多入力多出力1形デッドビートサーボ系のLQ最適制御*

清田 高德^{*1}, 近藤 英二^{*1}
須永 照雄^{*1}, 井崎 伸二^{*2}Linear-Quadratic Optimal Control for Multi-Input,
Multi-Output Type-1 Deadbeat Servo Systems

Takanori KIYOTA, Eiji KONDO, Teruo SUNAGA and Shinji IZAKI

This paper discusses the linear-quadratic optimal control problem of a type-1 deadbeat servo system for a multi-input, multi-output linear time-invariant discrete-time system. The type-1 servo system is formulated by using the augmented system and its deviation system. By using the deadbeat principle, the deviation system is transformed into the new time-variant system with the time-variant structure of the new inputs. The performance index is transformed into the new one, and the new terminal state is free. The optimal deviation inputs are made up of three phases, and they are given by linear combinations of the constant gain state feedback and the variable gain state feedback. The variable gains are obtained by using the special nonstationary Riccati equation. The optimal gains are independent of the initial state of the controlled system, the step command signal and the step disturbance.

Key Words: Automatic Control, Servo System, Deadbeat Control, Linear Quadratic, Multi-Input, Multi-Output

1. ま え が き

デッドビートサーボ系は、出力を有限時間で目標値に整定させる高精度かつ高速な制御系であり、これまでに多くの研究^{(1)~(5)}がなされてきたが、それらは特定の制御装置に対するパラメータ最適化となっている。著者ら⁽⁶⁾は一入力一出力系の1形サーボ系に対し、終端状態固定条件(デッドビート条件)以外の制限がない場合のLQ最適制御問題の解法を示し、最適偏差入力に一定ゲインと時変ゲインの状態フィードバックで表現できることを明らかにした。しかし、多入力多出力系に対しては、デッドビートサーボ系のLQ最適制御問題の解法は求められていない。

本論文では、多入力多出力線形定常離散時間系の1形デッドビートサーボ系に対し、終端状態固定条件のもとで二次形式評価関数を最小化するLQ最適制御問題について述べる。一般の1形サーボ系は、内部モデル原理を満足しなければならない。そこで、出力数と同じ数の積分特性を付加した拡大系の偏差系に対し、最適化を行う。この最適化問題に直接ラグランジュの

未定乗数法を適用すると、最適解は偏差系の両端の状態が固定される二点境界値問題の解となり、一般にこの二点境界値問題を解くことは難しい⁽⁷⁾。そこで、終端状態が零になる入力(デッドビート入力)の一般形が満足すべきデッドビート原理⁽⁸⁾を用いてこの問題を変換し、新しい終端状態が自由な特別なLQ問題を誘導する。デッドビート原理と誘導されたLQ問題より、最適偏差入力を有界なゲインをもつ状態フィードバック則で表現し、そのときの二次形式評価関数の最小値を求める。最後に、例題を示す。

2. 問題の設定

制御対象として、次の可到達かつ可観測な多入力多出力線形定常離散時間系を考える。

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{d} \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t)$ は $n \times 1$ 状態ベクトル、 $\mathbf{u}(t)$ は $m \times 1$ 入力ベクトル、 $\mathbf{y}(t)$ は $r \times 1$ 出力ベクトル、 $\mathbf{d}$ は $t=0$ で制御対象に加わる $n \times 1$ ステップ状外乱、 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ の定数行列とし、 t は零または正の整数とする。また、

$$\text{rank } \mathbf{B} = m \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

$$\text{rank } \mathbf{C} = r \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

* 原稿受付 平成2年6月28日。

^{*1} 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。^{*2} 学生員、九州大学大学院。

とする。

今、制御対象の $r \times 1$ ステップ状目標値 y_d が $t=0$ で与えられたとすると、 $r \times 1$ 追従誤差 $e(t)$ は、

$$e(t) = y(t) - y_d \dots\dots\dots (5)$$

となる。1形サーボ系の目的は、有限の時間以後 $e(t) = 0$ とするか、 $t \rightarrow \infty$ のとき $e(t) \rightarrow 0$ とすることであるが、一般に可到達の条件だけではこの目的は実現できない。そこで、1形サーボ系の構成条件として、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + r \quad (\text{行最大階数}) \dots\dots\dots (6)$$

が必要であることが知られている。ここで、 I_n は $n \times n$ 単位行列とする。

制御対象の初期状態 $x(0)$ およびステップ状外乱の大きさ d とステップ状目標値の大きさ y_d に依存しない1形サーボ系を構成するためには、出力数と同じ数の積分特性を付加した拡大系を考えればよいことが知られている。そこで、 $r \times 1$ ベクトル $w(t)$ を用いて

$$w(t+1) = w(t) + e(t) \dots\dots\dots (7)$$

を付加した拡大系を考える。式(1)、(2)、(7)より、 $x(t)$ と $w(t)$ を新たな状態とする拡大系は、

$$\hat{x}(t+1) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) + \hat{d} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_r \end{bmatrix} \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{d} = \begin{bmatrix} d \\ -y_d \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで、 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ はそれぞれ $(n+r) \times (n+r)$ と $(n+r) \times m$ の実定数行列である。

次に、式(8)から $\hat{d}$ の影響を除くために、拡大系の偏差系を求める。新しい状態の偏差(差分) $\hat{z}(t)$ と入力偏差(差分) $\hat{u}(t)$ をそれぞれ

$$\hat{z}(t) = \hat{x}(t+1) - \hat{x}(t) \dots\dots\dots (10)$$

$$\hat{u}(t) = u(t+1) - u(t) \dots\dots\dots (11)$$

とおくと、偏差系

$$\hat{z}(t+1) = \hat{A}\hat{z}(t) + \hat{B}\hat{u}(t) \dots\dots\dots (12)$$

を得る。ここで、 $\hat{z}(t)$ は $(n+r) \times 1$ 状態ベクトル、 $\hat{u}(t)$ は $m \times 1$ 偏差入力ベクトルである。

さらに、

$$e(t) = [0 \quad I_r] \hat{z}(t) \dots\dots\dots (13)$$

より、追従誤差 $e(t)$ は偏差系の出力となる。なお、拡大系の偏差系式(12)、(13)は可到達かつ可観測である⁽⁹⁾。

1形デッドビートサーボ系では、有限の終端時刻 τ において出力 $y(t)$ が目標値 y_d に一致する条件

$$e(\tau) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

が必要である。ところで、制御対象が連続時間系から

サンプリングにより求められた場合も考えると、サンプリング点間の応答もデッドビートさせるためには、偏差系の出力 $e(t)$ だけではなく状態 $\hat{z}(t)$ も整定させることが望ましい。 $\hat{z}(t) = 0$ とすれば $e(t) = 0$ となり、状態と入力もそれぞれの定常値に整定するので、サーボ系は整定する。

よって、式(12)に対し、終端時刻 τ において偏差系の終端状態固定条件(状態デッドビート条件)

$$\hat{z}(\tau) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

を付加する。そして、この条件のもとで、二次形式評価関数

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\tau-1} [\hat{z}(t)' \hat{Q} \hat{z}(t) + \hat{u}(t)' \hat{R} \hat{u}(t)] \dots\dots\dots (16)$$

を最小化するデッドビートLQ最適制御問題を考える。ここで、 $'$ は転置を表し、重み行列 $\hat{Q}$ は $(n+r) \times (n+r)$ 半正定対称行列、 $\hat{R}$ は $m \times m$ 正定対称行列とする。

この最適化問題に直接ラグランジュの未定乗数法を適用すると、最適解は偏差系の両端の状態が固定される二点境界値問題の解となり、一般にこの二点境界値問題を解くことは難しい⁽⁷⁾。そこで、偏差系の終端状態固定条件式(15)を除くことを考える。

3. デッドビート入力

ここでは、偏差系の状態デッドビートが可能な入力(デッドビート入力)の一般形について要約する⁽⁸⁾。なお、表現を簡単化するために、次のLuenbergerの可到達正準形を用いる。

[補題] 可到達性と B が最大階数 m を持つという仮定より、 A と B と C が与えられると、偏差系の可到達指数の族と呼ばれる m 個の正の整数が一意的に定まる。この不変量を順序付けてして

$$n_1 + \dots + n_m = n + r \dots\dots\dots (17)$$

$$n + r \geq n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 1 \dots\dots\dots (18)$$

とする。なお、 n_1 を最大可到達指数と呼ぶ。さらに、式(12)は、適当な座標変換

$$\hat{z}(t) = \hat{S}_1 \bar{z}(t), \hat{u}(t) = \hat{S}_2 \bar{u}(t) \dots\dots\dots (19)$$

により、次のLuenbergerの可到達正準形に変換することができる。

$$\bar{z}(t+1) = (J_0 + EA^*) \bar{z}(t) + E\bar{u}(t) \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 J_0 は m 個の $n_i \times n_i$ ベキ零ジョルダン細胞を左上から n_i の大きさの順に並べた $(n+r) \times (n+r)$ ベキ零ジョルダン行列である。また、 E は第 $(n_1 + \dots + n_i, i)$ 成分 $(i=1, \dots, m)$ のみが1で、他は零なる $(n+r) \times m$ 行列である。さらに、 A^* は $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ 、 $\hat{S}_1$ および

$\bar{S}_2$ が与えられれば定まる $m \times (n+r)$ 定数行列である。

なお、偏差系式(12)の可到達指数の族 $(n_1, \dots, n_m)$ と制御対象式(1)の可到達指数の族の間にはある関係が成立する⁽⁹⁾。

ところで、偏差系の最大可到達指数は n_1 なので、偏差系の終端状態固定条件式(15)が成立するためには、終端時刻 τ は、

$$\tau \geq n_1 \quad \dots\dots\dots (21)$$

でなければならない⁽¹⁾⁽⁸⁾。そこで、

$$\tau = n_1 + q \quad (q \text{ は } 0 \text{ または正の整数}) \quad \dots\dots (22)$$

とおくと、次の原理が成立する。

[デッドビート原理]⁽⁸⁾ 任意の初期状態 $\bar{z}(0)$ に対し、終端状態固定条件 (状態デッドビート条件)

$$\bar{z}(n_1 + q) = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

を満足するデッドビート入力 $\bar{u}(t)$ の一般形は、次の [1]~[3] と等価でなければならない。

[1] $0 \leq t \leq q-1$ のとき

$\bar{u}(t)$ は任意。

[2] $q \leq t \leq n_1 - n_m + q - 1$ のとき $\bar{u}(t)$ の第 i 成分 $\bar{u}_i(t)$ は

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} -e_m(i)A^* \bar{z}(t) & (n_i \geq n_1 + q - t) \\ \text{任意} & (n_i \leq n_1 + q - t - 1) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (24)$$

となる。ここで、 $e_m(i)$ は第 i 成分のみが1で他は零なる $1 \times m$ 単位ベクトルである。

[3] $n_1 - n_m + q \leq t \leq n_1 + q - 1$ のとき

$$\bar{u}(t) = -A^* \bar{z}(t) \quad \dots\dots\dots (25)$$

なお、 $q=0$ のときは、[1]の場合は存在しない。

4. 最適制御

[デッドビート原理]を用いれば、偏差系の終端状態固定条件式(15)のない最適化問題を誘導することができる。

まず、Luenbergerの可到達正準形を用いて評価関数式(16)を変換すると、

$$J(n_1 + q) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{n_1+q-1} [\bar{z}(t)' \bar{Q} \bar{z}(t) + \bar{u}(t)' \bar{R} \bar{u}(t)] \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\bar{Q} = \bar{S}_1' \bar{Q} \bar{S}_1 \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\bar{R} = \bar{S}_2' \bar{R} \bar{S}_2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。明らかに、 $\bar{Q}$ は $(n+r) \times (n+r)$ 半正定対称行列、 $\bar{R}$ は $m \times m$ 正定対称行列である。さらに、評価関数の加法性より、[デッドビート原理]の三つの相に対応して $J(n_1 + q)$ を次のように分割する。

$$J(n_1 + q) = J_1(n_1 + q) + J_2(n_1 + q) + J_3(n_1 + q) \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$J_1(n_1 + q) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{q-1} [\bar{z}(t)' \bar{Q} \bar{z}(t) + \bar{u}(t)' \bar{R} \bar{u}(t)] \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$J_2(n_1 + q) = \frac{1}{2} \sum_{t=q}^{n_1-n_m+q-1} [\bar{z}(t)' \bar{Q} \bar{z}(t) + \bar{u}(t)' \bar{R} \bar{u}(t)] \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$J_3(n_1 + q) = \frac{1}{2} \sum_{t=n_1-n_m+q}^{n_1+q-1} [\bar{z}(t)' \bar{Q} \bar{z}(t) + \bar{u}(t)' \bar{R} \bar{u}(t)] \quad \dots\dots\dots (32)$$

以上の前提のもとに、[デッドビート原理]の各相に分けて終端状態固定条件のない新しい最適化問題を定式化する。なお、簡単のため

$$n_1 - n_m + q - 1 = p \quad \dots\dots\dots (33)$$

とおく。

[1] 第二相 ($t=q, \dots, p$)

式(24)の任意成分の数を m_t とすると、式(24)は $\bar{u}(t) = F(t) \bar{z}(t) + W_t(t) \bar{v}_t(t) \quad \dots\dots\dots (34)$

$$F(t) = - \begin{bmatrix} e_m(1) \\ \vdots \\ e_m(m-m_t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} A^* \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$W_t(t) = \begin{bmatrix} e_m(m-m_t+1) \\ \vdots \\ e_m(m) \end{bmatrix}' \quad \dots\dots\dots (36)$$

と表すことができる。ここで、 $F(t)$ は $m \times (n+r)$ 行列、 $W_t(t)$ は $m \times m_t$ 行列、 $\bar{v}_t(t)$ は $m_t \times 1$ 任意入力である。さらに、 $\bar{v}_t(t)$ と $W_t(t)$ の次元は時変となり、

$$\text{rank } W_t(t) = m_t \quad (\text{列最大階数}) \quad \dots\dots\dots (37)$$

となる。式(34)を式(20)に代入すると、制御対象は

$$\bar{z}(t+1) = \bar{A}(t) \bar{z}(t) + \bar{B}_t(t) \bar{v}_t(t) \quad \dots\dots\dots (38)$$

となる。ここで、 $(n+r) \times (n+r)$ 行列 $\bar{A}(t)$ と $(n+r) \times m_t$ 行列 $\bar{B}_t(t)$ は、それぞれ

$$\bar{A}(t) = J_0 + E[A^* + F(t)] \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\bar{B}_t(t) = E W_t(t) \quad \dots\dots\dots (40)$$

である。さらに、評価関数式(31)は

$$J_2(n_1 + q) = \frac{1}{2} \sum_{t=q}^p [\bar{z}(t)' \bar{Q}(t) \bar{z}(t) + 2 \bar{z}(t)' \bar{S}_t(t) \bar{v}_t(t) + \bar{v}_t(t)' \bar{R}_t(t) \bar{v}_t(t)] \quad \dots\dots\dots (41)$$

となる。ここで、重み行列はそれぞれ

$$\bar{Q}(t) = \bar{Q} + F(t)' \bar{R} F(t) \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$\bar{S}_t(t) = F(t)' \bar{R} W_t(t) \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$\bar{R}_t(t) = W_t(t)' \bar{R} W_t(t) \quad \dots\dots\dots (44)$$

である。明らかに、 $\bar{Q}(t)$ は $(n+r) \times (n+r)$ 半正定対称行列、 $\bar{S}_i(t)$ は $(n+r) \times m_i$ 行列であり、式(37)より $\bar{R}_i(t)$ は $m_i \times m_i$ 正定対称行列である。

[2] 第一相 ($t=0, \dots, q-1$)

入力はすべて任意であるが、統一的に表現するために、第二相と同様な表現を用いる。すなわち、

$$m_i = m \quad \dots\dots\dots (45)$$

となるので、式(34)において

$$F(t)=0, W_i(t)=I_m, \bar{v}_i(t)=\bar{u}(t) \quad \dots\dots\dots (46)$$

とおき、新しい制御対象式(38)において

$$\bar{A}(t)=J_0+EA^*, \bar{B}_i(t)=E \quad \dots\dots\dots (47)$$

とおく。また、評価関数式(30)は、

$$\begin{aligned} J_1(n_1+q) = & \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{q-1} [\bar{z}(t)' \bar{Q}(t) \bar{z}(t) \\ & + 2\bar{z}(t)' \bar{S}_i(t) \bar{v}_i(t) + \bar{v}_i(t)' \bar{R}_i(t) \bar{v}_i(t)] \\ & \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

$$\bar{Q}(t)=\bar{Q}, \bar{S}_i(t)=0, \bar{R}_i(t)=\bar{R} \quad \dots\dots\dots (49)$$

となる。

[3] 第三相 ($t=p+1, \dots, n_1+q-1$)

式(25)を式(20)に代入すると

$$\bar{z}(t+1)=J_0 \bar{z}(t) \quad \dots\dots\dots (50)$$

となるので、

$$\bar{z}(t)=J_0^{t-p-1} \bar{z}(p+1) \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$\bar{u}(t)=-A^* J_0^{t-p-1} \bar{z}(p+1) \quad \dots\dots\dots (52)$$

を得る。よって、評価関数式(32)は

$$J_3(n_1+q)=\frac{1}{2} \bar{z}(p+1)' \bar{Q}_3 \bar{z}(p+1) \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$\bar{Q}_3 = \sum_{t=p+1}^{n_1+q-1} (J_0^{t-p-1})' [\bar{Q} + (A^*)' \bar{R} A^*] J_0^{t-p-1} \quad \dots\dots\dots (54)$$

となる。明らかに、 $\bar{Q}_3$ は $(n+r) \times (n+r)$ 半正定対称行列である。

以上をまとめると、新しい制御対象は、 $t=0, \dots, p$ において

$$\bar{z}(t+1)=\bar{A}(t) \bar{z}(t) + \bar{B}_i(t) \bar{v}_i(t) \quad \dots\dots\dots (55)$$

となり、新しい評価関数は

$$\begin{aligned} J(n_1+q) = & \frac{1}{2} \sum_{t=0}^p [\bar{z}(t)' \bar{Q}(t) \bar{z}(t) + 2\bar{z}(t)' \bar{S}_i(t) \bar{v}_i(t) + \bar{v}_i(t)' \bar{R}_i(t) \bar{v}_i(t)] + \frac{1}{2} \bar{z}(p+1)' \bar{Q}_3 \bar{z}(p+1) \\ & \dots\dots\dots (56) \end{aligned}$$

となる。すなわち、定常系の終端状態固定条件付 LQ 最適制御問題から、新しい終端状態 $\bar{z}(p+1)$ が自由な LQ 最適制御問題が誘導された。この誘導された LQ 問題では、制御対象は入力の構造が変化する時変系となり、評価関数は重み行列が時変で相乗項を含む二次形式評価関数となる。

この誘導された LQ 問題は、ラグランジュの未定乗数法とリカッチ変換を用いて解くことができる。まず、 $p+1$ 個の $(n+r) \times 1$ 未定乗数ベクトル $\bar{\lambda}(t)$ ($t=1, \dots, p+1$) を用いると、ラグランジュ関数 $\bar{L}$ は

$$\bar{L} = J(n_1+q) + \sum_{t=0}^p \bar{\lambda}(t+1)' [\bar{A}(t) \bar{z}(t) + \bar{B}_i(t) \bar{v}_i(t) - \bar{z}(t+1)] \quad \dots\dots\dots (57)$$

となる。 $\bar{L}$ を $\bar{z}(t)$ および $\bar{v}_i(t)$ で偏微分して 0 とおくと、それぞれ

$$\bar{\lambda}(t) = \bar{Q}(t) \bar{z}(t) + \bar{A}(t)' \bar{\lambda}(t+1) + \bar{S}_i(t) \bar{v}_i(t) \quad (1 \leq t \leq p) \quad \dots\dots\dots (58)$$

$$\bar{R}_i(t) \bar{v}_i(t) + \bar{S}_i(t)' \bar{z}(t) + \bar{B}_i(t)' \bar{\lambda}(t+1) = 0 \quad (0 \leq t \leq p) \quad \dots\dots\dots (59)$$

を得る。式(44)、(49)より $\bar{R}_i(t)$ は正則であるから、 $\bar{v}_i(t)$ は

$$\bar{v}_i(t) = -\bar{R}_i(t)^{-1} \bar{S}_i(t)' \bar{z}(t) - \bar{R}_i(t)^{-1} \bar{B}_i(t)' \bar{\lambda}(t+1) \quad (0 \leq t \leq p) \quad \dots\dots\dots (60)$$

となる。さらに、 $\bar{L}$ を新しい終端状態 $\bar{z}(p+1)$ で偏微分して 0 とおくと、新しい終端条件

$$\bar{\lambda}(p+1) = \bar{Q}_3 \bar{z}(p+1) \quad \dots\dots\dots (61)$$

を得る。ここで、簡単のため

$$\bar{Q}_0(t) = \bar{Q}(t) - \bar{S}_i(t) \bar{R}_i(t)^{-1} \bar{S}_i(t)' \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$\bar{A}_0(t) = \bar{A}(t) - \bar{B}_i(t) \bar{R}_i(t)^{-1} \bar{S}_i(t)' \quad \dots\dots\dots (63)$$

とおくと、式(60)より式(58)は

$$\bar{\lambda}(t) = \bar{Q}_0(t) \bar{z}(t) + \bar{A}_0(t)' \bar{\lambda}(t+1) \quad \dots\dots\dots (64)$$

となり、式(55)は

$$\bar{z}(t+1) = \bar{A}_0(t) \bar{z}(t) - \bar{B}_i(t) \bar{R}_i(t)^{-1} \bar{B}_i(t)' \bar{\lambda}(t+1) \quad \dots\dots\dots (65)$$

となる。すなわち、式(61)、(64)、(65)より、誘導された LQ 問題は、境界条件 $\bar{z}(0)$ と $\bar{\lambda}(p+1)$ のもとで

$$\begin{bmatrix} I_{n+r} & \bar{B}_i(t) \bar{R}_i(t)^{-1} \bar{B}_i(t)' \\ 0 & \bar{A}_0(t)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}(t+1) \\ \bar{\lambda}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0(t) & 0 \\ -\bar{Q}_0(t) & I_{n+r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}(t) \\ \bar{\lambda}(t) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (66)$$

を解く二点境界値問題に変換される。そこで、ある $(n+r) \times (n+r)$ 対称行列 $\bar{P}(t)$ を用いて、リカッチ変換

$$\bar{\lambda}(t) = \bar{P}(t) \bar{z}(t) \quad \dots\dots\dots (67)$$

を行う。このとき、式(65)は

$$[I_{n+r} + \bar{B}_t(t) \bar{R}_t(t)^{-1} \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1)] \bar{z}(t+1) = \bar{A}_0(t) \bar{z}(t) \quad \dots\dots\dots (68)$$

となる。ここで、 $\bar{P}(t+1)$ が半正定と仮定すると、逆行列の補題より

$$\bar{z}(t+1) = \{I_{n+r} - \bar{B}_t(t) [\bar{R}_t(t) + \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t)]^{-1} \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1)\} \bar{A}_0(t) \bar{z}(t) \quad \dots\dots\dots (69)$$

が得られる。さらに、式(64)、(67)、(69)より

$$\begin{aligned} & \{\bar{P}(t) - \bar{Q}_0(t) - \bar{A}_0(t)' \bar{P}(t+1) \bar{A}_0(t) + \bar{A}_0(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t) [\bar{R}_t(t) \\ & + \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t)]^{-1} \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{A}_0(t)\} \bar{z}(t) = 0 \quad \dots\dots\dots (70) \end{aligned}$$

を得る。式(70)が任意の $\bar{z}(t)$ に対して成立するためには、 $\bar{P}(t)$ は非定常リカッチ方程式

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) = & \bar{Q}_0(t) + \bar{A}_0(t)' \bar{P}(t+1) \bar{A}_0(t) - \bar{A}_0(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t) [\bar{R}_t(t) \\ & + \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t)]^{-1} \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{A}_0(t) \quad \dots\dots\dots (71) \end{aligned}$$

を満足しなければならない。式(61)と式(67)より、境界条件は

$$\bar{P}(p+1) = \bar{Q}_3 \quad \dots\dots\dots (72)$$

となる。 $\bar{Q}_3$ は半正定行列であるから、 $\bar{P}(t+1)$ も半正定行列となり、仮定を満足する。また、式(60)、(67)、(69)より誘導された LQ 問題の最適偏差入力 $\bar{v}^*(t)$ は

$$\bar{v}^*(t) = -[\bar{R}_t(t) + \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t)]^{-1} [\bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{A}(t) + \bar{S}_t(t)'] \bar{z}(t) \quad \dots\dots\dots (73)$$

となる。

よって、[デッドビート原理]と誘導された LQ 問題より、デッドビート LQ 最適制御の最適偏差入力 $\bar{u}^*(t)$ は、

$$\bar{u}^*(t) = F(t) \bar{z}(t) + W_t(t) \bar{v}^*(t) \quad \dots\dots\dots (74)$$

となる。特に、

$$\bar{A} = J_0 + EA^* \quad \dots\dots\dots (75)$$

とおくと、第一相では式(46)、(47)、(49)より

$$\bar{u}^*(t) = -[\bar{R} + E' \bar{P}(t+1) E]^{-1} E' \bar{P}(t+1) \bar{A} \bar{z}(t) \quad \dots\dots\dots (76)$$

$$\bar{P}(t) = \bar{A}' \bar{P}(t+1) \bar{A} - \bar{A}' \bar{P}(t+1) E [\bar{R} + E' \bar{P}(t+1) E]^{-1} E' \bar{P}(t+1) \bar{A} \quad \dots\dots\dots (77)$$

となる。最後に、評価関数の最小値 $J^*(n_1+q)$ は、

$$\begin{aligned} J^*(n_1+q) = & \frac{1}{2} \sum_{t=0}^p [\bar{z}(t)' \bar{P}(t) \bar{z}(t) - \bar{z}(t+1)' \bar{P}(t+1) \bar{z}(t+1)] + \frac{1}{2} \bar{z}(p+1)' \bar{Q}_3 \bar{z}(p+1) \\ = & \frac{1}{2} \bar{z}(0)' \bar{P}(0) \bar{z}(0) \quad \dots\dots\dots (78) \end{aligned}$$

となる。

以上をまとめると、次の定理を得る。

[定理] 1形デッドビートサーボ系の LQ 最適制御における最適偏差入力 $\bar{u}^*(t)$ は、状態フィードバック

$$\bar{u}^*(t) = \bar{K}^*(n_1+q, t) \bar{z}(t) \quad \dots\dots\dots (79)$$

により与えられ、各相の最適フィードバックゲインは次のようになる。なお、 $\bar{P}(t)$ は $t=p$ から逆時間で解くことができる。

[1] 第一相 ($t=0, \dots, q-1$)

最適フィードバックゲインは

$$\begin{aligned} \bar{K}^*(n_1+q, t) = & -[\bar{R} + E' \bar{P}(t+1) E]^{-1} \\ & \cdot E' \bar{P}(t+1) \bar{A} \quad \dots\dots\dots (80) \end{aligned}$$

なる時変ゲインとなる。ここで、 $\bar{P}(t)$ は第二相の $\bar{P}(q)$ を境界条件とする非定常リカッチ方程式(77)より求まる。

[2] 第二相 ($t=q, \dots, p$)

最適フィードバックゲインは

$$\begin{aligned} \bar{K}^*(n_1+q, t) = & F(t) \\ & - W_t(t) [\bar{R}_t(t) + \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t)]^{-1} \\ & \cdot \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{A}(t) + \bar{S}_t(t)'] \quad \dots\dots\dots (81) \end{aligned}$$

となり、ある成分は一定ゲインの状態フィードバック、他の成分は時変ゲインの状態フィードバックとなる。

ここで、 $\bar{P}(t)$ は式(72)を境界条件とする非定常リカッチ方程式(71)より求まる。

[3] 第三相 ($t=p+1, \dots, n_1+q-1$)

最適フィードバックゲインは

$$\bar{K}^*(n_1+q, t) = -A^* \quad \dots\dots\dots (82)$$

なる一定ゲインとなる。

また、評価関数 $J(n_1+q)$ の最小値 $J^*(n_1+q)$ は式(78)となる。

さらに、一入力一出力系⁽⁶⁾の場合と同様に、次の性質が成立する。

(1) 最適フィードバックゲインは、一定ゲインも

時変ゲインとともに初期状態 $x(0)$, ステップ状目標値の大きさ y_d , およびステップ状外乱の大きさ d に依存しない。

(2) 終端時刻が n_1+q のときの時刻 t における偏差系の最適フィードバックゲイン $\bar{K}^*(n_1+q, t)$ は,

$$\bar{K}^*(n_1+q, t) = \bar{K}^*(n_1+q+1, t+1) \cdots \cdots (83)$$

となる。すなわち、終端時刻が長い場合の最適フィードバックゲインは、終端時刻が短い場合のフィードバックゲインをその一部として含む。

(3) 終端時刻が n_1+q のときの制御は、終端時刻が n_1+q+1 のときの制御の特別な場合と考えることができるから、

$$J^*(n_1+q+1) \leq J^*(n_1+q) \cdots \cdots (84)$$

となる。

(4) ステップ状外乱とステップ状目標値が $t > 0$ の途中から加わる場合や、目標値や外乱が階段状に変化してもその変化する間隔が r より大きい場合には、ここで求めた1形デッドビートサーボ系により、変化が生じた時刻より r 時間後に出力は目標値と一致する。

なお、Luenberger の可到達正準形による表現を元の座標系に変換することは容易であり、明らかに同様な性質が成立する。このとき、元の座標系の最適フィードバックゲイン $K^*(n_1+q, t)$ は

$$K^*(n_1+q, t) = \hat{S}_2 \bar{K}^*(n_1+q, t) \hat{S}_1^{-1} \cdots \cdots (85)$$

となり、第二相 ($t=q, \dots, p$) では一定ゲインと時変ゲインの線形結合の形で表現される。さらに、二次形式評価関数の最小値 $J^*(n_1+q)$ は、

$$J^*(n_1+q) = \frac{1}{2} \hat{z}(0)' P(0) \hat{z}(0) \cdots \cdots (86)$$

$$P(0) = (\hat{S}_1^{-1})' \bar{P}(0) \hat{S}_1^{-1} \cdots \cdots (87)$$

となる。

5. 例 題

例題として、 $n=3, m=3, r=2$ である次の制御対象を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

表 1 trace $P(0)$

q	0	1	2	3	4
trace $P(0)$	142	125	122	122	122

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき、拡大系の偏差系は

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、偏差系の可到達指数の族は $(n_1, n_2, n_3) = (2, 2, 1)$ となる。重み行列を

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

として、 $q=2$ の場合を考える。このとき、元の座標系での最適フィードバックゲイン $K^*(4, t) (t=0, \dots, 3)$ は、次のようになる。

$$K^*(4, 0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.968 & 0.008 & 0.597 & 0.597 & 0.006 \\ 0.924 & 0.878 & 0.024 & 0.022 & -0.044 \\ 0.003 & 0.602 & 0.950 & -0.016 & 0.599 \end{bmatrix}$$

$$K^*(4, 1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.973 & 0.014 & 0.648 & 0.647 & 0.012 \\ 0.925 & 0.873 & 0.031 & 0.029 & -0.049 \\ 0.003 & 0.651 & 0.950 & -0.020 & 0.649 \end{bmatrix}$$

$$K^*(4, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0.923 & 0.846 & 0 & 0 & -0.077 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^*(4, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

次に、二次形式評価関数の最小値 $J^*(n_1+q)$ は初期状態 $\hat{z}(0)$ に依存するので、比較のためにこのような場合

によく用いられる $\text{trace } P(0)$ を求め、表1に示す。

6. あとがき

本論文では、多入力多出力線形定常離散時間系に対し、1形デッドビートサーボ系のLQ最適制御問題の解法を示した。まず、1形デッドビートサーボ系に内部モデル原理を適用し、拡大系の偏差系を求めてLQ最適制御問題を定式化した。次に、デッドビート入力的一般系が満足すべきデッドビート原理を用いて、この終端状態固定のLQ最適制御問題から自由な終端状態をもつLQ最適制御問題を誘導した。この誘導されたLQ問題では、新しい制御対象は入力の構造が変化する時変系となり、新しい評価関数は重み行列が時変で相乗項を含む二次形式評価関数となる。さらに、この誘導されたLQ問題をラグランジュの未定乗数法とリカッチ変換を用いて解き、最適偏差入力と二次形式評価関数の最小値を求めた。最適偏差入力は三つの相に分かれ、第一相では時変ゲインの状態フィードバック、第二相では一定ゲインの状態フィードバックと時変ゲインの状態フィードバックの線形結合、第三相では一定ゲインの状態フィードバックとなる。このとき、

時変ゲインは特別な非定常リカッチ方程式より求まる。最適フィードバックゲインは、制御対象の初期状態、ステップ状目標値の大きさ、およびステップ状外乱の大きさに依存しない。

文 献

- (1) O'Reilly, J., The Discrete Linear Time Invariant Time-optimal Control Problem—An Overview, *Automatica*, 17-2(1981), 363.
- (2) 今井, デッドビート制御, 計測と制御, 22-7(1983), 606.
- (3) 瓜倉・長田, 過渡応答を考慮した離散時間システムに対するデッドビート制御, 計測自動制御学会論文集, 23-4(1987), 353.
- (4) 吉田・弥栄, 緩和フィルタを用いた多変数有限時間整定制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, 23-11(1987), 1224.
- (5) 村田・相良, インパルス応答を用いた多入力系の有限整定応答デジタル制御装置の設計, 電気学会論文誌, 108-8, C(1988), 555.
- (6) 清田・近藤・須永, 一入力一出力1形デッドビートサーボ系のLQ最適制御, 機論, 55-516, C(1989), 2062.
- (7) 計測自動制御学会編, 自動制御ハンドブック基礎編, (1983), 497, オーム社.
- (8) 近藤・清田・菊池・須永, 多入力線形定常離散時間系のデッドビート原理, 機論, 55-514, C(1989), 1372.
- (9) 近藤・清田・須永, 1形デッドビートサーボ系の一般形, 機論, 54-504, C(1988), 1787.