終端自由な離散形離散値制御システムの 一制御手法に関する研究*

(第1報, 状態ベクトルに関して線形なシステムの場合)

宗 像 経 博^{*1}

A Control Technique for a Quantized Discrete Optimal Control System with Terminal Free Conditions (1st Report, In the Case of Systems Described by Linear State Equations)

Tsunehiro MUNAKATA

Control systems whose controls can only take given discrete-level values are called quantized control systems. Optimization of such systems has conventionally been performed by mathematical programming methods. In this paper, the author formulates a quantized discrete linear optimal control problem with terminal free conditions using Halkin's formulation and derives the quantized discrete maximum principle for discrete-level valued solutions, which is a pontryagin-type necessary and sufficient control condition. An algorithm based on this maximum principle is presented, along with a numerical example.

Key Words: Automatic Control, Control Theory, Quantized Discrete Optimal Control Systems with Terminal Free Conditions, Quantized Discrete Maximum Principle, Necessary and Sufficient Condition for Optimal Control

1. 緒 言

操作量がある与えられた離散値のみを取るシステムを離散値(量子的)システムというが, この種のシステムに関して, ここ20年かなりの学者によって研究がなされ, かなりの数の論文が出されている。離散値操作量を用いる離散値システムにおいては, 従来系の最適化を計るために数理計画法の一手法である動的計画手法が用いられ, Lewis-Tou⁽¹⁾, Arora-Pierre⁽²⁾は離散時間形について, Havira-Lewis⁽³⁾は連続時間形について確定系の制御の離散化を扱っている。また Kim-Djadjuri⁽⁴⁾は離散値操作量を整数値に正規化して整数計画法を適用している。このほか Larson⁽⁵⁾, Slaughter⁽⁶⁾, Widrow⁽⁷⁾, 津川⁽⁸⁾, 佐野⁽⁹⁾などの論文がある。

ところで, こうした離散値のみを取るような制御システムは, 通常の連続値を取る制御システムと比較してその制御の精度は落ちるが, 反面簡便でまたあらかじめ取り得る操作量を固定できるという利点がある。また, 近年のシステム制御の多様化に伴い不分割性を

有した投資制御, 交通制御システムに対するプログラム制御, 生体系の個体的数量制御のように離散的な操作量でなければ定式化できないような制御問題も多い。しかし, こうした離散値制御システムに関する基本的で制御工学的な研究は, 著者の知る限り, それほどなされておらず, システムの到達可能性や可制御性について安西⁽¹⁰⁾, 宮道⁽¹¹⁾などが, 動的最適化については著者ら^{(12)~(14)(18)}がみられる程度である。

ところで, 操作量に関し幾何学的な条件を仮定して最適化条件(離散形最大原理)を導いている Halkin⁽¹⁵⁾のアプローチはこの種のシステムに対しても有効と考えられ, したがって本報では Halkin の定式化を用い, 状態ベクトルに関して, 線形(入力制御ベクトルに関しては必ずしも線形ではない)で, 終端自由な離散形離散値最適制御システムに対し, その最適化条件(必要十分条件である)を与える量子的離散形最大原理を導き, この最大原理によるアルゴリズムを与えている。さらに本報のアルゴリズムを用いた数値例を与えている。

2. 終端自由な線形離散形 離散値制御システムの制御

2.1 終端自由な最適制御問題の定式化 システ

* 原稿受付 平成2年8月6日。

^{*1} 正員, 広島電機大学工学部(〒739-03 広島市安芸区中野6-20-1)。

ムの状態方程式を次のように与える。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i+1) - \mathbf{x}(i) &= \mathbf{A}(i)\mathbf{x}(i) + \mathbf{g}(i, \mathbf{u}(i)) \\ i &= 0, 1, \dots, k-1 \end{aligned} \quad (1)$$

ここに

$\mathbf{x}$: 状態ベクトルで空間 R^n の要素

$\mathbf{u}$: 制御ベクトルで空間 R^r の要素

$\mathbf{A}$: n 次元正方行列

$\mathbf{g}$: n 次元ベクトル

k : ある自然数

とする。なお $n > r$ である。

また $\mathbf{u}$ は次の性質を満たすものとする。

$$\mathbf{u} \in \Omega \subset R^r$$

ここで、 Ω は与えられた許容離散値制御ベクトルの集合で有限有界な要素からできている集合とする。

次の二つの事項を仮定する。

(i) 関数 $\mathbf{g}(i, \mathbf{u}(i))$ は $i=0, 1, \dots, k-1$ に対し、 $\mathbf{u}(i)$ について有界な関数である。

(ii) 行列 $\mathbf{I} + \mathbf{A}(i)$ は $i=0, 1, \dots, k-1$ に対し、正則である。なお、 $\mathbf{I}$ は単位行列を表す。

初期値(初期状態ベクトル)は $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ は与えられているとする。

このとき本報での最適制御問題を次のように定式化する。

与えられた初期値 $\mathbf{x}_0$ に対し、状態方程式(1)を満たし、

$$\mathbf{x}(k) \in R^n (\text{終端自由}) \quad (2)$$

かつ評価関数

$$\mathbf{x}^n(k): \text{最大} \quad (3)$$

とするような許容離散値制御ベクトルの列 $\{\mathbf{u}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k-1$ および対応する状態ベクトルの列 $\{\mathbf{x}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k$ を求める。

なお $\mathbf{x}^n(k)$ は $\mathbf{x}(k)$ の第 n (最後の) 要素を表す。

上記の問題を満足する離散値制御ベクトルの列 $\{\hat{\mathbf{u}}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k-1$ を最適制御ベクトルの列、また対応する状態ベクトルの列 $\{\hat{\mathbf{x}}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k$ を

図1 二次元システムの場合の状態方程式に基づく各時刻ごとの状態推移 [$\mathbf{x}(i)$ は第 i 時刻の状態空間(平面)を表す]

最適軌道と呼ぶことにする。なお以下時刻 i について $0, 1, \dots, k-1$ 等の記載を省略する所がある。

二次のシステムの場合であるが、図1に状態方程式に基づくシステムの状態推移の状況を示す。

本報の制御問題に対して、次に与える最大原理が成立する。

2.2 量子的離散形最大原理 $\{\hat{\mathbf{u}}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k-1$ を最適制御ベクトルの列, $\{\hat{\mathbf{x}}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k$ を最適軌道とすると、次のような非ゼロベクトルの列 $\{\hat{\mathbf{p}}(i)\}$, $i=0, 1, \dots, k$ が存在する。

(1) ハミルトン関数の最大化: $i=0, 1, \dots, k-1$ と Ω 内のすべての $\mathbf{u}$ に対して

$$H(i, \hat{\mathbf{x}}(i), \hat{\mathbf{u}}(i), \hat{\mathbf{p}}(i+1)) \geq H(i, \hat{\mathbf{x}}(i), \mathbf{u}, \hat{\mathbf{p}}(i+1)) \quad (4)$$

(2) 随伴方程式: $i=0, 1, \dots, k-1$ に対して

$$\hat{\mathbf{p}}(i) - \hat{\mathbf{p}}(i+1) = \mathbf{A}(i)^T \hat{\mathbf{p}}(i+1) \quad (5)$$

(3) 横断条件:

$$\hat{\mathbf{p}}(k) = \boldsymbol{\pi}, \quad \boldsymbol{\pi}^n \geq 0 \quad (6)$$

ここに、 $H(i, \mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i), \mathbf{p}(i+1))$ は、

$$\begin{aligned} H(i, \mathbf{x}(i), \mathbf{u}(i), \mathbf{p}(i+1)) \\ = \langle \mathbf{A}(i)\mathbf{x}(i) + \mathbf{g}(i, \mathbf{u}(i)), \mathbf{p}(i+1) \rangle \end{aligned}$$

であり、 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ はベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ との内積を表す。また $\mathbf{A}^T$ は行列 $\mathbf{A}$ の転置行列、 $\boldsymbol{\pi}$ は非ゼロ定ベクトルをそれぞれ表す。なお π^n は $\boldsymbol{\pi}$ の第 n 要素である。

2.3 量子的離散形最大原理の証明 各時刻ごとの到達可能点の集合 $W(i)$, $i=0, 1, \dots, k$ は、

$$W(0) = \{\mathbf{x}_0\} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} W(i) = \{\mathbf{x}(i) | \mathbf{x}(i) &= [\mathbf{I} + \mathbf{A}(i-1)]\mathbf{x}(i-1) \\ &+ \mathbf{g}(i-1, \mathbf{u}(i-1)) : \mathbf{u}(i-1) \in \Omega\} \end{aligned}$$

$$i=1, 2, \dots, k \quad (8)$$

で表される。なお $W(i)$, $i=0, 1, \dots, k$ は離散点の集合である。図2に示すように、最終時刻 k における $W(k)$ を考える。また稠密な集合 $S(\hat{\mathbf{x}}(k))$ を

図2 二次元システムの場合の最終時刻 k における集合 $S(\hat{\mathbf{x}}(k))$ および非ゼロベクトル $\boldsymbol{\pi}$ [$\text{co}W(k)$ は $W(k)$ の凸包を表す]

$$S(\bar{x}(k)) = \{x(k) | x^n(k) > \bar{x}^n(k)\} \dots\dots\dots (9)$$

と定義する。なお $\bar{x}^n(k)$ は最終時刻 k における最適状態ベクトル $\bar{x}(k)$ の第 n 要素である。

評価関数は線形であり、状態方程式の与えられ方から $x(k)$ はたかだか有限個、有界にしか存在し得ないので、 $\bar{x}(k)$ において

$$\langle x(k) - \bar{x}(k), \pi \rangle \geq 0, x(k) \in S(\bar{x}(k)) \dots\dots\dots (10)$$

$$\langle x(k) - \bar{x}(k), \pi \rangle \leq 0, x(k) \in W(k) \dots\dots\dots (11)$$

となる非ゼロベクトル π が存在する**1。

$\bar{p}(k) = \pi$ となるような

$$\bar{p}(i) - \bar{p}(i+1) = A(i)^T \bar{p}(i+1) \dots\dots\dots (12)$$

の解として、 $\bar{p}(k-1), \bar{p}(k-2), \dots, \bar{p}(1), \bar{p}(0)$ を定義する。したがって、随伴方程式は満たされる。

このとき、 $i=0, 1, \dots, k$ に対して

$$\langle x(i) - \bar{x}(i), \bar{p}(i) \rangle \leq 0, x(i) \in W(i) \dots\dots\dots (13)$$

である。

これを背理法で示す。

ある $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, $x(j) \in W(j)$, $\epsilon > 0$ に対して、

$$\langle x(j) - \bar{x}(j), \bar{p}(j) \rangle = \epsilon > 0$$

と仮定する。

関係式

$$x(i+1) = [I + A(i)]x(i) + g(i, \bar{u}(i))$$

$$i = j, j+1, \dots, k-1$$

により $x(j+1), x(j+2), \dots, x(k)$ を与える。このとき、これら $x(j+1) > \dots, x(k)$ に対して

$$\begin{aligned} \langle x(j) - \bar{x}(j), \bar{p}(j) \rangle - \langle x(j+1) \\ - \bar{x}(j+1), \bar{p}(j+1) \rangle &= 0 \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

である。

これは次のようにして示される。式(12)より、 $\bar{p}(j) = [I + A(j)]^T \bar{p}(j+1)$ 、また関係式と最適ベクトルの性質とより、

$$x(j+1) = [I + A(j)]x(j) + g(j, \bar{u}(j))$$

$$\bar{x}(j+1) = [I + A(j)]\bar{x}(j) + g(j, \bar{u}(j))$$

が成立するので、本報の仮定である $I + A(j)$ は正則行列であることに留意すれば、式(14)の左辺は零となる。

したがって、この式(14)の関係より、

$$\langle x(k) - \bar{x}(k), \bar{p}(k) \rangle = \epsilon, x(k) \in W(k)$$

となる。しかしこれは式(11)に矛盾する。以上より、式(13)が示された。

ハミルトン関数の最大化の証明

ある $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, $\bar{u}(j) \in \Omega$, $\epsilon > 0$ に対して

$$H(i, \bar{x}(i), \bar{u}(j), \bar{p}(j+1))$$

$$= H(j, \bar{x}(j), \bar{u}(j), \bar{p}(j+1)) + \epsilon$$

と仮定する。

状態方程式(1)において、

$$\bar{x}(j+1) = [I + A(j)]\bar{x}(j) + g(j, \bar{u}(j))$$

で与えられる $\bar{x}(j+1) \in W(j+1)$ に対して、

$$\epsilon = H(j, \bar{x}(j), \bar{u}(j), \bar{p}(j+1))$$

$$- H(j, \bar{x}(j), \bar{u}(j), \bar{p}(j+1))$$

$$= \langle g(j, \bar{u}(j)) - g(j, \bar{u}(j)), \bar{p}(j+1) \rangle$$

$$= \langle \bar{x}(j+1) - \bar{x}(j+1), \bar{p}(j+1) \rangle > 0$$

となり、式(13)に矛盾する。

最後に横断条件の証明

随伴ベクトルの逆時間方向の初期値である $\bar{p}(k) = \pi$ については、図2に示すように、稠密な凸集合 $co W(k)$ および稠密な凸集合 $S(\bar{x}(k))$ を、 $\bar{x}(k)$ において分離する分離超平面の原点方向と反対向きこの配ベクトルとして存在する。したがって、横断条件として $\bar{p}(k) = \pi$ とできる。そして $\langle x(k) - \bar{x}(k), \pi \rangle \leq 0$, $x(k) \in W(k)$ であり、また $x(k) - \bar{x}(k)$ の第 n 要素は必ず負であるので、 π の第 n 要素 π^n は $\pi^n \geq 0$ となる。

一方、式(4)、(5)、(6)から求まる各時刻の最適状態ベクトル $\bar{x}(i)$ は式(13)により $W(i)$ の最も外側の状態ベクトルとなり、最終時刻 k では結果として式(10)、(11)で評価関数 $x^n(k)$ の最大値を与える最適状態ベクトル $\bar{x}(k)$ になる。したがって、十分条件としても成り立つことが確認された。

以上より最大原理が証明された。

2.4 解法のアルゴリズム 2.3節で導いた量子的離散形最大原理による解法のアルゴリズムを与える。当アルゴリズムでは、随伴ベクトルの逆時間方向の初期値 $\bar{p}(k) = \pi$, $\pi^n \geq 0$ であるので、随伴方程式により $\bar{p}(i)$, $i = k-1, k-2, \dots, 1, 0$ を求め、ハミルトン関数の最大化を順時間方向に行えばよい。以下にアルゴリズムを与え、フローチャート(図3)で示す。

アルゴリズム

step 1 $\bar{p}(k) = \pi$, $i = k-1$ とおく。

step 2 $\bar{p}(i) - \bar{p}(i+1) = A(i)^T \bar{p}(i+1)$ より $\bar{p}(i)$ を求める。($i=1$ まで)

step 3 $\bar{x}(0) = x_0$, $i=0$ とおく。

$$\max \{ \langle A(i)\bar{x}(i) + g(i, u(i)), \bar{p}(i+1) \rangle \}$$

$$u(i) \in \Omega$$

を解いて $\bar{u}(i)$ を求める。

step 4 $\bar{x}(i+1) - \bar{x}(i) = A(i)\bar{x}(i) + g(i, \bar{u}(i))$ より

$$\bar{x}(i+1) \text{ を求める。}$$

$i < k-1$ ならば、 $i = i+1$ として step 3 へ。

**1 集合 $W(k)$ の要素は有界だから、 $W(k)$ の凸包である $co W(k)$ に対し、集合 $S(\bar{x}(k))$ と $co W(k)$ とはともに稠密な凸集合で、かつ $\bar{x}(k)$ のみを共有している。したがって $\bar{x}(k)$ において分離定理が成立する。また凸包の定義より、 $W(k) \subset co W(k)$ である。

$i=k-1$ ならば、終わり。

なお、アルゴリズムの step 1 に関して、 $\bar{p}(k)=\pi=(0^T 1)^T$ とすればよい。なおここで 0 は $n-1$ 次元の零ベクトルを表す。

またアルゴリズムの step 3 に関しては、許容制御の集合 Ω は有限有界な離散値を要素とする集合だから、ハミルトン関数の最大化については最悪の場合 Ω の要素を総当たりすれば、最適制御ベクトルは求まる。しかし一般的には制約条件である Ω に対して、ハミルトン関数を最大にする整数計画問題として、branch and bound 法などを用いて解くことになる。

2.5 数値例 本報では、次に示す三次の最適制御問題に対し、2.4 節のアルゴリズムを用いた解法結果を示す。なお数値計算にはパーソナルコンピュータ PC 9801 RX を用いた。

状態方程式：

$$\begin{bmatrix} x^1(i+1) \\ x^2(i+1) \\ x^3(i+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^1(i) \\ x^2(i) \\ x^3(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 & 1 \\ -3 & -2i & 0 \\ 1 & i^2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1(i) \\ x^2(i) \\ x^3(i) \end{bmatrix}$$

図 3 フローチャート

$$+ \begin{bmatrix} u^1(i) & -1 \\ 2 & i \\ 3 & -u^2(i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1(i) \\ u^2(i) \end{bmatrix}, \quad i=0, 1, \dots, 7$$

許容離散値操作量：

$$u(i) = \begin{bmatrix} u^1(i) \\ u^2(i) \end{bmatrix} \in \Omega = \left\{ \begin{array}{l} 3u^1(i) + 5u^2(i) \leq 15 \\ 4u^1(i) + 2u^2(i) \leq 4 \\ u^1(i), u^2(i) \geq 0, \text{ 整数} \end{array} \right\}$$

初期値：

$$x(0) = \begin{bmatrix} x^1(0) \\ x^2(0) \\ x^3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

評価関数：

$$x^3(8) : \text{最大(終端自由)}$$

(結果)

仮定 (i) (ii) は満たしている。

随伴方程式は次のようになる。

$$\bar{p}(i) = \begin{bmatrix} 1+i & -3 & 1 \\ 0 & -2i+1 & i^2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \bar{p}(i+1), \quad i=0, 1, \dots, 7$$

$$\bar{p}(8) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

より、随伴ベクトルは逆時間方向に

$$\bar{p}(7) = \begin{bmatrix} 1 \\ 49 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}(6) = \begin{bmatrix} -136 \\ -395 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}(5) = \begin{bmatrix} 386 \\ 3980 \\ -68 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}(4) = \begin{bmatrix} -10078 \\ -28948 \\ 114 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}(3) = \begin{bmatrix} 46646 \\ 145766 \\ -9622 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}(2) = \begin{bmatrix} -306982 \\ -475786 \\ 8158 \end{bmatrix}, \quad \bar{p}(1) = \begin{bmatrix} 821552 \\ 483944 \\ -274350 \end{bmatrix} \text{ と求まる。}$$

次にハミルトン関数の最大化を順時間方向に行う。

0 時刻では

$$\begin{aligned} H_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x}^1(0) \\ \hat{x}^2(0) \\ \hat{x}^3(0) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} u^1(0) & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -u^2(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^1(0) \\ u^2(0) \end{bmatrix}, \quad \bar{p}(1) \\ &= 821522(u^1(0))^2 + 274350(u^2(0))^2 \\ &+ 144838u^1(0) - 821552u^2(0) : \text{最大} \end{aligned}$$

ただし

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} u^1(0) \\ u^2(0) \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 3u^1(0) + 5u^2(0) \leq 15 \\ 4u^1(0) + 2u^2(0) \leq 4 \\ u^1(0), u^2(0) \geq 0, \text{ 整数} \end{array} \right. \right\}$$

$$\therefore \bar{u}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} \bar{x}(1) &= \bar{x}(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}(0) + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

同様にして

H_1 : 最大より,

$$\bar{u}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(2) = \begin{bmatrix} 14 \\ -16 \\ 32 \end{bmatrix}$$

H_2 : 最大より,

$$\bar{u}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(3) = \begin{bmatrix} 73 \\ 12 \\ 77 \end{bmatrix}$$

H_3 : 最大より,

$$\bar{u}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(4) = \begin{bmatrix} 369 \\ -279 \\ 489 \end{bmatrix}$$

H_4 : 最大より,

$$\bar{u}(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(5) = \begin{bmatrix} 2 \ 331 \\ 858 \\ -2 \ 148 \end{bmatrix}$$

H_5 : 最大より,

$$\bar{u}(5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(6) = \begin{bmatrix} 11 \ 838 \\ -14 \ 715 \\ 15 \ 189 \end{bmatrix}$$

H_6 : 最大より,

$$\bar{u}(6) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(7) = \begin{bmatrix} 98 \ 052 \\ 126 \ 369 \\ -457 \ 155 \end{bmatrix}$$

H_7 : 最大より,

$$\bar{u}(7) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(8) = \begin{bmatrix} 327 \ 265 \\ -1 \ 936 \ 949 \\ 4 \ 461 \ 519 \end{bmatrix}$$

と求まる。なお、ハミルトン関数の最大化には branch and bound 法を用いた。

3. 結 言

終端自由な線形離散形離散値制御システムに対し、その一制御手法として Pontryagin タイプの離散形最大原理を導いた。さらにこの最大原理によるアルゴリズムを示し、数値例にこの方法を適用することにより

最適解を求めた。

ところで数理計画手法を用いた従来の方法と本稿での方法との比較については、どちらの方法もその中心となる点は整数計画問題を解くという点では同一であるが、その変数の次元が本報の場合、離散時刻ごとに分割されているので、その次元が相当に押さえられる点である。なお本報の場合すなわち終端自由の場合は、随伴ベクトル $\bar{p}(k)$ が横断条件: $\bar{p}^n(k) \geq 0$ により容易に決められ、この点は終端固定⁽¹⁶⁾、複数評価関数⁽¹⁷⁾等の場合に比較してずいぶん簡単である。また本報の数値例の場合、最終時刻 ($i=8$) における到達可能離散状態ベクトル 2 097 152 個 ($8^7=2\ 097\ 152$ で、確かに有限個ではあるが) の中から評価関数 $[x^3(8)]$ の最大な状態ベクトル $\bar{x}(8)$ が [もちろん $\bar{u}(i), \bar{x}(i), i=0, 1, \dots, 7$ も同様に] 求まっているが、本報の最適化条件は必要十分条件であることに留意したい。

本研究にご尽力下さった恩師慶應義塾大学理工学部、林善男教授、同志水清孝教授、同安西祐一郎教授に謝辞を申し上げる。

文 献

- (1) Lewis, J. B. and Tou, J. T., Optimum Sampled-Data Systems with Quantized Control Signals, *AIEE* 82, (1963), 229-233.
- (2) Arora, J. K. and Pierre, D. A., Optimal Trajectories for Multidimensional Nonlinear Process by Iterated Dynamic Programming, *IEEE SMC-3*, No. 1(1973), 85-91.
- (3) Havira, R. M. and Lewis, J. B., Computation of Quantized Controls Using Differential Dynamic Programming, *IEEE AC-17*, No. 2(1972), 191-196.
- (4) Kim, M. and Djadjuri, K., Optimum Sampled-Data Control Systems with Quantized Control Function, *ISA Trans.*, 6-1(1967), 65-73.
- (5) Larson, R. E., Optimum Quantization in Dynamic Systems, *IEEE AC-12*, No. 2(1967), 162-168.
- (6) Slaughter, J. B., Quantization Errors in Digital Control Systems, *IEEE AC-9*, No. 1(1964), 70-74.
- (7) Widrow, B., Statistical Analysis of Amplitude-Quantized Sampled-Data Systems, *AIEE Trans.*, 79 (1961), 555-567.
- (8) 津川, フィードバック制御系での準最適状態量子化, *STCE 論文集*, 9-3(1973), 320-327.
- (9) 佐野, 量子化操作量を利用した準最適レギュレータ問題, *SICE 論文集*, 11-5(1975), 521-527.
- (10) Anzai, Y., A Note on Reachability of Discrete-Time Quantized Control Systems, *IEEE AC-19*, No. 5(1972), 575-577.
- (11) 宮道・深尾, 離散値によるシステムの制御可能性について, システムシンポジウム講演論文集, (1975-7), 207-212.
- (12) 林・宗像・金子, 離散時間形量子的最適制御システムへの一制御手法の考察, システムと制御, 21-5(1977), 35-44.
- (13) 宗像・安西, 動学的投資モデルの制御工学的な最適投資時間の決定について, 第2回システムシンポジウム講演論文集, (1976-7), 49-54.
- (14) 宗像, 離散時間形量子的最適制御システムに関する研究

- とその応用, 博士課程論文, 慶応義塾大学, (1977).
- (15) Halkin, H., Optimal Control for Systems Described by Difference Equations, *Advances in Control Systems*, **1** (1966), 90-111.
- (16) 宗像, 終端条件を有する離散形離散値制御システムの一制御手法に関する研究, 機論, **55-517, C**(1989), 2342.
- (17) 宗像, 二評価関数を有する Halkin タイプの制御問題の最適離散値解, システムと制御, **28-11**(1984), 61-68.
- (18) 宗像, 離散時間形量子的最適制御システムの一制御手法, 広島電機大学・広島自動車工業短期大学研究報告, **11**(1978), 83-93.
-