工衛星モデル

図8 人工衛星本体の速度・角速度とヒンジ角・角速度の時間的変化

図9 人工衛星モデルの運動

た。ただし、自由度が増すと導出される結果は膨大なものとなる。三剛体の解析では自由度は8であるが、運動方程式はFORTRAN形式の出力で400行以上に及んだ。これ以上複雑な問題は、数式処理システム、FORTRANコンパイラー両者にとって負担が重く、より効率の良い定式化の開発が今後の課題である。

(3) インパルス入力によりヒンジの固定を解除する際と、ヒンジを固定する際に、速度・角速度の不連続が発生する。本論文では、こうした非弾性衝突を伴う運動の解析法を新たに提案した。本方法の妥当性は、二剛体を対象とした数値的な応答計算の結果により確認できた。

(4) 本体、アーム、パネルの三剛体からなる人工衛星を想定したモデルに関して、畳み込まれたパネルをインパルス力により展開し、固定するまでのシミュレーションを実施し、本手法の有効性を実証した。

引用文献

- (1) Levinson, D.A., J. of Spacecraft, 14-8(1977), 479.
- (2) 赤城、A 1 技術によるシステム設計論、(1988)、コロナ社。
- (3) Huang, R.C., Haug, Jr., E.J. and Andrews, J.G., J. of Mechanical Design, 100(1978), 492.
- (4) Ehle, P.E., and Haug, E.J., J. of Mechanical Design, 104(1982), 90.
- (5) Wehage, R.A., and Haug, E.J., J. of Mechanical Design, 104(1982), 778.
- (6) Khulief, Y.A., and Shabana, A.A., J. of Mechanism, Transmission, and Automation in Design, 108(1986), 38.
- (7) Kane, T.R., and Levinson, D.A., J. of Guidance and Control, 3-2(1980), 99.
- (8) Kane, T.R., Linkins, P.W., and Levinson, D.A., Spacecraft Dynamics, (1983) McGraw-Hill.
- (9) MACSYMA Reference Manual Version 13, (1988), Synmolics.