高 速 回 転 す る 弦 の 張 力*

高 田 一^{*1}, 高 橋 権^{*2}, 富 永 守 雄^{*3}

Tension of String Revolving at a High Speed

Hajime TAKADA, Chikara TAKAHASHI and Morio TOMINAGA

In this paper, the tension of a very fine string revolving at a high speed is calculated numerically. The string formed around a rotating cylinder is reeled in by another cylinder. When the governing equation has no air resistance term, it is calculated analytically with an elliptic function. Here, the equation consists of the terms of tension, inertial force, Coriolis' force, centrifugal force and force of air resistance. It is calculated by using the Runge-Kutta method and as a result, the shape of the string, tension distribution and the limit revolution number, where the maximum of tension is equal to the tensile strength, are obtained.

Key Words: Tension of String, High Speed Revolution, Tensile Strength

1. 結 論

産業機械の高速化に伴い、弦のふれまわりが問題になることがある。弦の運動に関しては、精紡機のバルーニングについての研究⁽¹⁾などがあるが、そこでは一定の張力を与えたときの弦の形状を調べており、空気抵抗などは考慮されていない。弦が巻かれた円柱が回転し、もう一方の円柱に巻き取られる場合、空気抵抗を無視すれば、定常回転の場合、弦の形状はだ円関数を使って求めることができるが⁽²⁾、空気抵抗を考慮すると解析的には解かれていない。

本研究では、弦が巻かれた円柱が高速で回転し、もう一方の円柱に巻き取られる場合、空気抵抗を考慮し弦の描く形状および弦の張力、回転半径を数値計算した。その結果、それほど高くない回転数で弦の張力が引張強さを超える場合があり、弦の回転数に限界があることがわかった。

2. 解 析

図1のように送り側の円柱Bの回転軸を z 軸にとる。

受け側の円柱Aも z 軸上にあり回転はしていないものとする。円柱Bを z の負の方向に回転させると弦が円柱Aに巻き付くため、弦は円柱よりも速い回転数で回り、円柱からほどけることになる。弦がほどける

図1 モデル

* 原稿受付 平成2年7月11日。

^{*1} 正員、横浜国立大学工学部 (〒240 横浜市保土ヶ谷区常盤台156)。^{*2} 学生員、横浜国立大学大学院。^{*3} 東芝ライテック(株) (〒237 横浜賀市船越町1-201)。

点 P_B と弦が巻き付く点 P_A は、 $z=L$ および $z=0$ の平面内の円周上を回転しており、また、弦は伸びないものとする。弦の回転角速度を $\omega(t)$ として、弦は、張力、空気抵抗力および重力を受けるので、微小部分 ds の運動方程式は、弦に沿った座標を s とすると次のようになる。

$$\lambda ds \vec{a} = \vec{T} + \vec{D} + \vec{G} \quad \cdots \cdots (1)$$

ここで、 λ : 弦の線密度、 $\vec{a}$: 絶対加速度ベクトル、 $\vec{T}$: 弦の張力ベクトル、 $\vec{D}$: 空気抵抗による力ベクトル、 $\vec{G}$: 重力ベクトルである。これを、弦とともに回転する座標系の点 $r=(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ で表すと各要素は次のようになる。

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^t \quad \cdots \cdots (2)$$

$$a_1 = v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial x}{\partial s} + 2v \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2v\omega \frac{\partial y}{\partial s} - 2\omega \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{d\omega}{dt} y - \omega^2 x \quad \cdots \cdots (3)$$

$$a_2 = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial y}{\partial s} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2v\omega \frac{\partial x}{\partial s} + 2\omega \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{d\omega}{dt} x - \omega^2 y \quad \cdots \cdots (4)$$

$$a_3 = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial z}{\partial s} + 2v \frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \cdots \cdots (5)$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + T \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \\ \left(\frac{1}{v} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial s} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + T \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\ \left(\frac{1}{v} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial s} \right) \frac{\partial z}{\partial s} + T \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \end{pmatrix} ds \quad \cdots \cdots (6)$$

$$\vec{D} = C \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} ds \quad \cdots \cdots (7)$$

$$C = \frac{\rho d C_d}{2} \omega^2 \quad \cdots \cdots (8)$$

$$\vec{G} = \lambda g \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} ds \quad \cdots \cdots (9)$$

ここで、 v : 弦の送り速度 ($= ds/dt$)、 C_d : 抗力係数、 ρ : 空気密度、 d : 弦の直径、 t : 時間、 g : 重力加速度である。

式(3)～(6)で表される非定常の場合は続報で述べるとし、ここでは弦の形状および回転数が一定の場合について弦の張力、形状を計算する。オーダ比較の結果、重力は張力、空気抵抗力に比して、かなり小さくなるので実際の計算では無視する。式(2)および(6)は、

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} v^2 \frac{d^2 x}{ds^2} - 2v\omega \frac{dy}{ds} - \omega^2 x \\ v^2 \frac{d^2 y}{ds^2} + 2v\omega \frac{dx}{ds} - \omega^2 y \\ v^2 \frac{d^2 z}{ds^2} \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots (2)'$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{dT}{ds} \frac{dx}{ds} + T \frac{d^2 x}{ds^2} \\ \frac{dT}{ds} \frac{dy}{ds} + T \frac{d^2 y}{ds^2} \\ \frac{dT}{ds} \frac{dz}{ds} + T \frac{d^2 z}{ds^2} \end{pmatrix} ds \quad \cdots \cdots (6)'$$

さらに、 s を消去するため、 T, x, y を z の関数で表し、 z による微分で書き直すと、式(1)の3行め (z に関する式) は、

$$\frac{dT}{dz} \left\{ \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right\} - (T - \lambda v^2) \times \left(\frac{dx}{dz} \frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{dy}{dz} \frac{d^2 y}{dz^2} \right) = 0 \quad \cdots \cdots (10)$$

これより、

$$T = T_0 \sqrt{\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 1} + \lambda v^2 \quad \cdots \cdots (11)$$

ここで、 T_0 は、積分定数である。この式より、任意の点の張力を求めることができる。 $X=x/L, Y=y/L, Z=z/L$ と無次元化し、式(11)を用いると、運動方程式 (x に関する式、 y に関する式) は、

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dX}{dZ} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dZ} \right)^2 + 1}} \left(\frac{T_0}{\lambda \omega^2 L^2} \frac{d^2 X}{dZ^2} - \frac{2v}{\omega L} \frac{dY}{dZ} \right) + X + \frac{CL}{\lambda \omega^2} \sqrt{X^2 + Y^2} Y = 0 \quad \cdots \cdots (12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dX}{dZ} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dZ} \right)^2 + 1}} \left(\frac{T_0}{\lambda \omega^2 L^2} \frac{d^2 Y}{dZ^2} + \frac{2v}{\omega L} \frac{dX}{dZ} \right) + Y - \frac{CL}{\lambda \omega^2} \sqrt{X^2 + Y^2} X = 0 \quad \cdots \cdots (13)$$

となる。次の境界条件を考え、式(12)、(13)を Runge-Kutta 法で解く。

$$Z=0: X = \frac{a}{L}, Y=0, \frac{dX}{dZ} = 0 \quad \cdots \cdots (14)$$

$$Z=1: X^2 + Y^2 = \left(\frac{b}{L} \right)^2, X \frac{dX}{dZ} + Y \frac{dY}{dZ} = 0 \quad \cdots \cdots (15)$$

ここで、 a, b はそれぞれ受け側、送り側の円柱の半径である。条件式(15)の二つめは、 $dr/dz=0$ を X, Y で表したものである。

3. 計 算 結 果

$Z=0$ の式(14)の条件と $dY/dZ, T_0$ の値を仮定して与え、式(15)の条件を満たす X, Y, T_0 を求める。弦の

送り速度 v と弦の回転数 ω , 円柱 B の回転数 ω_1 との間には,

$$v = a\omega = b(\omega - \omega_1) \quad \dots\dots\dots (16)$$

の関係があり, 円柱の回転数は,

$$\omega_1 = \left(1 - \frac{a}{b}\right)\omega \quad \dots\dots\dots (17)$$

で表されるが, ここでは, $a/b \ll 1$ であるので $\omega_1 \approx \omega$ とする. 抗力係数 C_d は, レイノルズ数 $Re [= (r\omega d)/\nu]$ の関数になり, 弦の回転半径により異なってくるので, $10^{-1} < Re < 10^4$ と考えて次の式で近似した⁽³⁾. ここで, $r = L\sqrt{X^2 + Y^2}$, ν : 空気動粘度で $\nu = 15.15[\text{mm}^2/\text{s}](20^\circ\text{C})$ とした.

$$\log(C_d) = 0.096\{\log(Re) - \log 2000\}^2 + \log 0.9 \quad \dots\dots\dots (18)$$

以下のグラフでは, 有次元座標 x, y, z で表す.

図 2 に y 軸および z 軸からみた弦の形状の一例を, 図 3 (a) に張力分布の一例を示す. 弦の材質はタングステンである. これをみるとほどける点での張力が最大となっているが, これは図 2 (b) をみてわかるよう

に点 P_B が y の負の側になり, 点 P_B から最大半径の点までの距離が, 点 P_A から最大半径の点までの距離よりも大きくなり, 慣性力が大半を占めている弦の張力が大きくなることになる. 図 3 (b) は, 弦が受ける空気抵抗力の分布である.

張力の最大値を, 弦の線径をパラメータにとり円柱 B の回転数 [rpm] を横軸にした結果が図 4 で, 線径が大きくなるにつれて急速に張力が増加することがわかる. また, 図中の $\times$ 印は, タングステンの引張強さを $15 \times 10^8 [\text{Pa}]^{(4)}$ として計算した点であり, これ以上の回転数では弦は破断することを示す.

図 5 は, 回転している弦の半径の最大値 [図 2 (a) 中の点 R と回転軸 (z 軸) との距離] を求めた結果である. 回転数が 10 000 [rpm] あたりまでは回転数の増加に伴って半径が増加していくが, それを越えると増加はゆるやかになり, 40 000 [rpm] と 50 000 [rpm] ではほとんど差がないことがわかる. 図中の点は, 線径が $19 [\mu\text{m}]$ の場合の実験結果である. 弦にストロボをあて, スケールで読取った. 計算値と実験値は, 一致し

(a)

(b)

$n = 20000 [\text{rpm}]$
 $d = 18.2 [\mu\text{m}]$ $l = 55 [\text{mm}]$
 $a = 0.2 [\text{mm}]$ $b = 30 [\text{mm}]$
 $\rho = 1.205 [\text{kg}/\text{m}^3]$ $\lambda = 5.0 \times 10^{-6} [\text{g}/\text{mm}]$

図 2

(a)

(b)

$d = 18.2 [\mu\text{m}]$
 $l = 55 [\text{mm}]$
 $a = 0.2 [\text{mm}]$
 $b = 30 [\text{mm}]$
 $\rho = 1.205 [\text{kg}/\text{m}^3]$
 $\lambda = 5.0 \times 10^{-6} [\text{g}/\text{mm}]$

図 3

ていると言える。

図6と7は、弦の材質をタングステン、銅そして鋼の3種類で計算した張力および半径の結果である。弦の線密度を順にそれぞれ 2.40×10^{-5} , 1.12×10^{-5} , 9.88×10^{-6} [g/mm] とした。また銅および鋼の引張強さをそれぞれ 2.0×10^8 , 7.0×10^8 [Pa] で計算した。図6中の×印は破断点を示す。タングstenは、引張強さも大きい、密度も大きく、破断する回転数が鋼よりも小さいことがわかる。

図8と9は、弦がほどける円と巻き付く円の距離をパラメータにして計算した結果であり、 $L=40 \sim 70$ [mm] の範囲では、張力、半径ともほとんど変わらないことがわかる。したがって、弦がほどける点、および、巻き取られる点、現在考えている円周上から多少ずれても、弦のずれによる慣性力が無視できれば、

張力、半径ともにそれほど変化がないということが出来る。

図10は、弦の周囲の気体の密度を変えて計算した張力の結果である。 $\rho=1.205$ [kg/m³] は、1気圧、20°Cのときの密度である。また、図11は、 z 軸からみた形状である。これをみると、密度を大きくすると張力、半径ともに小さくなり、破断に至る限界回転数を大きくすることができることがわかる。周囲気体による抵抗力は、弦の半径を抑える働きをし、遠心力が小さくなるので張力が小さくなる。逆に、密度を小さくすると半径が大きくなり、周囲を真空として計算すると半径が無限大になってしまう。これは、真空中では、弦は張力と遠心力がほぼ釣り合うことになり、弦は、ほぼ一平面内に納まることになるが、実際には、巻きとる円柱の点 P_A における接平面とほどける円柱の任意の点に

図 4

図 6

図 5

図 7

図 8

図 9

図 10

おける接平面が一致しないため、解が存在しないことになる。

図 12 は、円柱 A の半径を大きくして計算した弦の形状である。巻き取る円柱の半径を大きくすると弦の送り速度が大きくなり、コリオリ力の影響を大きく受けることになる。したがって、弦を y 軸からみた場合は、図 2 (a) と変わらないが、 z 軸からみると、図のようにねじれた形になる。

4. 結 論

(1) 高速回転する円柱に巻かれた弦が、別の円柱に巻き取られる場合の弦の形状および張力分布をコリオリ力、空気抵抗を考慮して計算した。

(2) 各回転数における張力の最大値を求め、その値が引張強さと等しくなる限界回転数を示した。

図 11

図 12

(3) 線径が $19[\mu\text{m}]$ の弦を使って、回転数 $7\,800\sim 18\,200[\text{rpm}]$ の範囲で実験を行い、回転半径を測定した。その値と計算値はよく一致している。

(1982), 109.

(2) 戸田, 楢田関数入門, (1976), 20, 日本評論社.

(3) 日本機械学会機械工学便覧 基礎編, A 5, 流体工学, (1986), 99.

(4) 理科年表 1983 年度版, (1983), 441, 丸善.

文 献

(1) 藤井, 精紡機のバレーニングについて, 藤井澄二論文選集,