固体の過渡衝撃音に関する研究*

齊藤 俊^{*1}, 工藤 耕太^{*2}, 遠藤 満^{*1}

Research on Transient Sound Radiated by Impacted Solid Body

Takashi SAITO, Kota KUDOH and Mitsuru ENDO

The analysis technique for the problems concerning transient sounds radiated by impacted bodies is investigated based on the boundary element method(BEM) and a general purpose analysis program, which is available for any sound sources, is developed. The Laplace transformation of Helmholtz equation is employed in the formulation of BEM. In Laplace range, the analysis is carried out with the boundary input values converted by numerical Laplace transform. The results in the time domain are obtained by numerical inverse Laplace transform. As a transient sound radiated by impacted bodies, transient acoustic radiation from a sphere and a beam of circular cross section impacted by a sphere are considered. The validity of these analytical results for time dependnt sound radiation is examined by comparing with the experimental results.

Key Words: Boundary Element Method, Shock, Sound Transient Response, Solid Body, Laplace Transform

1. ま え が き

機械の高速化, 高出力化に伴い発生する振動および騒音は重要な問題となってきた。その騒音の主な原因の一つは固体と固体の高速での接触によるものであり, これまで比較的多くの研究がなされている^{(1)~(8)}。しかしながら, これらの研究は形状を限定した単純な要素同志の衝突を対象としたものがほとんどである。一方, 三次元音響問題の解析手法として境界要素法が有力視されているが, 過去に行われた境界要素法に関する研究は定常音の問題のみを取扱っており⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾, 過渡衝撃音などの非定常音問題に対する研究は見受けられない。

そこで本研究では, 境界要素法に基づき固体の過渡衝撃音および非定常音問題に対して有効となる解析手法について研究し, 任意形状の発音源に対して解析可能となるような汎用的な解析プログラムの開発を行うことを目的とする。

本研究におけるような非定常問題などの時間依存性の問題を境界要素法で解析する手法としては, 現在の

ところ次の3通りの方法が考えられている⁽¹¹⁾。

(1) 時間変数について差分法を用いることにより時間微分を差分近似する方法

(2) 時間依存性を示す基本解を導出し空間とともに時間も要素分割する方法

(3) 時間依存性の支配方程式と入力データに Laplace 変換を施し定常問題と同様に解析し, 得られた値を逆 Laplace 変換を行い解を求める方法

本研究においては, 支配方程式が Laplace 変換可能であるので3通りの内で最も取扱いが簡単である(3)番めの Laplace 変換(L^+ 変換と書く)および逆 Laplace 変換(L^- 変換と書く)を用いた方法を採用する。すなわち, まず時間依存する空間の支配方程式を L^+ 変換することにより境界要素法における支配方程式とし定式化を行う。次に, 境界条件からの入力を数値 L^+ 変換することにより Laplace 領域における値に変換し, これを基に解析を行う。最後に, 得られた値を数値 L^- 変換を施すことにより, 時間領域における値に変換し解を求める。ここで, L^+ 変換を用いる方法において問題となるのが数値 L^+ 変換および数値 L^- 変換であるが, 本研究においては高速フーリエ変換を用いた L^+ 変換⁽¹²⁾により解析を行う。固体の過渡衝撃音の例として, 鋼球と鋼球および鋼球とはりの衝突によって発生

* 原稿受付 平成2年7月2日。

*¹ 正員, 東京工業大学 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。*² 東京工業大学大学院。

する衝撃音を取り上げ、解析結果を実験結果と比較することにより、本解析結果の妥当性を検証する。

2. 支配方程式

音響問題の領域を支配するのが Helmholtz の波動方程式であり、次式で与えられる。

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 P 、 t 、 c および ∇^2 は、それぞれ音圧、時間、音速、ラプラシアンである。この方程式に、 L^+ 変換を施すことにより、時間領域を Laplace 領域に変換する。すなわち、 $t=0$ における初期条件を次式とすると、

$$P(0)=0, \dot{P}(0)=0 \quad (2)$$

本研究における境界要素法の支配方程式は、Laplace 領域において次のようになる。

$$\nabla^2 \hat{P} - \frac{s^2}{c^2} \hat{P} = 0 \quad (3)$$

ここで、 s は L^+ 変換のパラメータであり、 $\hat{P}$ は L^+ 変換された音圧を表す。式(3)を基に図1に示すような開領域 Ω 、境界条件 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ および境界の法線方向 n を考え、固定境界条件として Γ_1 において音圧に L^+ 変換を施した値 $\hat{P} = \hat{P}_0$ 、自然境界条件として Γ_2 において、空気密度と加速度の積に L^+ 変換を施した $\hat{q} = \partial \hat{P} / \partial n = \hat{q}_0$ を考慮し、重み関数 $\hat{P}^*$ 、 $\hat{q}^*$ を用いた重み残差表現式を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \hat{P} \left(\nabla^2 - \frac{s^2}{c^2} \right) \hat{P}^* d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_1} (\hat{P}_0 \hat{q}^* - \hat{q} \hat{P}^*) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\hat{P} \hat{q}^* - \hat{q}_0 \hat{P}^*) d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 Ω は領域積分、 Γ は境界積分であることを示している。領域内で定式化を行うために重み関数として、基本解を用いることにする。すなわち、極座標系で表した半無限領域内の任意点 (r, θ, ϕ) に集中負荷が

作用するときの支配方程式を満足する一つの解である基本解を求めると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \hat{P}^* &= \frac{1}{4\pi r} \exp\left(-\frac{s}{c} r\right) \\ \hat{q}^* &= \frac{\partial \hat{P}^*}{\partial n} = \frac{d\hat{P}^*}{dr} \\ &= -\frac{1}{4\pi r} \left(\frac{s}{c} + \frac{1}{r} \right) \exp\left(-\frac{s}{c} r\right) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 r は集中負荷が作用する点と考える点の間の距離を示す。式(5)を用いると、半無限領域における基礎式として、式(4)は次式となる。

$$\hat{P}_i = \int_{\Gamma_1} (\hat{q} \hat{P}^* - \hat{P}_0 \hat{q}^*) d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (\hat{q}_0 \hat{P}^* - \hat{P} \hat{q}^*) d\Gamma \quad (6)$$

さらに、境界面に半径 ε の半球を考え、その中心に負荷点 i が存在すると仮定し、この ε を零に収束させることにより境界上における方程式を次のように求めることができる。

$$\left(1 - \frac{\phi_i}{4\pi}\right) \hat{P}_i + \int_{\Gamma} \hat{P} \hat{q}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \hat{q} \hat{P}^* d\Gamma \quad (7)$$

ここで、 ϕ_i は点 i における半径 ε の球に対する部分球の表面積の割合を表す。

得られた基礎方程式を基に境界上を三角形線形要素で分割し離散化を行った。図2のようなデカルト座標系において、 (x_i, y_i, z_i) ($i=1, 2, 3$) を頂点とする三角形要素内の局所座標系を (ξ, η) とし、要素分割数を n 、節点数を m 、節点 i から見た j 要素を考えると境界上での積分方程式は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\phi_i}{4\pi}\right) \hat{P}_i + \sum_{j=1}^n (\hat{P}_{j1} h_{ij}^1 + \hat{P}_{j2} h_{ij}^2 + \hat{P}_{j3} h_{ij}^3) \\ &= \sum_{j=1}^n (\hat{q}_{j1} g_{ij}^1 + \hat{q}_{j2} g_{ij}^2 + \hat{q}_{j3} g_{ij}^3) \\ & (i=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} h_{ij}^1 &= \int_{\Gamma_j} \xi_1 \hat{q}^* d\Gamma, \quad g_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \xi_1 \hat{P}^* d\Gamma \\ h_{ij}^2 &= \int_{\Gamma_j} \xi_2 \hat{q}^* d\Gamma, \quad g_{ij}^2 = \int_{\Gamma_j} \xi_2 \hat{P}^* d\Gamma \end{aligned}$$

図1 開領域 Ω および境界条件 Γ

図2 三角形座標系

$$h_{ij}^3 = \int_{r_j} \zeta_3 \hat{q}^* d\Gamma, \quad g_{ij}^3 = \int_{r_j} \zeta_3 \hat{P}^* d\Gamma \quad \dots\dots\dots (9)$$

節点に関してまとめると次のようになる。

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m H_{ik} \hat{P}_k = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m G_{ik} \hat{q}_k \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、

$$H_{ii} = 1 - \frac{\psi_i}{4\pi} = 1 - \sum_{k=1}^m H_{ik} \quad \dots\dots\dots (11)$$

さらにこの式を境界条件からの入力である既知の部分
をベクトル f として右辺に、未知の部分ベクトル x
として左辺に構成し直すことにより、 A を既知の係数
行列として次のような m 元一次の連立方程式が求ま
る。

$$Ax = f \quad \dots\dots\dots (12)$$

この連立一次方程式を解き、未知ベクトル x を求め
ることにより、境界上のすべての $\hat{P}$, $\hat{q}$ の値が定ま
る。また、半無限領域中の点 i での $\hat{P}$ を求める式を離
散化すると次のようになる。

$$\hat{P}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m H_{ik} \hat{P}_k - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m G_{ik} \hat{q}_k \quad \dots\dots\dots (13)$$

したがって、境界上の $\hat{P}$, $\hat{q}$ をこの式に代入すること
により、任意点の $\hat{P}_i$ を求めることができる。得られた
値はすべて Laplace 領域における値であるから、これ
らに数値 L^{-} 変換を施すことにより、時間領域におけ
る解を求めることができる。

3. 鋼球による固体の過渡衝撃音の解析

3.1 入力データおよび座標系 以上を基に、任
意形状の発音源に対して解析可能となるような汎用的
な解析プログラムを作成した。本プログラムは、境界
要素法における入力データである空気密度と加速度の
積である q を数値 L^{+} 変換するサブルーチン、得られ
た Laplace 領域における入力データを基に境界要素
法に基づき解析を行うサブルーチンおよび得られた
Laplace 領域における値を数値 L^{-} 変換することによ

図 3 座標系

り時間領域における値に変換するサブルーチンから構
成されている。作成したプログラムの妥当性を検討す
るために、鋼球と鋼球および鋼球とはりの衝突によっ
て発生する過渡衝撃音に関して解析を行い、実験結果
との比較を行った。境界要素法による解析に先立って
入力に必要となる鋼球およびはりの加速度の解析は、
Hertz の接触理論を利用した二体接触問題の近似解
法⁽¹³⁾ により行った。また、測定点の位置は、衝突させ
る側を A、される側を B として、衝突点が原点となる
ように図 3 に示すような座標系にとった。また、数値
計算に際しては空気密度 $\rho = 1.226 \text{ kg/m}^3$ 、音速 $c =$
 340.0 m/s としている。

3.2 実験 解析結果の妥当性を検証するために
実験を行った。実験方法は、図 4 に示すように A であ
る鋼球および B である鋼球またははりを上部の支持
材より二等辺三角形状に張られた糸でつり下げ、A を
衝突速度 v_0 で衝突させることにより発生する音圧を
測定することにより行った。音圧は、図 3 の座標系に
より定まる任意点の位置 (x, y, z) に設置した精密騒
音計より発生する信号を直接デジタル・ストレージ
・スコープに取り込み、 GPIB を介して計算機
PC 9801 に取り込んで処理した。

3.3 鋼球による鋼球の過渡衝撃音の解析 まず、
鋼球を鋼球に衝突させた際に発生する音圧に関して、
解析を行い、実験結果との比較を行った。境界要素法
における境界表面の分割および数値 L^{+} 変換における
時間点数は、それぞれについて収束性を考慮して、節
点数 147、要素数 288 および時間点数 128 としている。
境界要素の分割方法を図 5 に示す。

鋼球同志の衝突により発生する音圧の座標点 $(x, y,$
 $z)$ における時間変動について、解析結果と実験結果を

- ① Precision Sound Level Meter
- ② Digital Storage Scope
- ③ Personal Computer PC9801

図 4 実験方法

比較したのが図6～図9である。グラフはすべて測定地点に衝撃音が到達した瞬間を時間軸の原点としている。図6は、半径 $r_A=12.7$ mm, $r_B=12.7$ mm の鋼球を速度 $v_0=1.2$ m/s で衝突させ、 $x=0.5$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m の位置で測定した場合に対する結果、図7は、測定地点を $x=0.5$ m, $y=0.0$ m, $z=-0.1$ m とした場合に対する結果、図8は、鋼球の半径を $r_A=12.7$ mm, $r_B=25.4$ mm とした場合に対する結果、さらに図9は、鋼球の半径を $r_A=25.4$ mm, $r_B=12.7$ mm と

図5 分割方法

($r_A=12.7$ mm, $r_B=12.7$ mm, $v_0=1.2$ m/s, $x=0.5$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m)

図6 鋼球同志の衝突による音圧の時間変動

($r_A=12.7$ mm, $r_B=12.7$ mm, $v_0=1.2$ m/s, $x=0.5$ m, $y=0.0$ m, $z=-0.1$ m)

図7 鋼球同志の衝突による音圧の時間変動

した場合に対する結果を示している。実線が本解析結果、破線が実験結果を示している。解析結果と実験結果は、どの条件に対しても非常によく一致しており、本解析結果の妥当性が検証される。

さらに、他の研究⁽¹⁴⁾との比較を行ったのが図10である。Kossらは、鋼球同志の衝突によって発生する音圧を一つの球ともう一つの球から発生する音圧を重ね合わせた形で解析を行い実験結果との比較を行っている⁽¹⁴⁾。図10は $r_A=6.35$ mm, $r_B=6.35$ mm の鋼球を $v_0=1.53$ m/s で衝突させ、 $x=0.225$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m の地点で測定した場合に対する結果であり、実線が本解析結果、一点鎖線および波線がKossらによる解析結果および実験結果を示している。本解析結果は、Kossらの実験結果と非常によく一致しており、本解析結果の妥当性が検証される。以上により、鋼球と鋼球の衝突による衝撃音問題に対して本解析方法が有効であることがわかる。

3.4 鋼球によるはりの過渡衝撃音の解析 さらに

($r_A=12.7$ mm, $r_B=25.4$ mm, $v_0=1.2$ m/s, $x=0.5$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m)

図8 鋼球同志の衝突による音圧の時間変動

($r_A=25.4$ mm, $r_B=12.7$ mm, $v_0=1.2$ m/s, $x=0.5$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m)

図9 鋼球同志の衝突による音圧の時間変動

に、鋼球とはりの過渡衝撃音の解析を行い実験結果との比較を行った。はりの断面は円形であり、解析を行うための分割方法は、はりの加速度応答を計算する際、固有モードを20次まで考慮したので、図11に示すよ

うに縦方向の分割は25、円周方向には八等分した。また鋼球は先ほどと同様の分割を行った。したがって、節点数273、要素数528として解析を行っている。また、数値L⁺変換における時間点数は512としている。

鋼球とはりの衝突により発生する音圧の座標点(x, y, z)における時間変動について、解析結果と実験結果を比較したのが図12~図15である。グラフは前と

図10 鋼球同志の衝突による音圧の時間変動

図13 鋼球とはりの衝突による音圧の時間変動

図11 分割方法

図14 鋼球とはりの衝突による音圧の時間変動

図12 鋼球とはりの衝突による音圧の時間変動

図15 鋼球とはりの衝突による音圧の時間変動

同様、すべて測定地点に衝撃音が到達した瞬間を時間軸の原点に取っており、衝突させる鋼球の半径および衝突速度はすべて $r_A=12.7$ mm, $v_0=0.626$ m/s である。図 12 は、はりの形状を半径 $r_B=15$ mm, 長さ $L=300$ mm, 測定地点 $x=0.25$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m とした場合に対する結果、図 13 は、測定地点を $x=0.5$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m とした場合に対する結果、図 14 は、半径 $r_B=15$ mm, 長さ $L=200$ mm, 測定地点 $x=0.25$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m とした場合に対する結果、図 15 は、半径 $r_B=10$ mm, 長さ $L=300$ mm, 測定地点を $x=0.25$ m, $y=0.0$ m, $z=0.0$ m とした場合に対する結果を示している。実線、破線の意味も先ほどと同様である。このように、解析結果と実験結果はほぼ一致しており、鋼球とはりの衝突による衝撃音問題に対して本解析結果が有効であることがわかる。

4. ま と め

本研究では、境界要素法に基づき固体の過渡衝撃音および非定常音問題に対して有効となる解析手法について研究し、任意形状固体の過渡衝撃音の解析が可能となるような汎用的な解析プログラムの開発を行っ

た。作成したプログラムに基づき、鋼球と鋼球および鋼球とはりの衝突によって発生する過渡衝撃音の解析を行い、実験結果との比較を行った。その結果、解析結果と実験結果はよく一致しており、本解析手法の有効性を確認した。

文 献

- (1) Akay, A. and Latcha, M., *J. Acoust. Soc. Am.*, **74**-2 (1983), 640.
- (2) Takahagi, T., ほか 2 名, *J. Acoust. Soc. Jpn. (E)*, **1**-2 (1980), 121.
- (3) 遠藤・ほか 3 名, 機論, **44**-377 (1978), 38.
- (4) 五十嵐・相本, 機論, **50**-458, C (1984), 1799.
- (5) Akay, A., *J. Acoust. Soc. Am.*, **64**-4 (1978), 977.
- (6) 中川・ほか 2 名, 機論, **51**-467, C (1985), 1786.
- (7) 中川・ほか 2 名, 機論, **53**-500, C (1988), 866.
- (8) 遠藤・古坂, 機論, **55**-513, C (1989), 1248.
- (9) 田中・増田, 機論, **53**-486, C (1985), 387.
- (10) 伊藤・ほか 2 名, 境界要素法論文集 3, (1986), 163.
- (11) 田中・田中, 境界要素法の基礎, (1984), 89, 培風館.
- (12) Krings, W. and Waller, H., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14** (1979), 1183.
- (13) Goldsmith, W., *Impact*, (1960), 82, Edward Arnold.
- (14) Koss, L. L. and Alfredson, R. J., *J. Sound Vib.*, **127**-1 (1973), 59.