揺動あるいは急旋回時における弾性支持ロータの振動解析*

坂田 勝^{*1}, 木村 康治^{*1}
岡本 伸吾^{*2}, 及川 和亮^{*3}

Vibration Analysis of a Rotor on a Flexible Suspension Subjected to Pitching or Quick Turn Motion

Masaru SAKATA, Koji KIMURA,
Shingo OKAMOTO and Kazuaki OIKAWA

High speed rotors in jet engines or turbopumps used in space vehicles are mostly operated at a supercritical speed and their bearings and housings are usually supported elastically from the frame in order to reduce critical speeds. However, when the aircraft or the space vehicle turns or responds to disturbances, the rotor may contact with the casing due to vibration caused by gyroscopic moment. In this paper, a dynamic analysis is performed on vibration of a mechanical system subjected to pitching motion of the frame. Flexibility and mass of bearing housings are taken into account and the axis of pitching motion is assumed to be distant from the center of mass of the rotor. The usefulness of modeling and the validity of the computational program are demonstrated by comparison with the experimental results obtained using a model rotor. The dynamic response of the system in case of quick turn is also calculated.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Rotordynamics, Elastic Bearing Support, Base Excitation, Pitching Motion, Gyroscopic Moment

1. 緒 言

ジェットエンジンやロケット用ターボポンプなどに用いられる高速ロータは、通常、危険速度以上で使用されるため、危険速度を速やかに通過することが要求される。したがって、危険速度を下げて設計することがあり、軸受支持部は弾性的に支持される場合が多い。航空機やロケットが旋回、揺動(機体重心回りの回転運動)などにより基礎励振を受ける場合は、このようなロータはジャイロ効果による揺動を生じやすく、ロータとケーシングが接触したり、軸受が損傷する危険性がある。また、地震動を受ける発電プラントについても同様な問題が生じる。したがって、基礎励振を受けるロータの振動を予測することは設計上重要であるから、基礎が並進運動する場合^{(1)~(6)}、揺動する場合⁽⁵⁾⁽⁶⁾についていくつかの研究が報告されている。Soni ら⁽⁵⁾は、弾性支持された剛性ロータが基礎励振を受ける場合の地震応答解析を行っている。また、著者ら⁽⁷⁾は単純支持された弾性ロータが旋回する場合の定

常応答解析を行い、実験結果と比較検討している。しかし、ロケットに搭載された燃料ポンプなどでは、ロータの設置位置と揺動運動の中心軸との距離が振動に影響を及ぼすが、このような場合の研究は見当たらない。また、従来の研究では弾性支持部は軸受あるいは軸受台のみの弾性と粘性減衰によってモデル化されており、軸受および軸受台の質量の効果は無視されている。

本研究では、質量を有する軸受台によって弾性的に支持された剛性ロータが揺動中心からある距離だけ離れた位置に設置された場合を想定し、Soni らが導いた式よりも一般的な運動方程式を導出し、固有値と揺動時の応答の解析を行った。また本解析のモデル化と解析プログラムの有効性を確かめるために揺動実験を行い、解析結果と実験結果とを比較検討した。さらに、このプログラムを用いて急旋回時の応答解析を行った。

2. 理 論 解 析

2・1 解析モデル ロータの不釣合い量は微小とし、解析では不釣合いの影響は無視する。図1に解析モデルを示す。回転円板を取付けた剛性回転軸の両端は弾性を有する軸受によって支持され、さらに軸受台

* 原稿受付 平成2年9月3日。

^{*1} 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。^{*2} 正員、東京工業大学大学院。^{*3} 東京工業大学大学院。

はフレームに対して弾性支持されている。フレームは角速度 $\dot{\phi}$ で揺動あるいは旋回するものとする。

2.2 座標系の定義 図 1, 2 に示す座標系を用いる。

(1) O-XYZ 座標系(静止座標系) 静止座標系の Z 軸と静止しているロータの回転軸の中心線と一致させる。原点 O は揺動・旋回軸 Y と静止しているときのロータの回転軸 Z との交点である。XYZ 方向の単位ベクトルを $\{I, J, K\}$ とする。

(2) O-xyz 座標系(フレームに固定された揺動・旋回座標系) 揺動・旋回により静止座標系が Y 軸回りに ϕ だけ回転した座標系で, xyz 方向の単位ベクトルを $\{i, j, k\}$ とする ($j=J$)。

(3) G-x'y'z' 座標系 O-xyz 座標系の $z=l_c$ にあったロータの重心が支持部の弾性変形により xy 平面内を点 G に移動する。この場合の重心 G を原点とする座標系で, x'y'z' 方向の単位ベクトルを $\{i, j, k\}$ とする。

(4) G- $\xi y' z''$ 座標系 支持部の弾性変形により G-x'y'z' 座標系が y' 軸回りに θ_y 回転した座標系で, $\xi y' z''$ 方向の単位ベクトルを $\{e_\xi, j, k\}$ とする。

(5) G- $\xi \eta \zeta$ 座標系(振れ回り運動に固定された座標系) 支持部の弾性変形により G- $\xi y' z''$ 座標系が ξ 軸回りに θ_ξ 回転した座標系で, $\xi \eta \zeta$ 方向の単位ベクトルを $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$ とする。

2.3 絶対速度 揺動あるいは旋回時に支持部が弾性変形し, $z=l_c$ にあったロータの重心が xy 平面内を移動し点 G に移った場合, 点 G の絶対速度 V_G は,

$$V_G = \frac{d}{dt} R_G + \omega \times R_G \quad (1)$$

で表される⁽⁸⁾。ここで, R_G は O-xyz 座標系における重心 G の位置ベクトルであり,

$$R_G = x_G i + y_G j + l_c k \quad (2)$$

で表される。また ω は O-xyz 座標系が O-XYZ 座標

系に対して揺動・旋回した場合の回転角速度ベクトルであり,

$$\omega = \dot{\phi} j \quad (3)$$

で表される。したがって, 式(2)と(3)を式(1)に代入すると V_G は,

$$V_G = (l_c \dot{\phi} + \dot{x}_G) i + \dot{y}_G j - x_G \dot{\phi} k \quad (4)$$

となる。

さらに, ロータが回転角速度 Ω で回転している場合, G- $\xi \eta \zeta$ 座標系におけるロータ内の任意点 p の絶対速度 V_p は,

$$V_p = V_G + \frac{d}{dt} R_p + (\omega + \omega') \times R_p \quad (5)$$

で表される⁽⁸⁾。ここで, R_p は G- $\xi \eta \zeta$ 座標系における点 p の位置ベクトルであり, 円筒座標系 (r, α, ζ) を用いると次式で表される。

$$R_p = \{r \cos(\beta + \alpha)\} e_\xi + \{r \sin(\beta + \alpha)\} e_\eta + \zeta e_\zeta \quad (6)$$

ここで, $\beta = \Omega t + \delta$ で表され, δ は初期位相である。また, ω' は支持部の弾性変形により G- $\xi \eta \zeta$ 座標系が G-x'y'z' 座標系に対して回転した場合の回転角速度ベクトルである。G- $\xi y' z''$ 座標系の G-x'y'z' 座標系に対する回転角速度ベクトルを

$$\dot{\theta}_y = \dot{\theta}_y j \quad (7)$$

とし, G- $\xi \eta \zeta$ 座標系の G- $\xi y' z''$ 座標系に対する回転角速度ベクトルを

$$\dot{\theta}_\xi = \dot{\theta}_\xi e_\xi \quad (8)$$

とすると, ω' は,

$$\begin{aligned} \omega' &= \dot{\theta}_\xi e_\xi + \dot{\theta}_y e_\eta + \dot{\theta}_\zeta e_\zeta \\ &= \dot{\theta}_\xi e_\xi + (\dot{\theta}_y \cos \theta_\xi) e_\eta - (\dot{\theta}_y \sin \theta_\xi) e_\zeta \end{aligned} \quad (9)$$

で表される。ここで, θ_y, θ_ξ は微小とし

$$\theta_x = \theta_\xi \cos \theta_y \approx \theta_\xi \quad (10)$$

図 1 解析モデル

図 2 座標系の相対運動

を考慮すると式(9)は,

$$\dot{\omega}' = \dot{\theta}_x \mathbf{e}_x + \dot{\theta}_y \mathbf{e}_y - \dot{\theta}_z \mathbf{e}_z \quad \dots\dots\dots (11)$$

で近以できる。また、O-xyz 座標系の成分で表された V_c [式(4)]と ω [式(3)]をベクトルの変換式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\theta_y \\ 0 & 1 & \theta_x \\ \theta_y & -\theta_x & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

を用いて、G- $\xi\eta\zeta$ 座標系の成分で表されたベクトルに変換して式(5)に代入すれば、結局 V_p は、次式で表される。

$$V_p = V_{px} \mathbf{e}_x + V_{py} \mathbf{e}_y + V_{pz} \mathbf{e}_z \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{aligned} V_{px} = & l_c \dot{\phi} + \dot{x}_c + x_c \theta_y \dot{\phi} - r \Omega \sin(\beta + \alpha) \\ & + r(\dot{\phi} + \dot{\theta}_y) \theta_x \sin(\beta + \alpha) + (\dot{\phi} + \dot{\theta}_y) \zeta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} V_{py} = & \dot{y}_c - x_c \theta_x \dot{\phi} + r \Omega \cos(\beta + \alpha) \\ & - r(\dot{\phi} + \dot{\theta}_y) \theta_x \cos(\beta + \alpha) - \dot{\theta}_x \zeta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{aligned} V_{pz} = & l_c \dot{\phi} \dot{\theta}_y + \dot{x}_c \theta_y - \dot{y}_c \theta_x - x_c \dot{\phi} \\ & + r \dot{\theta}_x \sin(\beta + \alpha) - r(\dot{\phi} + \dot{\theta}_y) \cos(\beta + \alpha) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (16)$$

2・4 運動エネルギー 回転軸と回転円板からなるロータの運動エネルギーおよび軸受と軸受台を集中質量でモデル化した支持部の運動エネルギーを求めらる。

(1) ロータの運動エネルギー ロータの運動エネルギーは次式で与えられる。

$$T_R = \frac{1}{2} \rho \iiint |\mathbf{v}_p|^2 r dr d\alpha d\zeta \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、ロータの質量を M 、ロータの主軸すなわち ζ 軸に関する主慣性モーメントを J_p 、軸対称な形状を仮定し ξ 軸 η 軸に関する慣性モーメントを J_d とすると

$$M = \rho \iiint r dr d\alpha d\zeta \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$J_p = \rho \iiint r^2 r dr d\alpha d\zeta \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} J_d = & \rho \iiint \{r^2 \sin^2(\beta + \alpha) + \zeta^2\} r dr d\alpha d\zeta \\ = & \rho \iiint \{r^2 \cos^2(\beta + \alpha) + \zeta^2\} r dr d\alpha d\zeta \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となる。また、図1に示すように、両軸受のある位置での回転軸の x 方向相対変位をそれぞれ U_1, U_2 , y 方向相対変位を V_1, V_2 とすると重心 G の座標とロータの回転角 $x_c, y_c, \theta_x, \theta_y$ は、

$$x_c = \frac{l_2}{L} U_1 + \frac{l_1}{L} U_2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$y_c = \frac{l_2}{L} V_1 + \frac{l_1}{L} V_2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\theta_x = \frac{V_1 - V_2}{L} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\theta_y = \frac{U_2 - U_1}{L} \quad \dots\dots\dots (24)$$

で表される。したがって、式(13)~(16)、式(18)~(24)を式(17)に代入するとロータの運動エネルギーは次式となる。

$$\begin{aligned} T_R = & \frac{M}{2L^2} \{l_1 l_2 \dot{U}_1^2 + l_1 l_2 \dot{U}_2^2 + (l_1^2 + l_2^2) \dot{U}_1 \dot{U}_2\} + \frac{M}{2L^2} \{l_1 l_2 \dot{V}_1^2 + l_1 l_2 \dot{V}_2^2 + (l_1^2 + l_2^2) \dot{V}_1 \dot{V}_2\} \\ & + \frac{J_d}{2L^2} (\dot{U}_1^2 + \dot{U}_2^2 - 2 \dot{U}_1 \dot{U}_2) + \frac{J_d}{2L^2} (\dot{V}_1^2 + \dot{V}_2^2 - 2 \dot{V}_1 \dot{V}_2) - \frac{\Omega J_p}{L^2} (\dot{U}_1 V_2 - \dot{U}_2 V_1 + \dot{U}_2 V_1 - \dot{U}_1 V_2) \\ & - \frac{\Omega J_p \dot{\phi}}{L} (V_1 - V_2) - \frac{J_d \dot{\phi}}{L} (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + \frac{M \dot{\phi}}{2L} \{l_c(l_1 + l_2) - l_2(l_1 - l_2)\} \dot{U}_1 + \{l_c(l_1 + l_2) - l_1(l_1 - l_2)\} \dot{U}_2 \\ & + \frac{M \dot{\phi}^2}{2L^2} \{(l_1 l_2 + l_c^2)(U_1^2 + U_2^2) + (l_1^2 + l_2^2 - 2l_c^2) U_1 U_2\} + \frac{J_p \dot{\phi}^2}{2L^2} (V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2) \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ここで、 $x_c, y_c, \theta_x, \theta_y, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y$ を含まない項および3次以上の微小項は省略した。

(2) 支持部の運動エネルギー 軸受および軸受台(支持部)の運動エネルギーを求める。両端支持部の集中質量を m_1, m_2 、フレームに対する x 方向相対変位を u_1, u_2 , y 方向相対変位を v_1, v_2 とすると支持部の運動エネルギーは次式で表される。

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{v}_1^2 - m_1(l_1 - l_c) \dot{\phi} \dot{u}_1 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\phi}^2 u_1^2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{v}_2^2 + m_2(l_c + l_2) \dot{\phi} \dot{u}_2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\phi}^2 u_2^2 \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 l_1 はロータの重心 G から z の負側にある軸受までの長さ、 l_2 は G から z の正側にある軸受までの長さである(図1参照)。以上よりこの系全体の運動エネルギーは、式(25)~(27)より

$$T_a = T_R + T_1 + T_2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

で表される。

2・5 ポテンシャルエネルギー 解析においては軸受および軸受台の弾性は異方性を有すると仮定した。軸受の

x 方向, y 方向のばね定数を $K_{x1}, K_{y1}, K_{x2}, K_{y2}$, 軸受台の x 方向, y 方向のばね定数を $k_{x1}, k_{y1}, k_{x2}, k_{y2}$ とするとポテンシャルエネルギーは次式で表される。

$$E_p = \frac{1}{2} K_{x1} (U_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_{x1} u_1^2 + \frac{1}{2} K_{y1} (V_1 - v_1)^2 + \frac{1}{2} k_{y1} v_1^2 + \frac{1}{2} K_{x2} (U_2 - u_2)^2 + \frac{1}{2} k_{x2} u_2^2 + \frac{1}{2} K_{y2} (V_2 - v_2)^2 + \frac{1}{2} k_{y2} v_2^2 \quad (29)$$

2・6 散逸エネルギー 2 個の軸受の x 方向, y 方向の粘性減衰係数をそれぞれ $C_{x1}, C_{y1}, C_{x2}, C_{y2}$, 2 個の軸受台の x 方向, y 方向の粘性減衰係数をそれぞれ $c_{x1}, c_{y1}, c_{x2}, c_{y2}$ で表すと散逸エネルギーは次式で表される。

$$F = \frac{1}{2} C_{x1} (\dot{U}_1 - \dot{u}_1)^2 + \frac{1}{2} c_{x1} \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} C_{y1} (\dot{V}_1 - \dot{v}_1)^2 + \frac{1}{2} c_{y1} \dot{v}_1^2 + \frac{1}{2} C_{x2} (\dot{U}_2 - \dot{u}_2)^2 + \frac{1}{2} c_{x2} \dot{u}_2^2 + \frac{1}{2} C_{y2} (\dot{V}_2 - \dot{v}_2)^2 + \frac{1}{2} c_{y2} \dot{v}_2^2 \quad (30)$$

2・7 運動方程式 系全体の運動エネルギーの式(25)～(28), ポテンシャルエネルギーの式(29), 散逸エネルギーの式(30)を用いてラグランジュ方程式を求めることができる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_a}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_a}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0 \quad (31)$$

$$(i=1 \sim 8)$$

ここで, q_i は一般座標であり

$$\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\} = \{u_1, u_2, U_1, U_2, v_1, v_2, V_1, V_2\} \quad (32)$$

で表される。したがって, 運動方程式は次式で表される。

$$M\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{G} + \mathbf{C})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_c)\mathbf{q} = \dot{\phi}\mathbf{f}_s + \ddot{\phi}\mathbf{f}_n \quad (33)$$

ここで, $\mathbf{q}$ は変位ベクトル, $\mathbf{M}$ は質量マトリックス, $\mathbf{G}$ はジャイロマトリックス, $\mathbf{C}$ は減衰マトリックス, $\mathbf{K}_0$ は剛性マトリックス, $\mathbf{K}_c$ は揺動あるいは旋回の角速度 ϕ の関数として表される剛性マトリックス, $\dot{\phi}\mathbf{f}_s$, $\ddot{\phi}\mathbf{f}_n$ は揺動あるいは旋回によって発生する励振力である。

理論解析では運動方程式(33)を用い, 固有値と時刻

歴応答の解析を行った。式(33)の成分を付録に示す。

3. 実験

3・1 実験装置 実験装置の概略を図3に示す。回転円板①(外径=100 mm, 厚さ=14.4 mm, SK 鋼)と回転軸②(直径=17.5 mm, 軸受間長さ=249 mm, SK 鋼)から成るロータは玉軸受③を介して軸受台④に取付けられている。軸受台④(外径=100 mm, 内径=22 mm, 厚さ=6 mm, アルミ合金)はフレーム⑨に取付けられた4本の弾性棒⑤(直径=1.47 mm, 長さ=43.4 mm, SK 鋼)から成る等方性ばねによって支持されている。ロータはシリコンゴム継手⑥によりモータ⑦に接続されている。フレーム⑨は中心⑩の回りに揺動する。

3・2 実験方法

(1) 固有揺動数の測定 揺動させないで, ロータを所定の回転数で回転させ, 軸受台④を衝撃加振する。回転円板①の x 方向と y 方向の変位をフレーム⑨に取付けた渦電流式非接触変位計⑧で測定し, FFT を用いてロータの各回転数に対する固有揺動数を求めた。

(2) 揺動時の時刻歴応答 ロータを所定の回転数で回転させて, フレーム⑨を揺動させる。その時の回転円板①の x 方向と y 方向の時刻歴変位を測定した。

4. 結果と考察

軸受台のばね定数と粘性減衰係数は軸受台単体の加振実験により求め, $k_{x1}=k_{x2}=k_{y1}=k_{y2}=2.50 \times 10^4$ N/mm, $C_{x1}=C_{x2}=C_{y1}=C_{y2}=1.34$ kg/s とした。本実験装置の玉軸受部のばね定数は軸受台のばね定数に比し十分大きいので, $K_{x1}=K_{x2}=K_{y1}=K_{y2}=k_{x1} \times 10^3$ N/mm とした。また, 玉軸受部の粘性減衰係数は減衰マトリックスが比例粘性減衰となるように $C_{x1}=C_{x2}=C_{y1}=C_{y2}=1.34 \times 10^3$ kg/s とした。

- ①Rotating disk ②Rotating shaft ③Ball bearing
- ④Bearing housing ⑤Elastic rod
- ⑥Silicone rubber coupling ⑦Motor
- ⑧Displacement sensor
- ⑨Frame (/ / / /) ⑩Center of pitching motion

図3 実験装置概略

4.1 固有揺動数と固有モード 揺動, 旋回がなく ($\phi=0$), ロータも回転していない ($\Omega=0$) 場合の一次と二次の固有揺動数は, 実験結果が $f_{01}=26.0$ Hz, $f_{02}=47.0$ Hz, 解析結果が $f_{01}=27.3$ Hz, $f_{02}=47.9$ Hz となり, 良く一致している。また, 一次のモードは回転軸の両支持部が同相で動く並進モードであり, 二次は回転軸の両支持部が逆相で動くピッチングモードである。

図4にロータの各回転数に対する振れ回り固有揺動数の関係を示す。●の実験結果と実線の解析結果は良く一致している。ロータが回転している場合は, ジャイロ効果により各次数のモードについて前向きと後向きの振れ回り固有揺動数が現れる。特に, 二次のピッチングモードに対してはジャイロ効果が大きいので, 前向きと後向きの固有揺動数の差は大きくなる。一次の並進モードについてはジャイロ効果が小さいので, 前向きと後向きの固有揺動数の差は小さくなり, 実験では一つの固有揺動数として測定された。理論解析においても同様の理由で, 図上では固有揺動数曲線がほとんど重なっている。

軸支持部の質量の影響を調べるため質量比 $\mu (= \mu_1 = m_1/M = \mu_2 = m_2/M)$ と固有揺動数との関係を解析し, 結果を図5に示す。実線は非回転時, 破線は回転時 (4800 rpm) である。軸受台と軸受のばね定数は 2.50×10^4 N/mm とした。一次のモードは回転軸の両支持部が同相で動く並進モード (回転軸の支持部と集中質量も同相), 二次は回転軸の両支持部が逆相で動くピッチングモード (回転軸の支持部と集中質量は同相), 三次のモードは回転軸の両支持部が同相で動く並進モード (回転軸の支持部と集中質量は逆相), 四次のモード

は回転軸の両支持部が逆相で動くピッチングモード (回転軸の支持部と集中質量も逆相) である。三次と四次の固有揺動数は μ の影響を大きく受け, μ が大きくなるとそれぞれの固有揺動数は小さくなる。一次と二次の固有揺動数は $\mu < 0.05$ の場合, μ の影響をほとんど受けない。これは, 一次と二次はロータと支持部の質量が同相で動き, 三次と四次は逆相で動くためと考えられる。また, μ が小さい場合は一次・二次と, 三次・四次の固有揺動数の差は大きく, μ が大きい場合はその差は小さい。

4.2 揺動時の時刻歴応答 理論解析では, Newmark の β 法を用い, 時間増分を $\Delta t = 0.002$ s とした。また, 実験では, 揺動による影響のみを調べるため 5 Hz 以上の高周波成分はカットした。

図6に正弦波で揺動 (揺動数 = 1.96 Hz, 振幅 = 1.0 deg) させた場合の時刻歴応答の一例を示す。実線は解析結果, 破線は実験結果である。また, u_{dx} は $l\ddot{\phi}$ ($= l_0/L$, 揺動中心と回転体の重心の距離) の影響による回転円板の x 方向変位, u_{dy} はジャイロ効果による y 方向変位である。解析結果と実験結果は良く一致している。

図7に正弦波で揺動させた場合について, $l\ddot{\phi}$ と変位振幅との関係を示す。実線は解析結果, ○, ●はそれぞれ x 方向, y 方向変位の実験結果である。 $l\ddot{\phi}$ が大きくなると u_{dx} は大きくなるが u_{dy} は変化していない。これは $l\ddot{\phi}$ が大きくなるとロータに作用する y 軸回りのモーメントが大きくなるのに対して, x 軸回りのジャイロモーメントは変化しないためである。

図8に正弦波で揺動させた場合のロータ回転数と変位振幅との関係を示す。ロータ回転数が大きくなると u_{dy} は大きくなるが u_{dx} は変化していない。これはロータ回転数が大きくなると x 軸回りのジャイロモー

図4 ロータの回転数と振れ回り固有振動数

$$k_{x1}=k_{x2}=k_{y1}=k_{y2}=K_{x1}=K_{x2}=K_{y1}=K_{y2}=2.5 \times 10^4 \text{ (N/mm)}$$

図5 質量比に対する固有振動数

メントが大きくなるのに対して、 y 軸回りのモーメントは変化しないためである。

4・3 急旋回時の時刻歴応答 急旋回時の変位応答をシミュレートするため、ステップ入力時 ($\phi=0; t<0$, $\dot{\phi}=\pi/2 \text{ rad/s}; t\geq 0$) の時刻歴応答を理論解析により求め、結果を図9に示す。高周波成分は二次モードの前向きと後向き振れ回り固有揺動数の平均値によるものであり、うなり揺動数はそれぞれの差によるものである。また、定常時の変位振幅は $u_{Dy}/L=1.51\times 10^{-4}$ となった。

5. 結 言

揺動中心からある距離だけ離れた位置に設置され、かつ、質量を有する軸受台によって弾性的に支持された剛性ロータが、揺動あるいは旋回による基礎励振を

受ける場合の運動方程式を導出し、固有値と揺動時の応答の解析を行った。また本解析のモデル化と解析プログラムの有効性を確かめるために揺動実験を行い、解析結果と実験結果とが良く一致することを示した。さらに、このプログラムを用いて急旋回時の応答解析を行った。その結果、次のことが明らかになった。

(1) 軸受台と軸受の弾性が同程度の場合、三次と四次の固有揺動数はロータと軸受支持部の質量比に大きく影響される。一次と二次の固有揺動数は質量比が小さい場合 ($\mu<0.05$)、支持部の質量にあまり影響されない。

(2) 揺動時にロータに作用する揺動軸回りのモーメントは設置距離に比例して増大する。したがって、回転機械は機体あるいは設備の揺動中心に近い位置に設置することが望ましい。

付 録

運動方程式(33)を無次元量を用いて整理した。以下に無次元量を示す。

支持部の集中質量 m_1, m_2 をロータの質量 M を用い無次元化する。その質量比を次式で表す。

Rotor speed $\frac{60}{2\pi}\Omega=3600(\text{rpm})$, $I_G^*=0.607$,
Exciting frequency $f_e=1.96(\text{Hz})$,
Exciting amplitude $\frac{180}{\pi}\phi_0=1.0(\text{deg})$.

図6 揺動時の回転円板での時刻歴応答

図7 揺動軸とロータ重心の距離に対する変位振幅

図8 ロータ回転数に対する変位振幅

図9 急旋回時の回転円板での過渡応答

$$\mu_1 = \frac{m_1}{M} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$\mu_2 = \frac{m_2}{M} \quad \dots\dots\dots (35)$$

ロータの主軸(ξ 軸)まわりの回転半径 R と ξ 軸に垂直な主軸(η 軸)まわりの回転半径 l_d を次式で定義する。

$$R^2 = \frac{J_p}{M} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$l_d^2 = \frac{J_d}{M} \quad \dots\dots\dots (37)$$

長さに関しては、軸受間の長さ L で無次元化し、それぞれ次式で表す。

$$l_1^* = \frac{l_1}{L} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$l_2^* = \frac{l_2}{L} \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$l_c^* = \frac{l_c}{L} \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$l_d^* = \frac{l_d}{L} \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$R^* = \frac{R}{L} \quad \dots\dots\dots (42)$$

$$u_1^* = \frac{u_1}{L} \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$u_2^* = \frac{u_2}{L} \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$U_1^* = \frac{U_1}{L} \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$U_2^* = \frac{U_2}{L} \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$v_1^* = \frac{v_1}{L} \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$v_2^* = \frac{v_2}{L} \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$V_1^* = \frac{V_1}{L} \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$V_2^* = \frac{V_2}{L} \quad \dots\dots\dots (50)$$

ばね定数と集中質量との比は、次式で表される周波数パラメータを用いて表現される。

$$\omega_{x1}^2 = \frac{k_{x1}}{m_1} \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$\omega_{x2}^2 = \frac{k_{x2}}{m_2} \quad \dots\dots\dots (52)$$

$$\omega_{y1}^2 = \frac{k_{y1}}{m_1} \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$\omega_{y2}^2 = \frac{k_{y2}}{m_2} \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$\Omega_{x1}^2 = \frac{K_{x1}}{M_1} \quad \dots\dots\dots (55)$$

$$\Omega_{x2}^2 = \frac{K_{x2}}{M_2} \quad \dots\dots\dots (56)$$

$$\Omega_{y1}^2 = \frac{K_{y1}}{M_1} \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$\Omega_{y2}^2 = \frac{K_{y2}}{M_2} \quad \dots\dots\dots (58)$$

粘性減衰係数と集中質量との比を次式で定義する。

$$2\zeta_{x1}\omega_{x1} = \frac{c_{x1}}{m_1} \quad \dots\dots\dots (59)$$

$$2\zeta_{x2}\omega_{x2} = \frac{c_{x2}}{m_2} \quad \dots\dots\dots (60)$$

$$2\zeta_{y1}\omega_{y1} = \frac{c_{y1}}{m_1} \quad \dots\dots\dots (61)$$

$$2\zeta_{y2}\omega_{y2} = \frac{c_{y2}}{m_2} \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$2\zeta_{x1}'\Omega_{x1} = \frac{C_{x1}}{M_1} \quad \dots\dots\dots (63)$$

$$2\zeta_{x2}'\Omega_{x2} = \frac{C_{x2}}{M_2} \quad \dots\dots\dots (64)$$

$$2\zeta_{y1}'\Omega_{y1} = \frac{C_{y1}}{M_1} \quad \dots\dots\dots (65)$$

$$2\zeta_{y2}'\Omega_{y2} = \frac{C_{y2}}{M_2} \quad \dots\dots\dots (66)$$

運動方程式(33)の変位ベクトルを無次元量を用いて表せば次式となる。

$$\mathbf{q} = \left\{ u_1^* \ u_2^* \ U_1^* \ U_2^* \ v_1^* \ v_2^* \ V_1^* \ V_2^* \right\}^T \quad \dots\dots\dots (67)$$

質量マトリックス $\mathbf{M}$ の i 行 j 列成分を M_{ij} とすると各成分は次式で表される。以後、記述されていない成分はすべて零である。

$$M_{11} = M_{22} = M_{55} = M_{66} = 1 \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$M_{33} = M_{44} = M_{77} = M_{88} = l_1^{*2} + l_d^{*2} \quad \dots\dots\dots (69)$$

$$M_{34} = M_{43} = M_{78} = M_{87} = \frac{1}{2}(l_1^{*2} + l_d^{*2}) - l_d^{*2} \quad (70)$$

ジャイロマトリックスの各成分は次式で表される。

$$G_{37} = G_{48} = G_{74} = G_{83} = \Omega R^{*2} \quad \dots\dots\dots (71)$$

$$G_{38} = G_{47} = G_{73} = G_{84} = -\Omega R^{*2} \quad \dots\dots\dots (72)$$

剛性マトリックス $\mathbf{K}_0$ の i 行 j 列の成分を K_{0ij} とすると各成分は次式で表される。

$$K_{011} = \frac{1}{\mu_1} \Omega_{x1}^2 + \omega_{x1}^2 \quad \dots\dots\dots (73)$$

$$K_{013} = -\frac{1}{\mu_1} \Omega_{x1}^2 \quad \dots\dots\dots (74)$$

$$K_{022} = \frac{1}{\mu_2} \Omega_{x2}^2 + \omega_{x2}^2 \quad \dots\dots\dots (75)$$

$$K_{024} = -\frac{1}{\mu_2} \Omega_{x2}^2 \quad \dots\dots\dots (76)$$

$$K_{031} = -\Omega_{x1}^2 \quad \dots\dots\dots (77)$$

$$K_{033} = \Omega_{x1}^2 \quad \dots\dots\dots (78)$$

$$K_{042} = -\Omega_{x2}^2 \quad \dots\dots\dots (79)$$

$$K_{044} = \Omega_{x2}^2 \quad \dots\dots\dots (80)$$

$$K_{055} = \frac{1}{\mu_1} \Omega_{y1}^2 + \omega_{y1}^2 \quad \dots\dots\dots (81)$$

$$K_{057} = -\frac{1}{\mu_1} \Omega_{y1}^2 \dots\dots\dots (82)$$

$$K_{066} = \frac{1}{\mu_2} \Omega_{y2}^2 + \omega_{y2}^2 \dots\dots\dots (83)$$

$$K_{068} = -\frac{1}{\mu_2} \Omega_{y2}^2 \dots\dots\dots (84)$$

$$K_{075} = -\Omega_{y1}^2 \dots\dots\dots (85)$$

$$K_{077} = \Omega_{y1}^2 \dots\dots\dots (86)$$

$$K_{086} = -\Omega_{y2}^2 \dots\dots\dots (87)$$

$$K_{088} = \Omega_{y2}^2 \dots\dots\dots (88)$$

減衰マトリックス C の各成分 C_{ij} は次式で表される.

$$C_{11} = \frac{2\zeta_{x1}'\Omega_{x1}}{\mu_1} + 2\zeta_{x1}\omega_{x1} \dots\dots\dots (89)$$

$$C_{13} = -\frac{2\zeta_{x1}'\Omega_{x1}}{\mu_1} \dots\dots\dots (90)$$

$$C_{22} = \frac{2\zeta_{x2}'\Omega_{x2}}{\mu_2} + 2\zeta_{x2}\omega_{x2} \dots\dots\dots (91)$$

$$C_{24} = -\frac{2\zeta_{x2}'\Omega_{x2}}{\mu_2} \dots\dots\dots (92)$$

$$C_{31} = -2\zeta_{x1}'\Omega_{x1} \dots\dots\dots (93)$$

$$C_{33} = 2\zeta_{x1}'\Omega_{x1} \dots\dots\dots (94)$$

$$C_{42} = -2\zeta_{x2}'\Omega_{x2} \dots\dots\dots (95)$$

$$C_{44} = 2\zeta_{x2}'\Omega_{x2} \dots\dots\dots (96)$$

$$C_{55} = \frac{2\zeta_{y1}'\Omega_{y1}}{\mu_1} + 2\zeta_{y1}\omega_{y1} \dots\dots\dots (97)$$

$$C_{57} = -\frac{2\zeta_{y1}'\Omega_{y1}}{\mu_1} \dots\dots\dots (98)$$

$$C_{66} = \frac{2\zeta_{y2}'\Omega_{y2}}{\mu_2} + 2\zeta_{y2}\omega_{y2} \dots\dots\dots (99)$$

$$C_{68} = -\frac{2\zeta_{y2}'\Omega_{y2}}{\mu_2} \dots\dots\dots (100)$$

$$C_{75} = -2\zeta_{y1}'\Omega_{y1} \dots\dots\dots (101)$$

$$C_{77} = 2\zeta_{y1}'\Omega_{y1} \dots\dots\dots (102)$$

$$C_{86} = -2\zeta_{y2}'\Omega_{y2} \dots\dots\dots (103)$$

$$C_{88} = 2\zeta_{y2}'\Omega_{y2} \dots\dots\dots (104)$$

揺動あるいは旋回角速度 $\dot{\phi}$ の関数として表される剛性マトリックス K_c の各成分 K_{cij} は次式で表される.

$$K_{c11} = K_{c22} = -\dot{\phi}^2 \dots\dots\dots (105)$$

$$K_{c33} = K_{c44} = -(l_1^* l_2^* + l_c^*) \dot{\phi}^2 \dots\dots\dots (106)$$

$$K_{c34} = K_{c43} = \left\{ l_c^* - \frac{1}{2}(l_1^{*2} + l_2^{*2}) \right\} \dot{\phi}^2 \dots\dots\dots (107)$$

$$K_{c77} = K_{c88} = -R^{*2} \dot{\phi}^2 \dots\dots\dots (108)$$

$$K_{c78} = K_{c87} = R^{*2} \dot{\phi}^2 \dots\dots\dots (109)$$

励振力ベクトル $\dot{\phi} f_s, \dot{\phi} f_n$ はそれぞれ次式で表される.

$$\dot{\phi} f_{s7} = -\dot{\phi} \Omega R^{*2} \dots\dots\dots (110)$$

$$\dot{\phi} f_{s8} = \dot{\phi} \Omega R^{*2} \dots\dots\dots (111)$$

$$\dot{\phi} f_{n1} = \ddot{\phi}(l_1^* - l_c^*) \dots\dots\dots (112)$$

$$\dot{\phi} f_{n2} = -\ddot{\phi}(l_2^* + l_c^*) \dots\dots\dots (113)$$

$$\dot{\phi} f_{n3} = \ddot{\phi} \left\{ \frac{1}{2} l_2^*(l_1^* - l_2^*) - \frac{1}{2} l_c^*(l_1^* + l_2^*) + l_d^{*2} \right\} \dots\dots\dots (114)$$

$$\dot{\phi} f_{n4} = -\ddot{\phi} \left\{ -\frac{1}{2} l_1^*(l_1^* - l_2^*) + \frac{1}{2} l_c^*(l_1^* + l_2^*) + l_d^{*2} \right\} \dots\dots\dots (115)$$

文 献

- (1) 田村・ほか2名, 機論, 47-424, C(1981), 1586.
- (2) 古池・石原, 機論, 49-438, C(1983), 173.
- (3) 古池・石原, 機論, 50-451, C(1984), 470.
- (4) 我妻・斎藤, 機論, 50-460, C(1984), 2242.
- (5) Soni, A. H. and Srinivasan, V., *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, 105 (1983), 449-455.
- (6) Samali, B. Kim, K. B. and Yang, J. N., *ASCE, J. Eng. Mech.*, 112-6 (1986), 550-565.
- (7) Sakata, M., Kimura, K., Park, S. K. and Ohnabe, H., *J. Sound Vib.*, 131-3 (1989), 417-430.
- (8) 山内, 一般力学, (1959), 87, 岩波書店.